数学年刊 A 辑
2017, 38(3):243–256
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2017.0019

Davey-Stewartson 系统粗糙爆破解的极限行为*

杨　晗[1]　朱世辉[2]

提要　研究了 Davey-Stewartson 系统 (简记为 D-S 系统) 粗糙爆破解的动力学性质. 所谓粗糙爆破解即为正则性为 H^s $(s<1)$ 的爆破解, 此时 D-S 系统粗糙解不再满足能量守恒率. 利用 I-方法与 Profile 分解理论, 得到了 D-S 系统粗糙爆破解在 $H^s(\mathbb{R}^2)$ (其中 $s>s_0$, 且 $s_0\leqslant\frac{1+\sqrt{11}}{5}\approx 0.8633$) 中的极限行为, 包括 L^2 强极限的不存在性与 L^2 集中性质以及极限图景.

关键词　Davey-Stewartson 系统, 粗糙爆破解, 极限图景, L^2 质量集中
MR (2000) 主题分类　35Q55, 42J37
中图法分类　O175.29
文献标志码　A
文章编号　1000-8314(2017)03-0243-14

1　引　言

Davey-Stewartson 系统起源于流体力学, 它描述了流体力学中沿一优先方向传播的弱非线性水波的发展演化过程. 在小尺度下, 其可用如下方程组描述 [1]:

$$\begin{cases}\mathrm{i}\psi_t+\psi_{xx}+\mu\psi_{yy}=a|\psi|^2\psi+b\psi\phi_x,\\ c\phi_{xx}+\phi_{yy}=(|\psi|^2)_x,\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 μ,a,b,c 为实常数, $\psi(t,x,y)$ 为复值振幅, $\phi(t,x,y)$ 为实值速度势. 本文主要研究椭圆-椭圆型 D-S 系统, 即方程 (1.1) 中取 $\mu=c=1$, $a=b=-1$.

关于 D-S 系统已有大量的研究 [2]. Ghidaglia 和 Saut[3] 建立了 Cauchy 问题在能量空间 $H^1(\mathbb{R}^2)$ 中的局部适定性. Guo 和 Wang[4] 研究了椭圆-椭圆型 D-S 系统在 $H^s(\mathbb{R}^d)$ (其中 $0<s<2$, 空间维数 $d=2,3$) 中的局部与整体适定性. Wang 和 Guo[5], Hayashi 和 Saut[6] 研究了一类广义 D-S 系统整体解的散射性质. Ohta[7], Cipolatti[8] 在一定条件下研究了驻波的存在性与稳定性. Li 等 [9] 研究了退化 D-S 系统的爆破解. Ghidaglia 和 Saut[3], Shu 和 Zhang[10], Gan 和 Zhang[11], Zhang 和 Zhu[12] 在 $H^1(\mathbb{R}^d)$ (其中 $d=2,3$) 中研究了 D-S 系统爆破解的存在性. Sulem[2], Papanicolaou 等 [13] 讨论了 D-S 系统爆破解的数值观察. Richards[14] 证明了 D-S 系统爆破解在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中的集中性质. Zhu[15] 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中讨论了 D-S 系统爆破解极限行为. Li 等 [16] 研究了 D-S 系统爆破解在 $H^1(\mathbb{R}^d)$ (其中 $d=2,3$) 中的动力学性质. 我们注意到: 方程 (1.1) 爆破解在低正则空间 $H^s:=H^s(\mathbb{R}^2)$ (其中 $0<s<1$) 中的研究却没有.

事实上, 利用 Fourier 变换, 有 $\triangle v=(|u|^2)_x$, 以及 $v_x=\mathcal{F}^{-1}\big[\frac{\xi_1^2}{|\xi|^2}\mathcal{F}|u|^2\big]$, 其中 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^{-1}$ 分别为定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的 Fourier 变换和 Fourier 逆变换 [4]. 因此, 取变换 $E(|u|^2)=$

本文 2015 年 9 月 17 日收到, 2016 年 9 月 21 日收到修改稿.

[1]西南交通大学数学学院, 成都 610031. E-mail: hanyang95@263.net
[2]通讯作者. 四川师范大学数学与软件科学学院, 成都 610066. E-mail: shihuizhumath@163.com

*本文受到国家自然科学基金 (No. 11371267, No. 11501395) 和四川省杰出青年基金 (No. 2014JQ0039) 的资助.

$\mathcal{F}^{-1}\big[\frac{\xi_1^2}{|\xi|^2}\mathcal{F}|u|^2\big]$, 方程 (1.1) 等价于

$$\mathrm{i}u_t + \triangle u + |u|^2 u + E(|u|^2)u = 0, \quad t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^2, \tag{1.2}$$

$$u(0,x) = u_0, \tag{1.3}$$

其中 i 为虚数单位; $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的拉普拉斯算子; $u = u(t,x)$: $[0,T^*) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, 其中 $0 < T^* \leqslant +\infty$; E 为奇异积分算子, 其符号为 $\sigma_1(\xi) = \frac{\xi_1^2}{|\xi|^2}$, $\xi \in \mathbb{R}^2$.

如果在方程 (1.2) 中去掉奇异积分项 $E(|u|^2)u$, 那么, 方程 (1.2) 为经典的立方非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}v_t + \triangle v + |v|^2 v = 0, \quad v = v(t,x) : [0,\tau) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}. \tag{1.4}$$

此方程在非线性光学中有重要的应用, 大量的学者研究了方程 (1.4) 在其自然能量空间及其低正则空间中爆破解的动力学性质 [17−22].

本文首先回顾 Cauchy 问题 (1.2)–(1.3) 在能量空间 $H^1(\mathbb{R}^2)$ 中的结果. 众所周知, 此时方程有如下的二守恒率:

$$\text{质量守恒} \qquad \|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}, \tag{1.5}$$

$$\text{能量守恒} \qquad H(u(t)) = H(u_0), \tag{1.6}$$

其中泛函 $H(u(t)) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(t)|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} |u(t)|^4 + E(|u(t)|^2)|u(t)|^2 \mathrm{d}x$. 考虑方程 (1.2) 的驻波 $u(t,x) = Q(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, 其中 $Q(x) > 0$ 为如下方程的解 [7−8]:

$$-\triangle Q + Q - Q^3 - E(Q^2)Q = 0, \quad Q \in H^1(\mathbb{R}^2). \tag{1.7}$$

Papanicolaou 等 [13] 证明了如下的最佳 Gargliardo-Nirenberg 不等式:

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|u|^4 + E(|u|^2)|u|^2)\mathrm{d}x \leqslant 2\frac{\|u\|_{L^2}^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|Q\|_{L^2}^2},$$

其中 Q 为方程 (1.7) 的基态解. 根据能量守恒律 (1.6) 知: 如果初值条件 $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ 满足 $\|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$, 则 Cauchy 问题 (1.2)–(1.3) 的解整体存在; 如果初值条件 $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ 满足 $\|u_0\|_{L^2} \geqslant \|Q\|_{L^2}$, 则 Cauchy 问题 (1.2)–(1.3) 可能在有限时间 $T^* < +\infty$ 爆破. 此外, 根据方程 (1.2) 的共形变换不变性 [16], $\|Q\|_{L^2}$ 为方程 (1.2) 的临界爆破质量Li 等 [16], Richards[14] 在 $H^1(\mathbb{R}^2)$ 中研究了方程 (1.2) 爆破解的集中性质.

但是, 对于低正则空间 H^s (其中 $0 < s < 1$) 中的 Cauchy 问题 (1.2)–(1.3), 由于能量泛函 $H(u)$ 不再为守恒量, 传统的能量方法失效. 因而, 在此低正则空间 H^s (其中 $0 < s < 1$) 中爆破解动力学性质的结果也就还没有. 本文在低正则空间中研究 Cauchy 问题 (1.2)–(1.3) 的粗糙爆破解是非常有趣和有意义的. 此外, 研究方程 (1.2) 爆破解的另一困难来自于非线性项中含有奇异积分算子 E.

本文首先利用 Colliander 等 [23] 提出的 I-方法, 建立了 Cauchy 问题 (1.2)–(1.3) 的修正局部适定性. 其次, 运用文 [24–25] 中修正能量 $H(I_N u(t))$ 的几乎处处守恒律, 证明了修正能量 $H(I_N u(t))$ 的增长低于修正的动能量 $\|\nabla I_N u(t)\|_{L^2}^2$, 这是在低正则空间中研究粗糙爆破解的关键估计之一. 最后, 将几乎处处守恒律与基态变分特征结合, 我们得到了 Cauchy 问题 (1.2)–(1.3) 粗糙爆破解在低正则空间 $H^s(\mathbb{R}^2)$ (其中 $s > s_0$, $s_0 \leqslant \frac{1+\sqrt{11}}{5}$) 中的一些重要动力学性质, 包括极限图景、质量集中、L^2 强极限的不存在性, 这些性质给出了 Cauchy 问题 (1.2)–(1.3) 粗糙爆破解的精细刻画.

2　预备知识

$A \lesssim B$ 表示满足不等式 $A \leqslant KB$, 其中 K 为常数, S 为 Schwartz 空间, $L^r := L_x^r(\mathbb{R}^2)$ 为通常的 Lebesgue 函数空间, 其中函数 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, 其范数为 $\|f\|_{L_x^r} := (\int_{\mathbb{R}^2} |f|^r \mathrm{d}x)^{\frac{1}{r}}$ 是有限的 (r 可取 $r=+\infty$); 记时-空空间 $L_t^q L_x^r$ 为定义在 $J\times\mathbb{R}^2$ 上的函数空间满足 $\|u\|_{L_{t\in J}^q L_x^r} := (\int_J \|u\|_{L_x^r}^q \mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}} < +\infty$, 其中 q 或 r 均可取到无穷大, 当 $q=r$ 时, 简记 $L_t^q L_x^r$ 为 $L_{t,x}^q$; 记 $k\pm$ 为满足 $k\pm\varepsilon$ 的常数, 其中 $\varepsilon>0$ 为任意小的正数.

定义 Fourier 变换为 $\mathcal{F}f = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x$. 定义分数次微分算子 D^α 为 $\widehat{D^\alpha u}(\xi) := |\xi|^\alpha \widehat{u}(\xi)$, 其中 α 为任意实数, 类似地定义 $\widehat{\langle D\rangle^\alpha u}(\xi) := \langle\xi\rangle^\alpha \widehat{u}(\xi)$, 其中 $\langle a\rangle := \sqrt{1+|a|^2}$. 分别定义齐次 Sobolev 空间 $\dot{H}^s$ 和非齐次 Sobolev 空间 H^s 为 $\|u\|_{\dot{H}^s} = \|D^s u\|_{L^2}$ 和 $\|u\|_{H^s} = \|\langle D\rangle^s u\|_{L^2}$.

定义 2.1[18]　数对 (q,r) 为 $\mathbb{R}^2$ 上的容许对, 当且仅当此数对 (q,r) 满足 $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{2}$, $2\leqslant q,r\leqslant+\infty$.

我们回顾一些已知的 Strichartz 估计 [18].

命题 2.1　令 (q,r) 和 $(\widetilde{q},\widetilde{r})$ 为二容许对. 如果 $u(t,x)$ 满足方程

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t + \triangle u = f(u), \quad (t,x)\in I\times\mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

则

$$\|u\|_{L_t^q L_x^r(I\times\mathbb{R}^2)} \lesssim \|u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^2)} + \|f\|_{L_t^{\widetilde{q}'} L_x^{\widetilde{r}'}(I\times\mathbb{R}^2)}, \tag{2.2}$$

其中 $'$ 表示 Hölder 对偶指数.

同时, 我们需要一些 Littlewood-Paley 分解理论. 特别地, 令 $\varphi(\xi)$ 为支集在 $|\xi|\leqslant 2$ 上的光滑 bump 函数, 其值在 $|\xi|\leqslant 1$ 上恒为 1. 对于每个 $N\in 2^{\mathbb{Z}}$, 定义 Littlewood-Paley 算子

$$\begin{aligned} \widehat{P_{\leqslant N}f}(\xi) &:= \varphi\Big(\frac{\xi}{N}\Big)\widehat{f}(\xi), \\ \widehat{P_{>N}f}(\xi) &:= \Big[1-\varphi\Big(\frac{\xi}{N}\Big)\Big]\widehat{f}(\xi), \\ \widehat{P_N f}(\xi) &:= \Big[\varphi\Big(\frac{\xi}{N}\Big)-\varphi\Big(\frac{2\xi}{N}\Big)\Big]\widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

类似地, 我们定义算子 $P_{<N}, P_{\geqslant N}$ 和 $P_{M<\cdot\leqslant N} := P_{\leqslant N} - P_{\leqslant M}$, 其中 M 和 N 为 dyadic 数. 简记 $P_{\leqslant N}f$ 为 $f_{\leqslant N}$, 其它算子也类似地简记. 回顾如下的 Bernstein 和 Sobolev 型不等式.

引理 2.1　设 $1\leqslant p\leqslant q\leqslant+\infty$ 以及 $s>0$, 有

$$\begin{aligned} &\|P_{\geqslant N}f\|_{L^p} \lesssim N^{-s}\||\nabla|^s P_{\geqslant N}f\|_{L^p}, \\ &\||\nabla|^s P_{\leqslant N}f\|_{L^p} \lesssim N^s\|P_{\leqslant N}f\|_{L^p}, \\ &\||\nabla|^{\pm s} P_N f\|_{L^p} \sim N^{\pm s}\|P_N f\|_{L^p}, \\ &\|P_{\leqslant N}f\|_{L^q} \lesssim N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|P_{\leqslant N}f\|_{L^p}, \\ &\|P_N f\|_{L^q} \lesssim N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|P_N f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

令 $N>1$, 定义 Fourier 乘子 I_N [23] 为 $\widehat{I_N u}(\xi)=m_N(\xi)\widehat{u}(\xi)$, 其中 m_N 光滑径向对称减函数满足

$$m_N(\xi)=\begin{cases}1, & \text{当 } |\xi|\leqslant N \text{ 时},\\ \Big(\dfrac{|\xi|}{N}\Big)^{s-1}, & \text{当 } |\xi|\geqslant 2N \text{ 时}.\end{cases}$$

显然, I_N 为频率空间 $|\xi|\leqslant N$ 上的恒等算子, 而在高频空间上其效果与 $1-s$ 阶的分数次积分算子一致. 特别地, I_N 为从 H^s 到 H^1 的映射, 这使得我们可以将 H^1 理论应用到算子 I_N 的像上. 下面我们收集算子 I_N 的一些性质 [23].

引理 2.2 设 $1<p<+\infty$ 和 $0\leqslant s<1$, 则有

$$\|I_N f\|_{L^p}\lesssim\|f\|_{L^p}, \tag{2.3}$$

$$\||\nabla|^s P_{>N}f\|_{L^p}\lesssim N^{s-1}\|\nabla I_N f\|_{L^p}, \tag{2.4}$$

$$\|f\|_{H^s}\lesssim\|I_N f\|_{H^1}\lesssim N^{1-s}\|f\|_{H^s}. \tag{2.5}$$

定义 Strichartz 范数为

$$\|u\|_{S^0([0,T])}:=\sup_{(q,r)\ \text{admissible}}\|u\|_{L^q_{t\in[0,T]}L^r_x}. \tag{2.6}$$

Bourgain[17] 给出了如下的双线性光滑估计.

引理 2.3 设 $\psi\in L^2(\mathbb{R}^2)$ 满足 $\psi_1=P_{N_j}\psi,\ \psi_2=P_{N_k}\psi$, 则对于 $N_j\leqslant N_k$, 有

$$\|\mathrm{e}^{it\Delta}\psi_1\cdot\mathrm{e}^{it\Delta}\psi_2\|_{L^2_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)}\leqslant C\Big(\frac{N_j}{N_k}\Big)^{\frac12-}\|\psi_1\|_{L^2}\|\psi_2\|_{L^2}. \tag{2.7}$$

记 u 为 Cauchy 问题 (1.2)–(1.3) 定义在 $[0,T_{lwp}]$ 上的解. 令 $u_j=P_{N_j}u$, 其中 $j=1,2$, $N_1>N_2$, 则有

$$\|u_1u_2\|_{L^2_{T_{lwp}}L^2_x}\leqslant C\Big(\frac{N_2}{N_1}\Big)^{\frac12-}\|u\|^2_{S^0([0,T_{lwp}])}. \tag{2.8}$$

如果将 u_j 替换为 $\overline{u}_j$, (2.8) 仍然成立.

利用 Hmidi 和 Keraani[26] 提出的 H^1 空间中有界序列 Profile 分解理论, Richards[14] 得到如下的精细紧性结果.

命题 2.2 设 $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 为 $H^1(\mathbb{R}^2)$ 空间中有界序列且满足

$$\limsup_{n\to+\infty}\|\nabla v_n\|^2_{L^2}\leqslant M^2 \text{ 和 } \limsup_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(|v_n|^4+E(|v_n|^2)|v_n|^2)\mathrm{d}x\geqslant m^4, \tag{2.9}$$

其中 $0<m,\ M<+\infty$. 则存在序列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset\mathbb{R}^2$ 以及 $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 的子序列, 满足

$$v_n(x+x_n)\rightharpoonup V(x)\quad \text{在 } H^1(\mathbb{R}^2) \text{ 中弱收敛}, \tag{2.10}$$

其中 $\|V\|_{L^2}\geqslant\frac{m^2\|Q\|_{L^2}}{M\sqrt2}$, Q 为方程 (1.7) 的基态解.

下面, 我们收集奇异积分算子 E 的性质.

引理 2.4 设奇异积分算子 E 的定义为 $\mathcal{F}[E(\psi)](\xi)=\sigma_1(\xi)\mathcal{F}[\psi](\xi)$, 其中特征函数 $\sigma_1(\xi)=\frac{\xi_1^2}{|\xi|^2}$, $\xi\in\mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 Fourier 变换. 当 $1<p<+\infty$ 时, E 满足如下性质:

(i) $E\in\mathcal{L}(L^p,L^p)$, 其中 $\mathcal{L}(L^p,L^p)$ 表示从 L^p 到 L^p 的有界线性算子.

(ii) 如果 $\psi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, 那么 $E(\psi) \in H^s(\mathbb{R}^2),\ s \in \mathbb{R}$.

(iii) 如果 $\psi \in W^{m,p}$, 那么 $E(\psi) \in W^{m,p}$ 且 $\partial_k E(\psi) = E(\partial_k \psi),\ k = 1, 2$.

(iv) E 满足

- translation: $E(\psi(\cdot + y))(x) = E(\psi)(x+y), \quad y \in \mathbb{R}^2$;
- dilatation: $E(\psi(\lambda \cdot))(x) = E(\psi)(\lambda x),\ \lambda > 0$;
- conjugation: $\overline{E(\psi)} = E(\overline{\psi})$,

其中 $\overline{\psi}$ 为 ψ 的复共轭数.

3 修正的局部适定性

本节给出 Cauchy 问题 (1.2)–(1.3) 在 $H^s(\mathbb{R}^2)$ 中的修正局部适定性.

命题 3.1 令 $0 < s < 1$ 以及 $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$, 则 $u_0 \mapsto u(t,x)$ 为定义在区间 $[0, T_{lwp}]$ 上的映射, 且有

$$T_{lwp} = C_0 \|I_N \langle D \rangle u_0\|_{L^2}^{-\frac{2}{s}}, \tag{3.1}$$

$$\|I_N \langle D \rangle u\|_{S^0([0,T_{lwp}])} \leqslant 2\|I_N \langle D \rangle u_0\|_{L^2}. \tag{3.2}$$

进而, 对任意的 $t \in [0, T_{lwp})$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(t,x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} |u_0|^2 \mathrm{d}x.$$

证 根据标准的适定性理论 [18−19], Cauchy 问题 (1.2)–(1.3) 等价于如下的积分方程:

$$u(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\triangle} u_0 - \mathrm{i} \int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-s)\triangle} (|u|^2 u + E(|u|^2)u)(s) \mathrm{d}s. \tag{3.3}$$

对于给定的 $u(t)$, 记 (3.3) 的右边为 $\Phi_{u_0}[u]$, 只需证明 $\Phi_{u_0}[u]$ 为 $B_{L_T^4 L_x^4} := \{u : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \mid \|u\|_{L_T^4 L_x^4} < \rho\}$ 上的压缩映像, 其中 ρ 足够小. 事实上, 需要证明

$$\|\Phi_{u_0}[u] - \Phi_{u_0}[v]\|_{S^0([0,T])} \leqslant \frac{1}{2} \|u - v\|_{L_T^4 L_x^4},$$

其中 T 是关于 $\|I_N \langle D \rangle u_0\|_{L^2}$ 的, 且足够小. 事实上, 利用 Strichartz 估计 (见命题 2.2), 有

$$\|\Phi_{u_0}[u] - \Phi_{u_0}[v]\|_{S^0([0,T])} \lesssim \||u|^2 u - |v|^2 v\|_{L_T^{\frac{4}{3}} L_x^{\frac{4}{3}}} + \|E(|u|^2)u - E(|v|^2)v\|_{L_T^{\frac{4}{3}} L_x^{\frac{4}{3}}}. \tag{3.4}$$

对于 (3.4) 右端第 1 项, 利用 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned} \||u|^2 u - |v|^2 v\|_{L_T^{\frac{4}{3}} L_x^{\frac{4}{3}}} &\leqslant \||u|^2 u - |u|^2 v\|_{L_T^{\frac{4}{3}} L_x^{\frac{4}{3}}} + \||u|^2 v - |v|^2 v\|_{L_T^{\frac{4}{3}} L_x^{\frac{4}{3}}} \\ &\lesssim (\|u\|_{L_T^4 L_x^4}^2 + \|v\|_{L_T^4 L_x^4}^2) \|u - v\|_{L_T^4 L_x^4}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

对于 (3.4) 右端第 2 项, 利用奇异积分算子 E 的性质, 有

$$\begin{aligned} &\|E(|u|^2)u - E(|v|^2)v\|_{L_T^{\frac{4}{3}} L_x^{\frac{4}{3}}} \\ \leqslant\ &\|E(|u|^2)u - E(|u|^2)v\|_{L_T^{\frac{4}{3}} L_x^{\frac{4}{3}}} + \|E(|u|^2)v - E(|v|^2)v\|_{L_T^{\frac{4}{3}} L_x^{\frac{4}{3}}} \\ \lesssim\ &\|E(|u|^2)\|_{L_T^2 L_x^2} \|u - v\|_{L_T^4 L_x^4} + \|E(|(u+v)(u-v)|)\|_{L_T^2 L_x^2} \|v\|_{L_T^4 L_x^4} \\ \lesssim\ &(\|u\|_{L_T^4 L_x^4}^2 + \|v\|_{L_T^4 L_x^4}^2) \|u - v\|_{L_T^4 L_x^4}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

又由 (3.4)–(3.6), 有

$$\|\Phi_{u_0}[u]-\Phi_{u_0}[v]\|_{S^0([0,T])}\leqslant C(\|u\|^2_{L^4_TL^4_x}+\|v\|^2_{L^4_TL^4_x})\|u-v\|_{L^4_TL^4_x}\leqslant C\rho^2\|u-v\|_{L^4_TL^4_x}. \quad (3.7)$$

因此, 取 $\rho<\rho_0$ (其中 ρ_0 为一个显式常数), 有 $\Phi_{u_0}[u]$ 为球 $B(\rho)$ 上的压缩映射.

进而, 定义 Duhamel 迭代序列 $\{u^j\}_{j=1}^{+\infty}$

$$\begin{cases}u^0(t,x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\triangle}u_0,\\ u^{j+1}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\triangle}u_0-\mathrm{i}\int_0^t\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-s)\triangle}(|u^j|^2u^j+E(|u^j|^2)u^j)(s)\mathrm{d}s,\quad j\geqslant 1.\end{cases}$$

注意到 $\{u^j\}_{j=1}^{+\infty}$ 收敛到方程的解 $u(t,x)$, 只要 $\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\triangle}u_0\|_{L^4_TL^4_x}<\rho_0$. 事实上, 利用 Hölder 不等式以及 Sobolev 不等式, 有

$$\|u\|_{L^4_TL^4_x}\leqslant C\Big(\int_0^T\|\langle D\rangle^su\|^4_{L^r_x}\mathrm{d}t\Big)^{\frac14}\leqslant CT^{\frac14-\frac1q}\|\langle D\rangle^su\|_{L^q_TL^r_x}, \quad (3.8)$$

其中 $q>4$, $\frac2r-\frac12=s$ 以及 (q,r) 为容许对. 此时 $\frac14-\frac1q=\frac s2$. 结合 (3.8) 和 Strichartz 估计, 可得

$$\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\triangle}u_0\|_{L^4_TL^4_x}\leqslant CT^{\frac s2}\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\triangle}\langle D\rangle^su_0\|_{L^q_TL^r_x}\leqslant CT^{\frac s2}\|I_N\langle D\rangle u_0\|_{L^2_x}. \quad (3.9)$$

取 $T=T_{lwp}=C_0\|I_N\langle D\rangle u_0\|_{L^2_x}^{-\frac2s}$ 满足 $T_{lwp}^{\frac s2}\|I_N\langle D\rangle u_0\|_{L^2_x}<\rho_0$, 运用 Strichartz 估计, 有 $\|u^0\|_{S^0([0,T_{lwp}])}\leqslant C\|I_N\langle D\rangle u_0\|_{L^2_x}$. 利用迭代序列的几何收敛性,

$$\|I_Nu\|_{S^0([0,T_{lwp}])}\leqslant\|u\|_{S^0([0,T_{lwp}])}\leqslant C\|I_Nu_0\|_{H^1_x(\mathbb{R}^2)}. \quad (3.10)$$

下面证明方程解正则性的持久性. 对 (3.3) 乘以算子 $\langle D\rangle I_N$, 并利用 Strichartz 估计, 可得

$$\|I_N\langle D\rangle u\|_{S^0([0,T_{lwp}])}\lesssim\|I_N\langle D\rangle u_0\|_{L^2_x}+\|\langle D\rangle I_N(|u|^2u+E(|u|^2)u)\|_{L^{\frac43}_{T_{lwp}}L^{\frac43}_x}.$$

注意到对于所有的 $s>0$, 乘子 $\langle D\rangle I_N$ 是不增的. 利用分数次微分算子的修正 Leibnitz 法则, 对任意的函数 $F\in C^1$, 有 $\|\langle D\rangle I_NF(u)\|_{L^r}\lesssim\|F'(u)\|_{L^p}\|\langle D\rangle I_Nu\|_{L^q}$, 其中 $\frac1r=\frac1p+\frac1q$, $\frac34=\frac12+\frac14$, 进而

$$\|\langle D\rangle I_N|u|^2u\|_{L^{\frac43}_{T_{lwp}}L^{\frac43}_x}\lesssim\||u|^2\|_{L^2_{T_{lwp}}L^2_x}\|\langle D\rangle I_Nu\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x}\lesssim\|u\|^2_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x}\|\langle D\rangle I_Nu\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x},$$

$$\begin{aligned}\|\langle D\rangle I_NE(|u|^2)u\|_{L^{\frac43}_{T_{lwp}}L^{\frac43}_x}&\lesssim[\|E(|u|^2)\|_{L^2_{T_{lwp}}L^2_x}+\|E(|u|)u\|_{L^2_{T_{lwp}}L^2_x}]\|\langle D\rangle I_Nu\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x}\\&\lesssim\|u\|^2_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x}\|\langle D\rangle I_Nu\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x},\end{aligned}$$

这表明

$$\|I_N\langle D\rangle u\|_{S^0([0,T_{lwp}])}\lesssim\|I_N\langle D\rangle u_0\|_{L^2_x}+\|u\|^2_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x}\|\langle D\rangle I_Nu\|_{S^0([0,T_{lwp}])}. \quad (3.11)$$

最后估计 $\|u\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x}$. 根据 I_N 的定义, 有如下的分解 $u=u_{<N}+\sum\limits_{j=1}^{+\infty}u_{k_j}$, 其中 $u_{<N}$ 的空间频率支集为 $\langle\xi\rangle\leqslant N$, u_{k_j} 的支集为 $\langle\xi_j\rangle\sim N_j=2^{k_j}$ (k_j 为从 $[\log N]$ 开始的连续整数, 其指标 $j=1,2,\cdots$). 注意到

$$\|u_{k_j}\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x}\lesssim N_j^{1-s}N^{s-1}\|I_Nu_{k_j}\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x},\quad j=1,2,\cdots. \quad (3.12)$$

利用三角不等式, 有

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x} &\leqslant \|u_{<N}\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x} + \sum_{j=1}^{+\infty}\|u_{k_j}\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x} \\ &= \|I_N u_{<N}\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x} + \sum_{j=1}^{+\infty}\|u_{k_j}\|^{\varepsilon}_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x}\|u_{k_j}\|^{1-\varepsilon}_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

根据 u_{k_j} 的定义, 有

$$\|I_N u_{<N}\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x} \lesssim \|I_N u\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x}, \tag{3.14}$$

$$\|u_{k_j}\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x} \lesssim N_j^{1-s}N^{s-1}\|I_N u_{k_j}\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x}, \quad j=1,2,\cdots \tag{3.15}$$

以及

$$\|u_{k_j}\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x} \lesssim N_j^{-s}N^{s-1}\|\langle D\rangle I_N u_{k_j}\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x}, \quad j=1,2,\cdots. \tag{3.16}$$

结合 (3.12)–(3.16), 有

$$\|u\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x} \lesssim \|I_N u\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x} + \sum_{j=1}^{+\infty} N_j^{-s+\varepsilon}N^{s-1}\|I_N u_{k_j}\|^{\varepsilon}_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x}\|\langle D\rangle I_N u_{k_j}\|^{1-\varepsilon}_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x}.$$

取 N 足够大, 使得 $N^{s-1} \leqslant 1$, 将 Littlewood-Paley 不等式应用到 $\|I_N u_{k_j}\|_{L^p} \lesssim \|I_N u\|_{L^p}$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$, 对于所有的 $s > \varepsilon$, 有

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x} &\lesssim \|I_N u\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x} + \sum_{j=1}^{+\infty} N_j^{-s+\varepsilon}\|I_N u_{k_j}\|^{\varepsilon}_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x}\|\langle D\rangle I_N u_{k_j}\|^{1-\varepsilon}_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x} \\ &\lesssim \|I_N u\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x} + \|I_N u\|^{\varepsilon}_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x}\|\langle D\rangle I_N u\|^{1-\varepsilon}_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

将 (3.17) 应用到 (3.11), 有

$$\begin{aligned}\|I_N\langle D\rangle u\|_{S^0([0,T_{lwp}])} &\lesssim \|I_N\langle D\rangle u_0\|_{L^2_x} + \|I_N\langle D\rangle u\|_{S^0([0,T])}\|I_N u\|^2_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x} \\ &\quad + \|I_N\langle D\rangle u\|^{3-2\varepsilon}_{S^0([0,T])}\|I_N u\|^{2\varepsilon}_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x}. \end{aligned}$$

从而, 由 (3.10) 得 $\|I_N u\|_{L^4_{T_{lwp}}L^4_x} \ll 1$, 其中 T_{lwp} 足够小. 进而, 利用 bootstrap 不等式, 可得 $\|I_N\langle D\rangle u\|_{S^0([0,T_{lwp}])} \lesssim \|I_N\langle D\rangle u_0\|_{L^2_x}$. 证毕.

利用命题 3.1 和它的证明, 我们有如下的推论.

推论 3.1 令 $0 < s < 1$ 和 $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$, 设 $u(t,x)$ 为方程 (1.2) 在区间 $[0,T^*)$ 上的解, 则有

$$\|\langle D\rangle^s u(t)\|_{L^2_x} \geqslant C(T^*-t)^{-\frac{s}{2}}, \tag{3.18}$$

其中 t 足够接近 T^*.

4 粗糙爆破解的极限图景

本节利用修正能量的几乎处处守恒律, 得到 D-S 系统粗糙爆破解在空间 $H^s(\mathbb{R}^2)$ $(0 < s < 1)$ 中的极限图景. 根据 Colliander 等 [23] 的思想, 取 $N = N(T)$ 足够大来控制修正

能量 $H(I_Nu(T))$. 准确地讲, 我们将证明 $H(I_Nu(T))$ 小于修正动能量 $\|I_N\nabla u(T)\|_{L^2}^2$, 其中 s 足够接近于 1. 由命题 2.2 的紧性结果到 $I_Nu(T)$, 可以得到 D-S 系统粗糙爆破解在 $H^s(\mathbb{R}^2)$ 空间中的弱极限图景.

在介绍主要结果之前, 我们需要引进一些记号:

$$\Lambda(t):=\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|u(\tau)\|_{H^s},\quad \Sigma(t)=\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|I_Nu(\tau)\|_{H^1}.$$

利用修正能量的几乎处处守恒律, 我们有如下的命题.

命题 4.1 设初值 $u_0\in H^s$, 其中 $s_0<s<1$. 如果 $u(t,x)$ 是 Cauchy 问题 (1.2)–(1.3) 的爆破解, 其中 $0<T^*<+\infty$ 为爆破时刻, 则存在 $p(s)<2$, 对任意的 $0<T<T^*$ 以及

$$N(T)=C_0\Lambda(T)^{\frac{p(s)}{2(1-s)}},\tag{4.1}$$

使得

$$|H(I_{N(T)}u(T))|\leqslant C\Lambda(T)^{p(s)},\tag{4.2}$$

其中 $C=C(s,T^*,\|u_0\|_{H^s})$, $s_0\leqslant\frac{1+\sqrt{11}}{5}$ 以及 $p(s)=\frac{6+2/s}{-(4+2/s)(1-s)+2-}2(1-s)$.

证 假设 $T<T^*$ 接近 T^*. 令 $N=N(T)$ 以及 $\delta=C_0\Sigma(T)^{-\frac{2}{s}}>0$, 其中 C_0 为 (3.1) 中的确定常数. 注意到 δ 为命题 3.1 中保证局部适定性成立的时间, $\Sigma(T)$ 为修正动能量到达的时刻 T 的最大值. 进而, 可将区间 $[0,T]$ 分解为 $J=C\frac{T}{\delta}$ 个 δ-小区间, 使得在每个小区间上局部适定性一致成立, 即 $[0,T]=\bigcup\limits_{j=1}^{J}I_j,\ I_j=[t_j,t_{j+1}),\ t_0=0,\ t_{j+1}=t_j+\delta$, 且对每个 t_j, 有如下估计:

$$\|\langle D\rangle I_Nu\|_{S^0([t_j,t_{j+1}])}\lesssim\|\langle D\rangle I_Nu\|_{L_x^2}\lesssim\Sigma(T).\tag{4.3}$$

这里需要修正能量 $H(I_Nu(t))$ 的几乎处处守恒律 (见文 [24] 中的命题 3.1).

引理 4.1 令 $u_0\in H^s(\mathbb{R}^2)$, 其中 $\frac14<s\leqslant1$. 设 $u(t,x)$ 为 Cauchy 问题 (1.2)–(1.3) 定义在 $t\in[0,T_{lwp}]$ 上的解, 则

$$\sup_t|H(I_Nu(t))|\leqslant|H(I_Nu(0))|+CN^{-\frac32-}\|I_N\langle D\rangle u(0)\|_{L^2}^4+CN^{-2-}\|I_N\langle D\rangle u(0)\|_{L^2}^6.\tag{4.4}$$

取 δ 足够小, 在每个小区间 I_j 上, 利用修正能量的几乎处处守恒律 (见引理 4.1), 可得

$$\begin{aligned}|H(I_Nu(T))|&\lesssim|H(I_Nu(0))|+\frac{T}{\delta}[N^{-\frac32-}\Sigma(T)^4+N^{-2-}\Sigma(T)^6]\\&\lesssim|H(I_Nu(0))|+\frac{T^*}{C_0\Sigma(T)^{-\frac{2}{s}}}[N^{-\frac32-}\Sigma(T)^4+N^{-2-}\Sigma(T)^6]\\&\lesssim|H(I_Nu(0))|+N^{-\frac32-}\Sigma(T)^{4+\frac2s}+N^{-2-}\Sigma(T)^{6+\frac2s}.\end{aligned}\tag{4.5}$$

又用 Sobolev 不等式和 $\|u\|_{H^s}\lesssim\|I_Nu\|_{H^1}\lesssim N^{1-s}\|u\|_{H^s}$, 有

$$\Sigma(T)\lesssim N^{1-s}\Lambda(T),\tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}|H(I_Nu(0))|&\lesssim\|\nabla I_Nu_0\|_{L^2}^2+\int(|I_Nu_0|^4+E(|I_Nu_0|^2)|I_Nu_0|^2)\mathrm{d}x\\&\lesssim\|\nabla I_Nu_0\|_{L^2}^2+\|I_Nu_0\|_{L^2}^2\|\nabla I_Nu_0\|_{L^2}^2\lesssim N^{2(1-s)}.\end{aligned}\tag{4.7}$$

结合 (4.5)–(4.7), 有

$$|H(I_Nu(T))|\lesssim N^{2(1-s)}+N^{(4+\frac2s)(1-s)-\frac32-}\Lambda^{4+\frac2s}+N^{(6+\frac2s)(1-s)-2-}\Lambda^{6+\frac2s}.$$

化简得

$$|H(I_N u(T))| \lesssim N^{2(1-s)} + N^{(6+\frac{2}{s})(1-s)-2-}\Lambda^{6+\frac{2}{s}}.$$

取 $N^{2(1-s)} = N^{(6+\frac{2}{s})(1-s)-2-}\Lambda(T)^{6+\frac{2}{s}}$, 有

$$N = \Lambda^{\frac{6+\frac{2}{s}}{-(4+\frac{2}{s})(1-s)+2-}}.$$

因此

$$|H(I_N u(T))| \lesssim \Lambda(T)^{p(s)}, \quad p(s) = \frac{6+\frac{2}{s}}{-(4+\frac{2}{s})(1-s)+2-}2(1-s).$$

进而, 由假设 $p(s) < 2$, 有 $10s^2 + (-6+2-)s - 4 > 0$. 因此 $s > s_0$, 其中 $s_0 \leqslant \frac{1+\sqrt{11}}{5}$.

下面, 利用命题 4.1 可以得到 Davey-Stewartson 系统爆破解在 $H^s(\mathbb{R}^2)$ 空间中的弱极限图景.

定理 4.1　令 $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$, 其中 $s > s_0$ 以及 $s_0 \leqslant \frac{1+\sqrt{11}}{5}$. 如果 $u(t,x)$ 是 Cauchy 问题 (1.2)–(1.3) 的爆破解, 且 $0 < T^* < +\infty$ 为其爆破时刻, 那么, 存在 $U \in H^1$, 满足 $\|U\|_{L^2} \geqslant \|Q\|_{L^2}$, 同时存在序列 $\{t_n, \lambda_n, x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$, 满足 $t_n \to T^*$ $(n \to +\infty)$ 以及 $\forall n \geqslant 1$, $\lambda_n \lesssim (T^* - t_n)^{\frac{s}{2}}$, 使得下式成立:

$$\lambda_n u(t_n, \lambda_n x + x_n) \rightharpoonup U(x) \quad \text{在 } H^{\widetilde{s}-}(\mathbb{R}^2) \text{ 中弱收敛}, \tag{4.8}$$

其中 $\widetilde{s} := \frac{s+1/s+1}{-2s+2/s+4}$, Q 为方程 (1.7) 的基态解.

证　取时间序列 $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足 $t_n \to T^*$ $(n \to +\infty)$, 且记 $\|u(t_n)\|_{H^s} = \Lambda(t_n)$. 由 $u(t,x)$ 为 Cauchy 问题 (1.2)–(1.3) 在 H^s 中的爆破解知, 当 $n \to +\infty$ 时, $\Lambda(t_n) \to +\infty$. 令 $U_n(x) := \lambda_n (I_{N(t_n)} u)(t_n, \lambda_n x)$, 其中 $N(t_n)$ 的定义见 (4.1), 此时, 取 $T := t_n$ 以及 $\lambda_n := \frac{\|\nabla Q\|_{L^2}}{\|\nabla I_{N(t_n)} u(t_n)\|_{L^2}}$. 计算可得

$$\begin{cases} \|U_n(x)\|_{L^2} = \|I_{N(t_n)} u(t_n)\|_{L^2} \leqslant \|u(t_n)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}, \\ \|\nabla U_n(x)\|_{L^2} = \lambda_n \|\nabla I_{N(t_n)} u(t_n)\|_{L^2} = \|\nabla Q\|_{L^2}. \end{cases}$$

显然 $U_n(x) \in H_x^1$ 以及 $\{U_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 H_x^1 中有界.

利用推论 3.1, 有

$$\lambda_n \lesssim \frac{1}{\|u(t_n)\|_{H^s}} \lesssim (T^* - t)^{\frac{s}{2}}. \tag{4.9}$$

利用几乎处处守恒律以及 $p(s) < 2$ (当 $s > s_0$ 时), 可得当 $n \to +\infty$ 时,

$$H(U_n) = \lambda_n^2 H(I_{N(t_n)} u(t_n)) \lesssim \lambda_n^2 \Lambda(t_n)^{p(s)} \lesssim \Lambda(t_n)^{p(s)-2} \to 0.$$

结合能量泛函 $H(u)$ 的定义有, 当 $n \to +\infty$ 时,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|U_n|^4 + E(|U_n|^2)|U_n|^2)\mathrm{d}x = 2\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla U_n|^2 \mathrm{d}x \to 2\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla Q|^2 \mathrm{d}x. \tag{4.10}$$

将命题 2.2 应用到序列 $\{U_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 上 (此时, 取 $M = \|\nabla Q\|_{L^2}$ 以及 $m^2 = \sqrt{2}\|\nabla Q\|_{L^2}$), 我们知道: 存在序列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}^2$ 以及 $U \in H^1(\mathbb{R}^2)$, 使得 $\|U\|_{L^2} \geqslant \|Q\|_{L^2}$, 且当 $n \to +\infty$ 时,

$$\lambda_n (I_{N(t_n)} u)(t_n, \lambda_n x + x_n) \rightharpoonup U(x) \quad \text{在 } H_x^1(\mathbb{R}^2) \text{ 中弱收敛}.$$

进而

$$\lambda_n (I_{N(t_n)} u)(t_n, \lambda_n x + x_n) = U(x) + \varepsilon_n(x), \tag{4.11}$$

其中 $\varepsilon_n(x) \rightharpoonup 0$ 弱收敛于 $H^1(\mathbb{R}^2)$. 对任意的 $k<s$, 有

$$\begin{aligned}&\|\lambda_n(I_{N(t_n)}u(t_n)-u(t_n))(\lambda_n x+x_n)\|_{\dot H^k}=\lambda_n^k\|P_{\geqslant N(t_n)}u(t_n)\|_{\dot H^k}\\ \lesssim{}& \lambda_n^k N(t_n)^{k-s}\|P_{\geqslant N(t_n)}u(t_n)\|_{\dot H^s}\lesssim \Lambda(t_n)^{-k}\Lambda(t_n)^{\frac{(k-s)p(s)}{2(1-s)}}\|P_{\geqslant N(t_n)}u(t_n)\|_{H^s}\\ \lesssim{}& \Lambda(t_n)^{1-k+\frac{(k-s)p(s)}{2(1-s)}}.\end{aligned}$$

结合 $p(s)$ 的表达式, 有

$$1-k+\frac{(k-s)p(s)}{2(1-s)}<0\Leftrightarrow k<\widetilde{s}:=\frac{s+1/s+1}{-2s+2/s+4}.$$

因此, 当 $n\to+\infty$ 时,

$$\|\lambda_n(I_{N(t_n)}u(t_n)-u(t_n))(\lambda_n x+x_n)\|_{H^{\widetilde{s}-}}\to 0. \tag{4.12}$$

进而, 结合 (4.11)–(4.12), 有 $\lambda_n u(t_n,\lambda_n x+x_n)=U(x)+h_n(x)$, 其中 $h_n(x)\rightharpoonup 0$ 在 $H^{\widetilde{s}-}$ 中弱收敛 (当 $n\to+\infty$ 时).

定理 4.2 令初值 $u_0\in H^s(\mathbb{R}^2)$, 其中 $s>s_0$ 且 $s_0\leqslant\frac{1+\sqrt{11}}{5}$. 如果 $\|u_0\|_{L^2}=\|Q\|_{L^2}$ 以及 $u(t,x)$ 为 Cauchy 问题 (1.2)–(1.3) 的爆破解, 且 $0<T^*<+\infty$ 为爆破时刻, 那么存在序列 $\{t_n,\gamma_n,\lambda_n,x_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2$, 满足 $t_n\to T^*$ $(n\to+\infty)$ 以及 $\forall n\geqslant 1$, $\lambda_n\lesssim(T^*-t_n)^{\frac{s}{2}}$, 使得下式成立:

$$\lambda_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_n}u(t_n,\lambda_n x+x_n)\to Q(x)\quad \text{在 } H^{\widetilde{s}-}(\mathbb{R}^2) \text{ 中强收敛}, \tag{4.13}$$

其中 $\widetilde{s}:=\frac{s+1/s+1}{-2s+2/s+4}$, Q 为方程 (1.7) 的基态解.

证 令 $U_n(x):=\lambda_n(I_{N(t_n)}u)(t_n,\lambda_n x)$. 借鉴定理 4.1 的证明, 我们知道: 存在 $U(x)\in H^1(\mathbb{R}^2)$ 以及 $x_n\in\mathbb{R}^2$, 使得当 $n\to+\infty$ 时,

$$U_n(x+x_n)\rightharpoonup U(x)\quad \text{在 } L^2(\mathbb{R}^2) \text{ 中弱收敛},$$

其中 $\|U\|_{L^2}\geqslant\|Q\|_{L^2}$. 结合弱收敛的下半连续以及假设 $\|u_0\|_{L^2}=\|Q\|_{L^2}$, 有

$$\|U\|_{L^2}\leqslant\liminf_{n\to+\infty}\|U_n(x+x_n)\|_{L^2}\leqslant\|u_0\|_{L^2}=\|Q\|_{L^2}.$$

因此 $\liminf\limits_{n\to+\infty}\|U_n(x+x_n)\|_{L^2}=\|U\|_{L^2}=\|Q\|_{L^2}$, 以及当 $n\to+\infty$ 时,

$$U_n(x+x_n)\to U(x)\quad \text{在 } L^2(\mathbb{R}^2) \text{ 中强收敛}. \tag{4.14}$$

又由 Gagliardo-Nirenberg 不等式以及 $\{U_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^2)$ 中的有界性知, 当 $n\to+\infty$ 时,

$$\int(|U_n-U|^4+E(|U_n-U|^2)|U_n-U|^2)\mathrm{d}x\leqslant C\|U_n-U\|_{L^2}^2\|\nabla(U_n-U)\|_{L^2}^2\to 0.$$

进而, 当 $n\to+\infty$ 时,

$$\int_{\mathbb{R}^2}(|U_n|^4+E(|U_n|^2)|U_n|^2)\mathrm{d}x\to\int_{\mathbb{R}^2}(|U|^4+E(|U|^2)|U|^2)\mathrm{d}x. \tag{4.15}$$

由 (4.10), (4.15) 以及最佳 Gagliardo-Nirenberg 不等式, 有

$$\|\nabla Q\|_{L^2}^2=\frac12\int_{\mathbb{R}^2}(|U|^4+E(|U|^2)|U|^2)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\|U\|_{L^2}^2\|\nabla U\|_{L^2}^2}{\|Q\|_{L^2}^2}=\|\nabla U\|_{L^2}^2.$$

利用弱收敛的下半连续性知, $\|\nabla U\|_{L^2}\leqslant\liminf\limits_{n\to+\infty}\|\nabla U_n\|_{L^2}=\|\nabla Q\|_{L^2}$. 因此 $\liminf\limits_{n\to+\infty}\|\nabla U_n(x+x_n)\|_{L^2}=\|\nabla U\|_{L^2}=\|\nabla Q\|_{L^2}$, 且当 $n\to+\infty$ 时,

$$U_n(x+x_n)\to U(x)\quad \text{在 } H^1(\mathbb{R}^2) \text{ 中强收敛}$$

以及 $H(U)=0$. 现在, 收集 U 的性质:

$$U\in H^1,\quad \|U\|_{L^2}=\|Q\|_{L^2},\quad \|\nabla U\|_{L^2}=\|\nabla Q\|_{L^2}\quad \text{和}\quad H(U)=0.$$

利用方程 (1.7) 的基态变分特征, 通过重新定义尺度变换可取 $\lambda=1$, 有 $U(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}Q(x+x_0)$, 其中 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma},x_0)\in S^1\times\mathbb{R}^2$, 以及

$$\lambda_n(I_{N(t_n)}u)(t_n,\lambda_nx+x_n)\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}Q(x+x_0)\quad \text{在 } H^1(\mathbb{R}^2) \text{ 中强收敛}. \tag{4.16}$$

结合 (4.12), 有

$$\lambda_nu(t_n,\lambda_nx+x_n)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}Q(x+x_0)+h_n(x), \tag{4.17}$$

其中 $h_n(x)\to 0$ 在 $H^{\widetilde{s}-}$ 中强收敛 (当 $n\to+\infty$ 时). 则定理 4.2 的结论可由 (4.16)–(4.17) 得到.

注 4.1 就我们所知, 方程 (1.7) 的基态解 $Q(x)$ 的唯一性仍然是一个开问题. 事实上, 关于已有的椭圆方程基态解的唯一性完全依赖于解的径向对称假设 (见 [18]), 但是, 对于奇异积分算子 E 是非局部的, 且与旋转变换不可交换, 因此, 不能通过重排假设其极小的径向对称性.

5 粗糙爆破解的 L^2 极限

本节中, 我们首先得到粗糙爆破解在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中强极限的不存在性.

定理 5.1 设初值 $u_0\in H^s(\mathbb{R}^2)$, 其中 $s>s_0$, s_0 的定义见命题 4.1. 如果 $u(t,x)$ 为 Cauchy 问题 (1.2)–(1.3) 定义在区间 $[0,T^*)$ 上的爆破解. 那么对于任何满足如下条件的序列 $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$: 当 $n\to+\infty$ 时, $t_n\to T^*$, 则 $\{u(t_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中没有强极限.

证 采用反证法. 假设存在序列 $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 使得 $t_n\to T^*$ $(n\to+\infty)$, 且 $u(t_n,x)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中存在强极限. 由假设 $u(t,x)$ 为 Cauchy 问题 (1.2)–(1.3) 在 H^s 中的爆破解, 有 $\|u(t_n)\|_{H^s}\to+\infty$ $(n\to+\infty)$. 令 $U(t_n):=I_{N(t_n)}u(t_n)$, 其中 $N(t_n)$ 的定义见 (4.1) (其中 $T:=t_n$). 则

$$\|u(t_n)\|_{H^s}\lesssim\|\nabla I_{N(t_n)}u(t_n)\|_{L^2}=\|\nabla U(t_n)\|_{L^2}\to+\infty\quad \text{当 } n\to+\infty \text{ 时}. \tag{5.1}$$

利用几乎处处守恒律和 Gagliardo-Nirenberg 不等式, $\forall n\neq m$, $s>s_0$, $\exists\, p(s)<2$, $p(s)$ 的定义见命题 4.1, 有

$$\begin{aligned}\|\nabla U(t_n)\|_{L^2}^2&\lesssim 2\|\nabla U(t_n)\|_{L^2}^{p(s)}+\frac12\int_{\mathbb{R}^2}(|U(t_n)|^4+E(|U(t_n)|^2)|U(t_n)|^2)\mathrm{d}x\\&\lesssim 2\|\nabla U(t_n)\|_{L^2}^{p(s)}+\frac12\int_{\mathbb{R}^2}(|U(t_m)|^4+E(|U(t_m)|^2)|U(t_m)|^2)\mathrm{d}x\\&\quad+\frac12\int_{\mathbb{R}^2}(|U(t_n)-U(t_m)|^4+E(|U(t_n)-U(t_m)|^2)|U(t_n)-U(t_m)|^2)\mathrm{d}x\\&\lesssim 2\|\nabla U(t_n)\|_{L^2}^{p(s)}+\frac{\|U(t_n)-U(t_m)\|_{L^2}^2}{\|Q(x)\|_{L^2}^2}(\|\nabla U(t_n)\|_{L^2}+\|\nabla U(t_m)\|_{L^2})^2\\&\quad+\frac{\|U(t_m)\|_{L^2}^2}{\|Q(x)\|_{L^2}^2}\|\nabla U(t_m)\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{5.2}$$

另一方面, 由 $U(t_n)$ 的定义知, 对于足够大的 $m\neq n$,

$$\|U(t_n)-U(t_m)\|_{L^2}^2\lesssim\|u(t_n)-u(t_m)\|_{L^2}^2. \tag{5.3}$$

根据假设: 当 $s>s_0$ 时, 有 $p(s)<2$, 结合 (5.2)–(5.3) 以及质量守恒, 则对于固定的 m,

$$\|\nabla U(t_n)\|_{L^2}^2 \leqslant C\|u(t_n)-u(t_m)\|_{L^2}^2\|\nabla U(t_n)\|_{L^2}^2+C_m, \quad \forall n\geqslant 1, \tag{5.4}$$

其中 C_m 依赖于 m. 又由假设 $u(t_n)$ 在 L^2 中有强极限, 则存在正整数 k, 使得任意的 $n\geqslant k$, $m\geqslant k$, $C\|u(t_n)-u(t_m)\|_{L^2}^2\leqslant \frac{1}{2}$. 因此, 在 (5.4) 中取 $m=k$, 则对任意的 $n\geqslant n_k$,

$$\|\nabla U(t_n)\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{1}{2}\|\nabla U(t_n)\|_{L^2}^2+C_k.$$

上式表明 $\nabla U(t_n)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中有界, 这与 (5.1) 矛盾. 证毕.

下面我们研究 Cauchy 问题 (1.2)–(1.3) 粗糙爆破解的 L^2 极限下界估计.

定理 5.2 令初值 $u_0\in H^s(\mathbb{R}^2)$ 满足 $s>s_0$, 其中 $s_0\leqslant\frac{1+\sqrt{11}}{5}$. 设 $u(t,x)$ 为 Cauchy 问题 (1.2)–(1.3) 的爆破解, $0<T^*<+\infty$ 为爆破时刻, 以及 $a(t)>0$ 为任意满足如下条件的函数: 当 $t\to T^*$ 时, $\frac{(T^*-t)^{\frac{s}{2}}}{a(t)}\to 0$. 则存在 $x(t)\in\mathbb{R}^2$, 使得

$$\liminf_{t\to T^*}\int_{|x-x(t)|\leqslant a(t)}|u(t,x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\int_{\mathbb{R}^2}|Q|^2\mathrm{d}x, \tag{5.5}$$

其中 Q 为方程 (1.7) 的基态解.

证 根据定理 4.1 的证明, 我们知道: 存在 $U\in H^1(\mathbb{R}^2)$, 其中 $\|U\|_{L^2}\geqslant\|Q\|_{L^2}$ 以及存在序列 $\{t_n,\lambda_n,x_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2$, 其中 $t_n\to T^*$ $(n\to+\infty)$, 使得 $\forall n\geqslant 1$, $\frac{\lambda_n}{(T^*-t_n)^{\frac{s}{2}}}\lesssim 1$ $(s>s_0)$, 以及

$$\lambda_n u(t_n,\lambda_n x+x_n)\rightharpoonup U(x) \quad \text{在 } L^2(\mathbb{R}^2) \text{ 中弱收敛, 当 } n\to+\infty \text{ 时}. \tag{5.6}$$

由 (5.6), 对于任意的 $K>0$,

$$\liminf_{n\to+\infty}\lambda_n^2\int_{|x|\leqslant K}|u(t_n,\lambda_n x+x_n)|^2\mathrm{d}x\geqslant\int_{|x|\leqslant K}|U|^2\mathrm{d}x,$$

这表明

$$\liminf_{n\to+\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^2}\int_{|z-y|\leqslant K\lambda_n}|u(t_n,z)|^2\mathrm{d}z\geqslant\int_{|x|\leqslant K}|U|^2\mathrm{d}x. \tag{5.7}$$

又由 $\frac{(T^*-t)^{\frac{s}{2}}}{a(t)}\to 0$ $(t\to T^*)$, 结合 (5.6), 有 $\frac{\lambda_n}{a(t_n)}\to 0$. 因此, 对任意的 $K>0$, 有

$$\liminf_{n\to+\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^2}\int_{|x-y|\leqslant a(t_n)}|u(t_n,x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\int_{|x|\leqslant K}|U|^2\mathrm{d}x.$$

进而

$$\liminf_{t\to T^*}\sup_{y\in\mathbb{R}^2}\int_{|x-y|\leqslant a(t_n)}|u(t_n,x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\int_{\mathbb{R}^2}|U|^2\mathrm{d}x\geqslant\int_{\mathbb{R}^2}|Q|^2\mathrm{d}x.$$

又由 $\forall t\in[0,T)$, 函数 $y\mapsto\int_{|x-y|\leqslant a(t)}|u(t,x)|^2\mathrm{d}x$ 是连续的, 且在无穷远处趋于 0, 则存在 $x(t)\in\mathbb{R}^2$, 使得

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^2}\int_{|x-y|\leqslant a(t)}|u(t,x)|^2\mathrm{d}x=\int_{|x-x(t)|\leqslant a(t)}|u(t,x)|^2\mathrm{d}x.$$

参 考 文 献

[1] Davey A, Stewartson K. On three-dimensional packets of surfaces waves [J]. *Proc R Soc A*, 1974, 338:101–110.

[2] Sulem C, Sulem P L. The nonlinear Schrödinger equation [M]//Self-Focusing and Wave Collapse, Appl Math Sci, vol 139, New York: Springer-Verlag, 1999.

[3] Ghidaglia J M, Saut J C. On the initial value problem for the Davey-Stewartson systems [J]. *Nonlinearity*, 1990, 3:475–506.

[4] Guo B L, Wang B X. The Cauchy problem for Davey-Stewartson systems [J]. *Commun Pure Appl Math*, 1999, 52:1477–1490.

[5] Wang B X, Guo B L. On the initial value problem and scattering of solutions for the generalized Davey-Stewartson systems [J]. *Science in China*, 2001, 44:994–1002.

[6] Hayashi N, Saut J C. Global existence of small solutions to the Davey-Stewartson and the Ishimori systems [J]. *Differential and Integral Equations*, 1995, 8:1657–1675.

[7] Ohta M. Instability of standing waves the generalized Davey-Stewartson systems [J]. *Ann Inst Henri Poincare, Phys Theor*, 1995, 63:69–80.

[8] Cipolatti R. On the instability of ground states for a Davey-Stewartson system [J]. *Ann Inst Henri Poincaré Phys Theor*, 1993, 58:85–104.

[9] Li Y S, Guo B L, Jiang M R. Global existence and blowup of solutions to a degenerate Daver-Stewartson equations [J]. *J Math Phys*, 2000, 41:2943–2956.

[10] Shu J, Zhang J. Sharp conditions of global existence for the generalized Davey-Stewartson system [J]. *IMA J Appl Math*, 2007, 72:36–42.

[11] Gan Z H, Zhang J. Sharp threshold of global existence and instability of standing wave for a Davey-Stewartson system [J]. *Commun Math Phys*, 2008, 283:93–125.

[12] Zhang J, Zhu S H. Sharp blow-up criteria for the Davey-Stewartson system in R^3 [J]. *Dynamics of PDE*, 2011, 8:239–260.

[13] Papanicolaou G C, Sulem C, Sulem P L, Wang X P. The focusing singularity of the Davey-Stewartson equations for gravity-capillary surface waves [J]. *Physica D*, 1994, 72:61–86.

[14] Richards G. Mass concentration for the Davey-Stewartson system [J]. *Differential and Integral Equations*, 2011, 24:261–280.

[15] Zhu S H. Blow-up dynamics of L^2 solutions for the Davey-Stewartson system [J]. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2015, 31:411–429.

[16] Li X G, Zhang J, Lai S Y, Wu Y H. The sharp threshold and limiting profile of blow-up solutions for a Davey-Stewartson system [J]. *J Differential Equations*, 2011, 250:2197–2226.

[17] Bourgain J. Refinements of Strichartz inequality and applications to 2D-NLS with critical nonlinearity [J]. *Internat Math Res Notices*, 1998, 8:253–283.

[18] Cazenave T. Semilinear Schrödinger equations [C]//Courant Lecture Notes in Mathematics, 10, NYU, CIMS, AMS, 2003.

[19] Colliander J, Raynor S, Sulem C, Wright J D. Ground state mass concentration in the L^2-critical nonlinear Schrödinger equation below H^1 [J]. *Math Res Lett*, 2005, 12:357–375.

[20] Hmidi T, Keraani S. Remarks on the blowup for the L^2-critical nonlinear Schrödinger equations [J]. *SIAM J Math Anal*, 2006, 38:1035–1047.

[21] Merle F, Raphaël P. Blow up dynamics and upper bound on the blow up rate for critical nonlinear Schrödinger equation [J]. *Annals of Math*, 2005, 161:157–222.

[22] Weinstein M I. On the structure of singularities in solutions to the nonlinear dispersive evolution equations [J]. *Commun in PDE*, 1986, 11:545–565.

[23] Colliander J, Keel M, Staffilani G, et al. Almost conservation laws and global rough solutions to a nonlinear Schrödinger equation [J]. *Math Res Lett*, 2002, 9:659–682.

[24] Yang H, Fan X M, Zhu S H. Global analysis for rough solutions to the Davey-Stewartson system [J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, 2012:1–23.

[25] Shen C X, Guo B L. Almost conservation law and global rough solutions to a nonlinear Davey-Stewartson equation [J]. *J Math Anal Appl*, 2006, 318:365–379.

[26] Hmidi T, Keraani S. Blowup theory for the critical nonlinear Schrödinger equations revisited [J]. *Internat Math Res Notices*, 2005, 46:2815–2828.

Limiting Behavior of Rough Blow-up Solutions to the Davey-Stewartson System

YANG Han[1] ZHU Shihui[2]

[1]School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China. E-mail: hanyang95@263.net

[2]Corresponding author. Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China. E-mail: shihuizhumath@163.com

Abstract This paper deals with the dynamical properties of the rough blow-up solutions, which are the solutions in the lower regular space H^s with $s < 1$, to Davey-Stewartson system. In this case, there is no conservation of energy. By using the I-method and profile decomposition argument, we obtain the limiting profile, non-existence of L^2 strong limit and L^2 concentration of the rough blow-up solutions in $H^s(\mathbb{R}^2)$ with $s > s_0$, where $s_0 \leqslant \frac{1+\sqrt{11}}{5} \approx 0.8633$.

Keywords Davey-Stewartson system, Rough blow-up solution, Limiting profile, L^2 concentration

2000 MR Subject Classification 35Q55, 42J37

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 38 No. 3, 2017
by ALLERTON PRESS, INC., USA