数 学 年 刊
2011,32A(3):355–364

序列 $[n^c]$ 上多维除数函数的和*

李 英 杰[1]

提要 设 $[\theta]$ 表示 θ 的整数部分, $k \geqslant 2$, $d_k(n)$ 为除数函数. 证明了当实数 c 满足 $1 < c < \frac{3849}{3334}$ 时, $\sum\limits_{n \leqslant x} d_k([n^c])$ 具有渐近公式, 从而改进了吕广世和翟文广的结果 ($1 < c < \frac{495}{433}$), 而且当 $k = 2$ 时, 实数 c 的范围可以改进到 $1 < c < \frac{391}{335}$.

关键词 除数函数, 渐近公式, 指数和, 指数对
MR (2000) 主题分类 11N37, 11L07
中图法分类 O156.4
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2011)03-0355-10

1 引 言

设 $[\theta]$ 表示 θ 的整数部分, Piatetski-shapiro[1] 研究了序列 $[n^c]$ 中的素数分布情况, 证明了当 $1 < c < \frac{12}{11}$ 时, 有

$$\pi_c(x) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ [n^c] \text{ 为素数}}} 1 \sim \frac{x}{c \log x}.$$

此后, c 的范围先后被文 [2–6] 所改进, 文 [7] 中得到了目前最好的结果 ($1 < c < \frac{2817}{2426}$).

此外, 文 [6] 还证明了 $1 < c < \frac{7}{6}$ 时, 有 $\pi_c(x) \gg \frac{x}{c \log x}$. 这一结果被文 [8] 改进到 $1 < c < \frac{20}{17}$, 文 [9] 应用筛法将 c 改进到 $1 < c < \frac{13}{11}$.

由互不相同的素因子相乘得到的数被称为无平方因子数. 文 [10] 指出, 在 Lebegue 测度的意义下, 当实数 c 满足 $1 < c < 2$ 时, 序列 $[n^c]$ 中有无穷多个无平方因子数. 文 [11] 证明了当 $1 < c < 1.5$ 时, 有

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ [n^c] \text{ 为无平方因子数}}} 1 = \frac{6}{\pi^2} x + o(x).$$

文 [12] 利用指数和方法将 c 改进到 $1 < c < \frac{61}{36}$.

定义除数函数 $d_k(n)$ 为方程 $x_1 x_2 \cdots x_k = n$ 的正整数解的个数. 对和式 $\sum\limits_{n \leqslant x} d_k(n)$ 的渐近公式中的余项的估计称作 Dirichlet 除数问题, 这是数论中的一个著名问题[13]. 1999 年, Arkhipov, Sohba 和 Chubarikov[14] 获得了和式 $\sum\limits_{n \leqslant x} d_k([n^c])$ 的一个渐近公式, 他们证明了: 当 $1 < c < \frac{8}{7} = 1.142 \cdots$ 时,

$$A(x) := \sum_{n \leqslant x} d_k([n^c]) = x Q_{k-1}(\log x) + O\Big(\frac{x}{\log x}\Big),$$

本文 2009 年 11 月 5 日收到, 2010 年 10 月 8 日收到修改稿.
[1]上海海洋大学信息学院, 上海 201306. E-mail: thelyj@163.com
*上海高校选拔培养优秀青年教师科研专项基金 (No. ssc08017) 和上海海洋大学博士科研启动基金资助的项目.

其中 $Q_{k-1}(x)$ 是 $k-1$ 次多项式. 2003 年，吕广世和翟文广 [15] 把 c 的范围改进到 $1<c<\frac{495}{433}=1.143\cdots$.

本文利用指数和方法与指数对理论进一步改进了前文的结果，得到如下定理：

定理 1.1 设 $B(x)=\sum\limits_{n\leqslant x}d([n^c])$, 则当 $1<c<\frac{391}{335}=1.167\cdots$ 时，有 $B(x)=cx\log x+(2\beta-c)x+O(\frac{x}{\log x})$, 这里 β 表示 Euler 常数.

定理 1.2 设 $k\geqslant 3$, 则当 $1<c<\frac{3849}{3334}=1.154\cdots$ 时，有 $A(x)=xQ_{k-1}(\log x)+O(\frac{x}{\log x})$, 其中 $Q_{k-1}(x)$ 是 $k-1$ 次多项式.

本文中 $[t]$ 表示 t 的整数部分，$\{t\}=t-[t]$, $e(t)=\exp(2\pi\mathrm{i}t)$, $\|t\|=\min(\{t\},1-\{t\})$, $\psi(t)=\{t\}-\frac{1}{2}$.

2 预备定理

引理 2.1 [13] 设 $x\geqslant 1$, 则

$$\sum_{n\leqslant x}d(n)=x\log x+(2\beta-1)x+O(\sqrt{x}),$$

$$\sum_{n\leqslant x}d_k(n)=xP_{k-1}(\log x)+\Delta_k(x),$$

这里 β 表示 Euler 常数， $P_{k-1}(x)$ 是 $k-1$ 次多项式， $\Delta_k(x)\ll x^{\frac{k-1}{k}}\log^{k-2}x$.

引理 2.2 [3] 设 $\psi(t)=t-[t]-\frac{1}{2}$, 则

$$\psi(\theta)=-\sum_{0<|h|\leqslant H}\frac{e(\theta h)}{2\pi\mathrm{i}h}+O(g(\theta,H)),$$

其中

$$g(\theta,H)=\min\Big(1,\frac{1}{H\|\theta\|}\Big)=\sum_{h=-\infty}^{\infty}a_he(\theta h),$$

$$a_h\ll\min\Big(\frac{\log 2H}{H},\frac{1}{|h|},\frac{H}{|h|^2}\Big).$$

引理 2.3 [3] 当 $N<N_1\leqslant 2N$ 时，有

$$\sum_{N<n\leqslant N_1}e(\lambda n^\gamma)\ll\min\Big(N,\frac{N^{1-\gamma}}{|\lambda|}+(|\lambda|N^\gamma)^{\frac{1}{2}}\Big).$$

引理 2.4 [3] 设 J 是正整数， I 是 $(Y,2Y]$ 的子区间， z_n 为任意复数，则

$$\Big|\sum_{n\in I}z_n\Big|^2\leqslant\Big(1+\frac{Y}{J}\Big)\sum_{|j|\leqslant J}\Big(1-\frac{|j|}{J}\Big)\sum_{n,n+j\in I}\overline{z}_nz_{n+j}.$$

引理 2.5 [3] 设 $0<a<b\leqslant 2a$, R 是 $\mathbb{C}$ 上的包含 $[a,b]$ 的开凸集， $f(z)$ 在 R 上解析， $|f''(z)|\leqslant M$ $(z\in R)$, 当 $x\in R$ 取实值时， $f(x)$ 是实的，且存在常数 $k>0$, 使得 $f''(x)\leqslant -kM$. 令 $\alpha=f'(b)$, $\beta=f'(a)$. 对每个 $\alpha<v<\beta$, 由方程 $f'(x_v)=v$ 定义 x_v, 则

有

$$\sum_{a<n\leqslant b} e(f(n)) = e\Big(-\frac{1}{8}\Big) \sum_{\alpha<v\leqslant\beta} |f''(x_v)|^{-\frac{1}{2}} e(f(x_v) - vx_v) + O(M^{-\frac{1}{2}} + \log(2 + M(b-a))).$$

引理 2.6 [16] 假设当 $N \leqslant x \leqslant cN$ 时,

$$0 < c_1\delta \leqslant |f'(x)| \leqslant c_2\delta, \quad |f^{(j)}(x)| \sim \delta N^{-j}, \quad j = 2,3,4,5,6,$$

那么对任意的指数对 (κ,λ), 有

$$\sum_{N<n\leqslant cN} e(f(n)) \ll \delta^\kappa N^\lambda + \delta^{-1}.$$

引理 2.7 [17] 设 α_i 是实数，满足 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_1-1)(\alpha_2-2) \neq 0$ 且 $G > 0$, $M_j \geqslant 1$, $|\varphi_{m_1}| \leqslant 1$, $|\psi_{m_2m_3}| \leqslant 1$, $L = \log(2GM_1M_2M_3)$, 则

$$\begin{aligned} S(M_1,M_2,M_3) &= \sum_{m_1\sim M_1}\sum_{m_2\sim M_2}\sum_{m_3\sim M_3} \varphi_{m_1}\psi_{m_2m_3} e\Big(G\frac{m_1^{\alpha_1}m_2^{\alpha_2}m_3^{\alpha_3}}{M_1^{\alpha_1}M_2^{\alpha_2}M_3^{\alpha_3}}\Big) \\ &\ll \{(G^4M_1^{15}M_2^{22}M_3^{22})^{\frac{1}{26}} + (GM_1^2M_2^3M_3^3)^{\frac{1}{4}} \\ &\quad + M_1^{\frac{11}{18}}M_2M_3 + M_1(M_2M_3)^{\frac{3}{4}} + G^{-\frac{1}{2}}M_1M_2M_3\}L^{\frac{7}{4}}. \end{aligned}$$

引理 2.8 [8] 设 α,α_1,α_2 是实数，满足 $(\alpha-1)\alpha\alpha_1\alpha_2 \neq 0$, $1 \leqslant M_1,M_2,M_3 \leqslant X$, $|b_{m_1m_2}| \leqslant 1$ 且 $y = |A|M_3^\alpha M_1^{\alpha_1}M_2^{\alpha_2} \geqslant M_1M_2$, $L = \log(2M_3M_1M_2)$, 则

$$\begin{aligned} S &= \sum_{m\sim M_3}\Big|\sum_{m_1\sim M_1}\sum_{m_2\sim M_2} b_{m_1m_2} e(Am^\alpha m_1^{\alpha_1}m_2^{\alpha_2})\Big| \\ &\ll L((M_1M_2)^{\frac{1}{2}}M_3 + (M_1M_2)^{\frac{2+\kappa}{2+2\kappa}} y^{\frac{\kappa}{2+2\kappa}} M_3^{\frac{1+\kappa+\lambda}{2+2\kappa}}), \end{aligned}$$

其中 (κ,λ) 是指数对.

3 问题的转化

本节我们将利用类似于 Heath-Brown 的方法 [3] 把问题转化为估计指数和的问题.

设 $1 < c < 2$ 是一个实常数，记 $\gamma = \frac{1}{c}$. 由于 $[n^c] = m$ 当且仅当 $m^\gamma \leqslant n < (m+1)^\gamma$, 因此

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{m\leqslant x^c} d_k(m)([-m^\gamma] - [-(m+1)^\gamma]) \\ &= \sum_{m\leqslant x^c} d_k(m)(D(m,\gamma) - E(m,\gamma)) + O(x^\varepsilon), \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中

$$D(m,\gamma) = (m+1)^\gamma - m^\gamma, \quad E(m,\gamma) = \psi(-m^\gamma) - \psi(-(m+1)^\gamma).$$

利用引理 2.1 及分部求和，得

$$B(x) = cx\log x + (2\beta - c)x + \sum_{m\leqslant x^c} d(m)E(m,\gamma) + O(\sqrt{x}),$$

$$A(x) = xQ_{k-1}(\log x) + \sum_{m\leqslant x^c} d_k(m)E(m,\gamma) + O\Big(\frac{x}{\log x}\Big).$$

要证明定理 1.1 和定理 1.2, 只需证明当 $1 \leqslant M \leqslant x^c$ 时，有

$$\sum_{M<m\leqslant 2M} d_k(m)E(m,\gamma) \ll \frac{M^\gamma}{\log^2 M}. \tag{3.2}$$

利用引理 2.2, 得

$$\sum_{M<m\leqslant 2M} d_k(m)E(m,\gamma) = -S + O\Big(\sum_{M<m\leqslant 2M} d_k(m)(g(m^\gamma,H)+g((m+1)^\gamma,H))\Big),$$

其中

$$S = \sum_{0<|h|\leqslant H} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}h} \sum_{M<m\leqslant 2M} d_k(m)(e(-hm^\gamma)-e(-h(m+1)^\gamma)).$$

设 η 是一个充分小的正常数， $\frac12+2\eta\leqslant\gamma<1$, 取 $H=M^{1-\gamma+2\eta}$. 首先来证明

$$\sum_{M<m\leqslant 2M} (g(m^\gamma,H)+g((m+1)^\gamma,H)) \ll M^{\gamma-\eta}.$$

由引理 2.2 和引理 2.3, 得

$$\begin{aligned}
\sum_{M<m\leqslant 2M} g(m^\gamma,H) &\ll \sum_{h=-\infty}^{\infty} |a_h|\Big|\sum_{M<m\leqslant 2M} e(hm^\gamma)\Big| \\
&\ll M|a_0| + M^{1-\gamma}\sum_{h\neq 0}|a_h h^{-1}| + M^{\frac{\gamma}{2}}\sum_{h\neq 0}|a_h||h|^{\frac12} \\
&\ll \frac{M\log 2H}{H} + M^{1-\gamma}\sum_{h\neq 0}|h|^{-2} + M^{\frac{\gamma}{2}}\sum_{0<|h|\leqslant H}|h|^{-\frac12} + M^{\frac{\gamma}{2}}\sum_{|h|>H}\frac{H}{|h|^{\frac32}} \\
&\ll \frac{M\log 2H}{H} + M^{1-\gamma} + (HM^\gamma)^{\frac12} \\
&\ll M^{\gamma-\eta}.
\end{aligned}$$

同理可得

$$\sum_{M<m\leqslant 2M} g((m+1)^\gamma,H) \ll M^{\gamma-\eta}.$$

下面我们来估计 S. 记 $\phi_h(x)=1-e(h(x^\gamma-(x+1)^\gamma))$, 则当 $M<x\leqslant 2M$ 时，有

$$\phi_h(x) \ll hM^{\gamma-1}, \quad \frac{\partial\phi_h(x)}{\partial x} \ll hM^{\gamma-2}.$$

利用分部求和，得到

$$\begin{aligned}
S &\ll \sum_{0<h\leqslant H} h^{-1}\Big|\sum_{M<m\leqslant 2M} d_k(m)\phi_h(m)e(-hm^\gamma)\Big| \\
&\ll \sum_{0<h\leqslant H} h^{-1}|\phi_h(2M)|\Big|\sum_{M<m\leqslant 2M} d_k(m)e(-hm^\gamma)\Big| \\
&\quad + \int_M^{2M} \sum_{0<h\leqslant H} h^{-1}\Big|\frac{\partial\phi_h(x)}{\partial x}\Big|\Big|\sum_{M<m\leqslant 2M} d_k(m)e(-hm^\gamma)\Big|\mathrm{d}x \\
&\ll M^{\gamma-1}\max_{M_1}\sum_{0<h\leqslant H}\Big|\sum_{M<m\leqslant M_1} d_k(m)e(hm^\gamma)\Big|,
\end{aligned}$$

这里 $M<M_1\leqslant 2M$.

由以上讨论可得

$$\sum_{M<m\leqslant 2M} d_k(m)E(m,\gamma) \ll M^{\gamma-1}\max_{M_1}\sum_{0<h\leqslant H}\Big|\sum_{M<m\leqslant M_1} d_k(m)e(hm^{\gamma})\Big| + O(M^{\gamma-\eta}). \quad (3.3)$$

由 (3.2) 和 (3.3) 知，为证明定理 1.1 和定理 1.2, 只需证明

$$\sum_{0<h\leqslant H}\Big|\sum_{M<m\leqslant M_1} d_k(m)e(hm^{\gamma})\Big| = \sum_{0<h\leqslant H}\varepsilon_h\sum_{M<m\leqslant M_1} d_k(m)e(hm^{\gamma}) \ll M^{1-\eta}, \quad (3.4)$$

其中 $|\varepsilon_h|=1,\ 1<M<M_1\leqslant 2M\leqslant x^c$.

4 指数和的估计

引理 4.1　设 η 为一足够小的正常数，$\frac{227}{272}+6\eta\leqslant\gamma<1,\ 1<M<M_1\leqslant 2M$, $H=M^{1-\gamma+2\eta}$, $|\varepsilon_h|\leqslant 1$, $|\varphi_m|\leqslant 1$, 则当 $Y\geqslant M^{\frac{1}{3}}$ 时，有

$$K=\sum_{0<h\leqslant H}\varepsilon_h\sum_{X<m\leqslant 2X}\varphi_m\sum_{\substack{Y<n\leqslant Y_1\\ M<mn\leqslant M_1}} e(h(mn)^{\gamma}) \ll M^{\frac{471}{238}-\gamma+3\eta}Y^{-\frac{3}{14}}+M^{1-3\eta}.$$

证　如果 $Y\geqslant M^{\frac{3}{2}-\gamma+6\eta}$, 由引理 2.3, 得

$$\begin{aligned}K &\ll \sum_{0<h\leqslant H}\sum_{X<m\leqslant 2X}\Big|\sum_{\substack{Y<n\leqslant 2Y\\ M<mn\leqslant M_1}} e(h(mn)^{\gamma})\Big| \\ &\ll \sum_{0<h\leqslant H}\sum_{X<m\leqslant 2X}(M^{-\gamma}Yh^{-1}+M^{\frac{\gamma}{2}}h^{\frac{1}{2}}) \\ &\ll M^{3\eta}(M^{1-\gamma}+M^{\frac{5}{2}-\gamma}Y^{-1}) \ll M^{1-3\eta}.\end{aligned}$$

如果 $M^{\frac{1}{3}}\leqslant Y\leqslant M^{\frac{3}{2}-\gamma+6\eta}$, 设 $J=1+[M^{\frac{5}{119}}Y^{\frac{3}{7}}]$, 容易验证 $J=o(Y)$, 则

$$K \ll \sum_{0<h\leqslant H} K_h, \quad (4.1)$$

其中

$$K_h=\sum_{X<m\leqslant 2X}\Big|\sum_{\substack{Y<n\leqslant Y_1\\ M<mn\leqslant M_1}} e(h(mn)^{\gamma})\Big|.$$

由 Cauchy 不等式，得

$$K_h^2 \leqslant X\sum_{X<m\leqslant 2X}\Big|\sum_{\substack{Y<n\leqslant Y_1\\ M<mn\leqslant M_1}} e(h(mn)^{\gamma})\Big|^2.$$

对上式应用引理 2.4, 得

$$K_h^2 \ll \frac{M}{J}\sum_{|j|\leqslant J}|E_j|,$$

其中

$$E_j=\sum_{X<m\leqslant 2X}\sum_{\substack{Y<n,n+j\leqslant Y_1\\ M<mn,m(n+j)\leqslant M_1}} e(hm^{\gamma}((n+j)^{\gamma}-n^{\gamma})),$$

由于 $E_{-j}=\overline{E}_j$ 和 $E_0 \ll XY$, 有

$$K_h^2 \ll \frac{M}{J}\Big(XY+\sum_{1\leqslant j\leqslant J}|E_j|\Big), \tag{4.2}$$

且当 $j\geqslant 1$ 时，有

$$E_j=\sum_{Y<n\leqslant Y_2}\sum_{X_1<m\leqslant X_2} e(\lambda m^\gamma),$$

其中

$$Y_2=Y_1-j,\quad \lambda=h((n+j)^\gamma-n^\gamma),\quad X_1=\max\Big(X,\frac{M}{n}\Big),\quad X_2=\min\Big(2X,\frac{M_1}{n+j}\Big).$$

由引理 2.5, 得

$$E_j=\sum_{Y<n\leqslant Y_2}\sum_{\alpha<v\leqslant\beta} w(v)\lambda^{\frac{1}{2-2\gamma}} e(B_v\lambda^{\frac{1}{1-\gamma}})+O((hj)^{-\frac12}X^{1-\frac{\gamma}{2}}Y^{\frac32-\frac{\gamma}{2}})+O(Y\log MJ),$$

其中

$$\begin{aligned}B_v&=(1-\gamma)\gamma^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}v^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}},\\ \alpha&=\alpha(n)=\lambda\gamma X_2^{\gamma-1},\quad \beta=\beta(n)=\lambda\gamma X_1^{\gamma-1},\\ w(v)&=e\Big(-\frac18\Big)(1-\gamma)^{-\frac12}\gamma^{\frac{1}{2-2\gamma}}v^{\frac{\gamma-2}{2-2\gamma}}\ll (hj)^{\frac{\gamma-2}{2-2\gamma}}M^{1-\frac{\gamma}{2}}.\end{aligned}$$

每一个 v, n 的取值区间 $(Y_3,Y_4]$ 由 $Y<n\leqslant Y_2$, $\alpha(n)<v$, $\beta(n)\geqslant v$ 定义，因而由分部求和，得

$$E_j\ll (hj)^{\frac12}M^{\frac{\gamma}{2}}Y^{-\frac12}\Big|\sum_{Y_3<n\leqslant Y_4} e(B\lambda^{\frac{1}{1-\gamma}})\Big|+(hj)^{-\frac12}M^{1-\frac{\gamma}{2}}Y^{\frac12}+Y\log(MJ), \tag{4.3}$$

其中 $Y\leqslant Y_3<Y_4\leqslant 2Y$ 且

$$M^\gamma(hj)^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}}\ll B=B_v\ll M^\gamma(hj)^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}}.$$

利用引理 2.6 并取指数对 $(\kappa,\lambda)=BA^4B(0,1)=(\frac{13}{31},\frac{16}{31})$, 我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{Y_3<n\leqslant Y_4} e(B\lambda^{\frac{1}{1-\gamma}})&\ll (B(hj)^{\frac{1}{1-\gamma}}Y^{-2})^{\frac{13}{31}}Y^{\frac{16}{31}}+(B(hj)^{\frac{1}{1-\gamma}}Y^{-2})^{-1}\\ &\ll M^{\frac{13}{31}\gamma}Y^{-\frac{10}{31}}(hj)^{\frac{13}{31}}+M^{-\gamma}Y^2(hj)^{-1}.\end{aligned}$$

把上式代入 (4.3), 即得

$$E_j\ll M^{\frac{57}{62}\gamma}Y^{-\frac{51}{62}}(hj)^{\frac{57}{62}}+M^{-\frac{\gamma}{2}}Y^{\frac32}(hj)^{-\frac12}+M^{1-\frac{\gamma}{2}}Y^{\frac12}(hj)^{-\frac12}+Y\log(MJ).$$

因为 $Y\ll M$, 所以 $M^{-\frac{\gamma}{2}}Y^{\frac32}(hj)^{-\frac12}\ll M^{1-\frac{\gamma}{2}}Y^{\frac12}(hj)^{-\frac12}$, 因此

$$E_j\ll M^{\frac{57}{62}\gamma}Y^{-\frac{51}{62}}(hj)^{\frac{57}{62}}+M^{1-\frac{\gamma}{2}}Y^{\frac12}(hj)^{-\frac12}+Y\log(MJ).$$

把上式代入 (4.2), 可得

$$K_h^2\ll \frac{M}{J}(M+M^{\frac{57}{62}\gamma}Y^{-\frac{51}{62}}H^{\frac{57}{62}}J^{\frac{119}{62}}+M^{1-\frac{\gamma}{2}}Y^{\frac12}h^{-\frac12}J^{\frac12}+YJ\log(MJ)). \tag{4.4}$$

由 $J\ll M^{\frac{5}{119}}Y^{\frac37}$ 知 $M^{\frac{57}{62}\gamma}Y^{-\frac{51}{62}}H^{\frac{57}{62}}J^{\frac{119}{62}}\ll M^{1+2\eta}$, 因此， (4.4) 可化为

$$K_h^2\ll M^{1+2\eta}J^{-1}(M+M^{1-\frac{\gamma}{2}}Y^{\frac12}h^{-\frac12}J^{\frac12}+YJ).$$

由上式及 (4.1), 得

$$K\ll M^{3\eta}(M^{\frac{471}{238}-\gamma}Y^{-\frac{3}{14}}+M^{\frac{207}{119}-\gamma}Y^{\frac17}+M^{\frac32-\gamma}Y^{\frac12})\ll M^{\frac{471}{238}-\gamma+3\eta}Y^{-\frac{3}{14}}+M^{1-3\eta}.$$

引理 4.2　设 η 为一足够小的正常数，$\frac{3334}{3849}+8\eta \leqslant \gamma < 1$, $1 < M < M_1 \leqslant 2M$, $H = M^{1-\gamma+2\eta}$, $|\varepsilon_h| \leqslant 1$, $|\varphi_m| \leqslant 1$, $|\psi_n| \leqslant 1$, 则当 $M^{\frac{515}{1283}} \leqslant Y \leqslant M^{\frac{768}{1283}}$ 时，有

$$L = \sum_{0<h\leqslant H} \varepsilon_h \sum_{X<m\leqslant 2X} \varphi_m \sum_{\substack{Y<n\leqslant Y_1 \\ M<mn\leqslant M_1}} \psi_n e(h(mn)^\gamma) \ll M^{1-3\eta}.$$

证　如果 $M^{\frac{515}{1283}} < Y \leqslant M^{\frac{1}{2}}$, 设 $F = HM^\gamma$, 在引理 2.7 中取 $(G, M_1, M_2, M_3) = (F, X, H, Y)$, 得

$$\begin{aligned} L &\ll (\log M)^2((F^4X^{15}H^{22}Y^{22})^{\frac{1}{26}} + (FX^2H^3Y^3)^{\frac{1}{4}} + X^{\frac{11}{18}}HY + X(HY)^{\frac{3}{4}} + F^{-\frac{1}{2}}XHY) \\ &\ll (\log M)^2(M^{\frac{89}{52}-\frac{22}{26}\gamma+2\eta} + M^{\frac{13}{8}-\frac{3}{4}\gamma+2\eta} + M^{\frac{65}{36}-\gamma+2\eta} + M^{\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\gamma+\frac{3}{2}\eta}Y^{-\frac{1}{4}} + M^{\frac{3}{2}-\gamma+\eta}) \\ &\ll M^{1-3\eta}. \end{aligned}$$

如果 $M^{\frac{1}{2}} < Y \leqslant M^{\frac{768}{1283}}$, 在引理 2.7 中取 $(G, M_1, M_2, M_3) = (F, Y, H, X)$, 类似的讨论可得 $L \ll M^{1-3\eta}$.

类似于引理 4.2 的讨论，有

引理 4.3　设 η 为一足够小的正常数，$\frac{335}{391}+5\eta \leqslant \gamma < 1$, $1 < M < M_1 \leqslant 2M$, $H = M^{1-\gamma+2\eta}$, $|\varepsilon_h| \leqslant 1$, 则当 $M^{\frac{168}{391}} \leqslant Y \leqslant M^{\frac{223}{391}}$ 时，有

$$\sum_{0<h\leqslant H} \varepsilon_h \sum_{X<m\leqslant 2X} \sum_{\substack{Y<n\leqslant Y_1 \\ M<mn\leqslant M_1}} e(h(mn)^\gamma) \ll M^{1-2\eta}.$$

引理 4.4　设 η 为一足够小的正常数，$\frac{3334}{3849}+8\eta \leqslant \gamma < 1$, $1 < M < M_1 \leqslant 2M$, $H = M^{1-\gamma+2\eta}$, $|\varepsilon_h| \leqslant 1$, $|\varphi_m| \leqslant 1$, $|\psi_n| \leqslant 1$, 则当 $M^{\frac{515}{3849}} \leqslant Y \leqslant M^{\frac{1}{3}}$ 或 $M^{\frac{2}{3}} \leqslant Y \leqslant M^{\frac{3334}{3849}}$ 时，有

$$L = \sum_{0<h\leqslant H} \varepsilon_h \sum_{X<m\leqslant 2X} \varphi_m \sum_{\substack{Y<n\leqslant Y_1 \\ M<mn\leqslant M_1}} \psi_n e(h(mn)^\gamma) \ll M^{1-3\eta}.$$

证　如果 $M^{\frac{515}{3849}} \leqslant Y \leqslant M^{\frac{1}{3}}$, 在引理 2.8 中取 $(y, M_1, M_2, M_3) = (HM^\gamma, Y, H, X)$ 及指数对 $(\kappa, \lambda) = BA^5BA^2BA^2B(0,1) = (\frac{480}{1043}, \frac{528}{1043})$, 得

$$\begin{aligned} L &\ll (\log M)((HY)^{\frac{1}{2}}X + (HM^\gamma)^{\frac{240}{1523}}(HY)^{\frac{1283}{1523}}X^{\frac{2051}{3046}}) \\ &\ll (\log M)(M^{\frac{3}{2}-\frac{\gamma}{2}+\eta}Y^{-\frac{1}{2}} + M^{\frac{5097-2566\gamma+6092\eta}{3046}}Y^{\frac{515}{3046}}) \\ &\ll M^{1-3\eta}. \end{aligned}$$

如果 $M^{\frac{2}{3}} \leqslant Y \leqslant M^{\frac{3334}{3849}}$, 在引理 2.8 中取 $(y, M_1, M_2, M_3) = (HM^\gamma, X, H, Y)$, 类似的讨论可得 $L \ll M^{1-3\eta}$.

5　定理 1.1 的证明

当 $k=2$ 时，利用 $d(n) = \sum_{m_1m_2=n} 1$, 可以将 (3.4) 分拆为 $O(\log^2 M)$ 个和式

$$T = \sum_{0<h\leqslant H} \varepsilon_h \sum_{M_1<m_1\leqslant 2M_1} \sum_{\substack{M_2<m_2\leqslant 2M_2 \\ M<m_1m_2\leqslant M_1}} e(h(m_1m_2)^\gamma).$$

为证明定理 1.1, 只需在条件

$$\frac{335}{391}+5\eta \leqslant \gamma < 1, \quad H = M^{1-\gamma+2\eta} \tag{5.1}$$

下证明 $T \ll M^{1-2\eta}$.

情形 1 如果 $M_2 > M^{\frac{223}{391}}$, 在条件 (5.1) 下，由引理 4.1, 得

$$T \ll M^{\frac{471}{238}-\frac{335}{391}-\frac{3}{14}\times\frac{223}{391}-2\eta} + M^{1-3\eta} \ll M^{1-2\eta}.$$

情形 2 如果 $M^{\frac{168}{391}} \leqslant M_2 \leqslant M^{\frac{223}{391}}$, 在条件 (5.1) 下，由引理 4.3, 得 $T \ll M^{1-2\eta}$.

情形 3 如果 $M_2 < M^{\frac{168}{391}}$, 由 $M \ll M_1M_2 \ll M$ 知 $M_1 \geqslant M^{\frac{223}{391}}$, 在条件 (5.1) 下，由引理 4.1 得 $T \ll M^{1-2\eta}$.

综合情形 1 到情形 3, 即得定理 1.1 的完整证明.

6 定理 1.2 的证明

设 $k \geqslant 3$, 利用 $d_k(n) = \sum\limits_{m_1m_2\cdots m_k=n} 1$, 可以将 (3.4) 分拆为 $O(\log^k M)$ 个和式

$$S = \sum_{0<h\leqslant H} \varepsilon_h \sum_{\substack{M<m_1m_2\cdots m_k\leqslant M_1 \\ M_j<m_j\leqslant 2M_j}} e(h(m_1m_2\cdots m_k)^\gamma),$$

这里 $M_j \geqslant 1,\ j=1,2,\cdots,k$ 且 $M \ll \prod\limits_{j=1}^{k-1} M_j \ll M$. 不妨设 $M_i \leqslant M_{i+1},\ i=1,2,\cdots,k-1$. 我们只需在条件

$$\frac{3334}{3849} + 8\eta \leqslant \gamma < 1, \quad H = M^{1-\gamma+2\eta} \tag{6.1}$$

下证明 $S \ll M^{1-2\eta}$.

情形 1 如果 $M_k > M^{\frac{768}{1283}}$, 设 $m = \prod\limits_{i=1}^{k-1} m_i,\ X = \prod\limits_{i=1}^{k-1} M_i$, 由 $d_{k-1}(m) \ll m^\varepsilon,\ \varepsilon = \frac{\eta}{10}$, 得

$$\begin{aligned} S &\ll \sum_{0<h\leqslant H} \varepsilon_h \sum_{X<m\leqslant 2^{k-1}X} d_{k-1}(m) \sum_{\substack{M_k<m_k\leqslant 2M_k \\ M<mm_k\leqslant M_1}} e(h(mm_k)^\gamma) \\ &\ll M^\varepsilon \sum_{0<h\leqslant H} \varepsilon_h \sum_{X<m\leqslant 2^{k-1}X} b(m) \sum_{\substack{M_k<m_k\leqslant 2M_k \\ M<mm_k\leqslant M_1}} e(h(mm_k)^\gamma), \end{aligned} \tag{6.2}$$

这里 $|b(m)| \leqslant 1$. 在条件 (6.1) 下，由 (6.2) 和引理 4.1, 得

$$S \ll M^{\frac{471}{238}-\frac{3334}{3849}-\frac{3}{14}\times\frac{768}{1283}-5\eta} + M^{1-3\eta} \ll M^{1-2\eta}.$$

情形 2 如果 $M^{\frac{515}{1283}} < M_k \leqslant M^{\frac{768}{1283}}$, 在条件 (6.1) 下，对 (6.2) 利用引理 4.2, 即得 $S \ll M^{1-2\eta}$.

情形 3 如果 $M^{\frac{1}{3}} \leqslant M_{k-j} \leqslant \cdots \leqslant M_k \leqslant M^{\frac{515}{1283}},\ j \geqslant 1$, 设 $X = M_kM_{k-1},\ Y = \prod\limits_{i=1}^{k-2} M_i$, 则 $M^{\frac{2}{3}} \leqslant X \leqslant M^{\frac{1030}{1283}} < M^{\frac{3334}{3849}}$. 由引理 4.4 得

$$S = \sum_{0<h\leqslant H} \varepsilon_h \sum_{X<m\leqslant 2^2X} d(m) \sum_{\substack{Y<n\leqslant 2^{k-2}Y \\ M<mn\leqslant M_1}} d_{k-2}(n) e(h(mn)^\gamma)$$

$$\ll M^{\frac{\eta}{10}} \sum_{0<h\leqslant H} \varepsilon_h \sum_{X<m\leqslant 4X} \varphi_m \sum_{\substack{Y<n\leqslant 2^{k-2}Y \\ M<mn\leqslant M_1}} \psi_n e(h(mn)^\gamma) \ll M^{1-2\eta},$$

这里 $|\varphi_m|\leqslant 1$, $|\psi_n|\leqslant 1$,

情形 4 当 $M_{k-1}<M^{\frac{1}{3}}\leqslant M_k\leqslant M^{\frac{515}{1283}}$ 时，如果 $M^{\frac{515}{3849}}<M_{k-1}<M^{\frac{1}{3}}$, 则由引理 4.4 得 $S\ll M^{1-2\eta}$. 如果 $M_{k-1}\leqslant M^{\frac{515}{3849}}$, $M^{\frac{1}{3}}\leqslant M_k\leqslant M^{\frac{515}{1283}}$, 则 $\prod\limits_{M_j\leqslant M^{\frac{515}{3849}}} M_j \geqslant M^{\frac{768}{1283}}$. 设 p 是满足 $\prod\limits_{M_j\leqslant M^{\frac{515}{3849}}} M_j > M^{\frac{515}{1283}}$ 的正整数 j 的最小值，则有

$$M^{\frac{515}{1283}} < \prod_{i=1}^{p} M_i = \Big(\prod_{i=1}^{p-1} M_i\Big) M_p \leqslant M^{\frac{515}{1283}} M^{\frac{515}{3849}} = M^{\frac{2060}{3849}} < M^{\frac{768}{1283}}.$$

由引理 4.2 得 $S\ll M^{1-2\eta}$.

情形 5 如果 $M^{\frac{515}{3849}}<M_k\leqslant M^{\frac{1}{3}}$, 则由引理 4.4 即得 $S\ll M^{1-2\eta}$. 如果 $M_k\leqslant M^{\frac{515}{3849}}$, 设 p 是满足 $\prod\limits_{i=1}^{p} M_i > M^{\frac{515}{3879}}$ 的最小正整数，则

$$M^{\frac{515}{3849}} < \prod_{i=1}^{p} M_i = \Big(\prod_{i=1}^{p-1} M_i\Big) M_p \leqslant M^{\frac{515}{3849}} M^{\frac{515}{3849}} = M^{\frac{1030}{3849}} < M^{\frac{1}{3}}.$$

利用引理 4.4 得 $S\ll M^{1-2\eta}$.

综合情形 1– 情形 5, 即得定理 1.2 的完整证明.

致谢 作者对审稿人表示衷心感谢.

参 考 文 献

[1] Piatetski-Shapiro I I. On the distribution of prime numbers in sequences of the form $[f(n)]$ [J]. *Math Sb*, 1953, 33:559–566.

[2] Kolesnik G A. On the distribution of prime numbers in sequences of the form $[n^c]$ [J]. *Mat Zametki*, 1972, 2:117–128.

[3] Heath-Brown D R. The Pjateckiĭ-Šapiro prime number theorem [J]. *J Number Theory*, 1983, 16:242–266.

[4] Kolesnik G A. Primes of the form $[n^c]$ [J]. *Pacific J Math*, 1985, 118:437–447.

[5] Liu H Q, Rivat J. On the Piatetski-Shapiro prime number theorem [J]. *Bull London Math Soc*, 1992, 24:143–147.

[6] Rivat J. Autour d'un theoreme de Piatetski-Shapiro [D]. Paris: Université de Paris Sud, 1992.

[7] Rivat J, Sargos P. Nombres premiers de la forme $[n^c]$ [J]. *Canad J Math*, 2001, 53:414–433.

[8] Baker R C, Harman G, Rivat J. Primes of the form $[n^c]$ [J]. *J Number Theory*, 1995, 50:261–277.

[9] Jia C H. On the Piatetski-Shapiro prime number theorem (II) [J]. *Science in China Ser A*, 1993, 36:913–926.

[10] Stux I E. Distribution of squarefree integers in non-linear sequences [J]. *Pacific J Math*, 1975, 59:577–584.

[11] Rieger G J. Remark on a paper of Stux concerning squarefree numbers in non-linear sequences [J]. *Pacific J Math*, 1978, 78:241–242.

[12] Cao Xiaodong, Zhai Wenguang. The distribution of square-free numbers of the form $[n^c]$ [J]. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, 1998, 10:287–299.

[13] Ivić A. The Riemann zeta function [M]. New York: John Wiley & Sons, 1985.

[14] Arkhipov G I, Soliba Kh M, Chubarikov V N. On the sum of values of a multidimensional function of divisors on a sequence of type $[n^c]$ [J]. *Vetnik Moskov Univ Ser I Mat Mekh*, 1999, 2:28–35.

[15] 吕广世, 翟文广. 关于特殊序列上的多维除数函数的和 [J]. 数学进展, 2003, 32(6):660–664.

[16] Phillips E. The zeta-function of Riemann: further developments of van der Corput's method [J]. *Quart J Math*, 1933, 4:209–225.

[17] Sargos P, Wu Jie. Multiple exponential sums with monomials and their applications in number theory [J]. *Acta Math Hungar*, 2000, 87(3):333–354.

[18] Apostol T M. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

The Sum of Multidimensional Divisor Function on a Sequence of Type $[n^c]$

LI Yingjie[1]

[1]College of Information Technology, Shanghai Ocean University, Shanghai 201306, China. E-mail: thelyj@163.com

Abstract Let $[\theta]$ be the integral part of θ and $k \geqslant 2$, $d_k(n)$ denote the divisor function. In this paper it is proved that $\sum\limits_{n\leqslant x} d_k([n^c])$ has an asymptotic formula when $1 < c < \frac{3849}{3334}$, which improves Lü Guangshi and Zhai Wenguang's result $1 < c < \frac{495}{433}$. Moreover, if $k = 2$, then the range of c can be enlarged to $1 < c < \frac{391}{335}$.

Keywords Divisor function, Asymptotic formula, Exponential sum, Exponent pair

2000 MR Subject Classification 11N37, 11L07