数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(1):35–42
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0004

相交移动超曲面的亚纯映射的唯一性*

杨 刘[1]

提要 通过讨论亚纯映射相交移动超曲面的重级情况, 进一步得到涉及亚纯映射关于超曲面亏量的唯一性定理.

关键词 亚纯映射, 移动超曲面, 唯一性
MR (2000) 主题分类 32H30, 30D35
中图法分类 O174.56
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)01-0035-8

1 引 言

1975 年, Fujimoto [1] 将著名的 Nevanlinna 五值定理推广至亚纯映射相交超平面的情形. 此后的几十年, 亚纯映射唯一性问题被广泛而深入的研究, 涌现出众多优秀成果 (见 [2–8] 等). 为叙述结论, 首先熟悉一些定义和符号. 用 $\mathcal{M}$ 表示 $\mathbb{C}^m$ 上所有亚纯函数构成的域. $\mathcal{M}[x_0,\cdots,x_n]$ 表示系数在 $\mathcal{M}$ 中的关于 $x_0,\cdots,x_n$ 多项式集合. 设 $Q(\not\equiv 0)\in\mathcal{M}[x_0,\cdots,x_n]$ 是一个齐次多项式, 其零点在射影空间 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中构成的除子即是一个移动超曲面, 仍记为 Q. 记

$$\mathcal{T}_d=\{(i_0,\cdots,i_n)\in\mathbb{N}^{n+1};\ i_0+\cdots+i_n=d\}.$$

设

$$Q=\sum_{(i_0,\cdots,i_n)\in\mathcal{T}_d}a_{i_0\cdots i_n}x_0^{i_0}\cdots x_n^{i_n},$$

如果各亚纯函数 $a_I=a_{i_0\cdots i_n}$ 是一个亚纯映射 f 的小函数, 即 $\|\ T_{a_I}(r)=o(T_f(r))$, 则称 Q 是 (关于 f 的) 一个慢移动超曲面. 本文 " $\|\mathcal{P}$ "表示性质 $\mathcal{P}$ 对除去一个 Lebesgue 测度有限集外的所有 r 成立.

设 $Q_j\ (j=1,\cdots,q)$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的 q 个移动超曲面, 且 $\deg Q_j=d_j\ (j=1,\cdots,q)$, 分别记 $Q_j=\sum\limits_{I\in\mathcal{T}_{d_j}}a_{jI}x_0^{i_0}\cdots x_n^{i_n}\ \ (j=1,\cdots,q)$. 我们称移动超曲面组 $\{Q_j\}_{j=1}^q$ 处于弱一般位置, 如果存在 $z\in\mathbb{C}^m$, 使得各 $a_{jI}\ (I\in\mathcal{T}_{d_j},\ j=1,\cdots,q)$ 在 z 处全纯且对任意 $1\leqslant i_0<\cdots<i_n\leqslant q$, 如下方程组

$$\begin{cases}Q_{i_j}(z)(x_0,\cdots,x_n)=0,\\ 0\leqslant j\leqslant n,\end{cases}$$

本文 2017 年 5 月 31 日收到, 2018 年 3 月 20 日收到修改稿.
[1]安徽工业大学数理科学与工程学院, 安徽 马鞍山 243032. E-mail: yangliu20062006@126.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11701006) 和安徽省自然科学基金 (No. 1808085QA02) 的资助.

在 $\mathbb{C}^m$ 里仅有零解. 我们称移动超曲面组 $\{Q_j\}_{j=1}^q$ 关于 Veronese 嵌入处于一般位置, 如果对任意 $1\leqslant i_0<\cdots<i_n\leqslant q$, $\{Q_{i_j}\}_{j=0}^n$ 在 $\mathcal{M}$ 上线性无关.

亚纯映射相交超曲面的唯一性定理首先由 Dulock 和汝敏获得.

定理 A [5] 设 f 和 g 是两个 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的非代数退化全纯曲线. 设 Q_j $(j=1,\cdots,q)$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中的超曲面, 且处于一般位置. 记 $\deg Q_j=d_j$ $(j=1,\cdots,q)$, d 是 $d_1,\cdots,d_q$ 的最小公倍数, $d_0=\min\{d_1,\cdots,d_q\}$. 如果满足:

(i) $\dim(f^{-1}(Q_i)\cap f^{-1}(Q_j)\leqslant m-2,\quad \forall 1\leqslant i<j\leqslant q.$

(ii) $f(z)=g(z),\quad \forall z\in\bigcup\limits_{j=1}^{q}(f^{-1}(Q_j)\cup g^{-1}(Q_j)).$

(iii) $q>(n+1)+\frac{2d[2^{n-1}(n+1)nd(d+1)]^n}{d_0}+\frac{1}{2},$

则 $f=g$.

最近, Quang 和 Phuong 获得如下唯一性定理.

定理 B [9] 设 f 和 g 是 $\mathbb{C}^m$ 到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的两个非常值亚纯映射. 设 Q_j $(j=1,\cdots,q)$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中 (关于 f 和 g) 的 慢移动超曲面, 且处于弱一般位置. 记 $\deg Q_j=d_j$ $(j=1,\cdots,q)$, d 是 $d_1,\cdots,d_q$ 的最小公倍数, $N=\binom{n+d}{n}-1$. 如果还有

(i) $\dim(f^{-1}(Q_i)\cap f^{-1}(Q_j))\leqslant m-2,\quad \forall 1\leqslant i<j\leqslant q.$

(ii) $f(z)=g(z),\quad \forall z\in\bigcup\limits_{j=1}^{q}(f^{-1}(Q_j)\cup g^{-1}(Q_j)),$

则分别有下面结论成立:

(a) 若 $q>\frac{2N(N+2)}{d}+(n-1)(N+1)$, 则 $f=g$;

(b) 若 $q>\frac{2N(N+2)}{d}+n-1$, 还有 $\{Q_j\}_{j=1}^q$ 关于 Veronese 嵌入处于一般位置, 则 $f=g$.

受文 [10] 启发, 在上述结论基础上, 进一步得到如下涉及亚纯映射相交超曲面亏量的唯一性定理. 相关概念见下面第 2 小节.

定理 1.1 设 f 和 g 是 $\mathbb{C}^m$ 到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的两个非常值亚纯映射. 设 Q_j $(j=1,\cdots,q)$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中 (关于 f 和 g) 的 慢移动超曲面, 且处于弱一般位置. m_j $(j=1,\cdots,q)$ 是正整数或 ∞. 记 $m_0=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant q}m_j$, $\deg Q_j=d_j$ $(j=1,\cdots,q)$, d 是 $d_1,\cdots,d_q$ 的最小公倍数, $N=\binom{n+d}{n}-1$. 如果满足:

(i) $\dim(f^{-1}(Q_i)\cap f^{-1}(Q_j))\leqslant m-2,\quad \forall 1\leqslant i<j\leqslant q.$

(ii) $f(z)=g(z),\quad \forall z\in\bigcup\limits_{j=1}^{q}\{z\in\mathbb{C}^m;\ 0<v_{Q_j(f)}\leqslant m_j\ \text{ 或 } 0<v_{Q_j(g)}\leqslant m_j\},$

则分别有下面结论成立:

(a) 若 $\frac{q-(n-1)(N+1)}{N(N+2)}d+\frac{2N}{m_0+1}-d\sum\limits_{j=1}^{q}\frac{1-\min\left\{\delta_f(Q_j^{\frac{d}{d_j}}),\delta_g(Q_j^{\frac{d}{d_j}})\right\}}{m_j+1}>2$, 则 $f=g$;

(b) 若 $\frac{q-n+1}{N(N+2)}d+\frac{2N}{m_0+1}-d\sum\limits_{j=1}^{q}\frac{1-\min\left\{\delta_f(Q_j^{\frac{d}{d_j}}),\delta_g(Q_j^{\frac{d}{d_j}})\right\}}{m_j+1}>2$, 还有 $\{Q_j\}_{j=1}^q$ 关于 Veronese 嵌入处于一般位置, 则 $f=g$.

当 $m_j=\infty$ $(j=1,\cdots,q)$ 时, 上面定理即为定理 B. 而且作为推论, 我们直接得到下面的定理.

定理 1.2 设 f 和 g 是 $\mathbb{C}^m$ 到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的两个非常值亚纯映射. 设 Q_j $(j=1,\cdots,q)$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中 (关于 f 和 g) 的慢移动超曲面, 且处于弱一般位置. m_j $(j=1,\cdots,q)$ 是正整数或 ∞. 记 $m_0=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant q} m_j$, $\deg Q_j=d_j$ $(j=1,\cdots,q)$, d 是 $d_1,\cdots,d_q$ 的最小公倍数, $N=\binom{n+d}{n}-1$. 如果满足:

(i) $\dim(f^{-1}(Q_i)\cap f^{-1}(Q_j))\leqslant m-2$, $\forall 1\leqslant i<j\leqslant q$.

(ii) $f(z)=g(z)$, $\forall z\in\bigcup\limits_{j=1}^{q}\{z\in\mathbb{C}^m;\ 0<v_{Q_j(f)}\leqslant m_j$ 或 $0<v_{Q_j(g)}\leqslant m_j\}$,

则分别有下面结论成立:

(a) 若 $\frac{q-(n-1)(N+1)}{N(N+2)}d+\frac{2N}{m_0+1}-d\sum\limits_{j=1}^{q}\frac{1}{m_j+1}>2$, 则 $f=g$;

(b) 若 $\frac{q-n+1}{N(N+2)}d+\frac{2N}{m_0+1}-d\sum\limits_{j=1}^{q}\frac{1}{m_j+1}>2$, 还有 $\{Q_j\}_{j=1}^q$ 关于 Veronese 嵌入处于一般位置, 则 $f=g$.

2 预备知识

我们简述一些相关事实, 详细内容可参考文 [11–12]. 对 $z=(z_1,\cdots,z_m)\in\mathbb{C}^m$, 令 $\|z\|=(|z_1|^2+\cdots+|z_m|^2)^{\frac{1}{2}}$, 分别定义

$$B(r)=\{z\in\mathbb{C}^m;\|z\|<r\},\quad S(r)=\{z\in\mathbb{C}^m;\|z\|=r\},$$

其中 $r>0$. 分别记微分算子

$$\partial:=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial z_j}\mathrm{d}z_j,\quad \overline{\partial}:=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}\mathrm{d}\overline{z_j},$$

及

$$\mathrm{d}:=\partial+\overline{\partial},\quad \mathrm{d}^c:=\frac{\partial-\overline{\partial}}{4\pi\sqrt{-1}},$$

因此, 有

$$\mathrm{dd}^c=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}.$$

记 $\sigma_m=\mathrm{d}^c\log\|z\|^2\wedge(\mathrm{dd}^c\log\|z\|^2)^{m-1}$.

设 ν 是 $\mathbb{C}^m$ 上的一个除子, 定义

$$N(r,\nu)=\int_1^r\frac{n(t)}{t^{2m-1}}\mathrm{d}t,\quad 1<r<\infty,$$

其中

$$n(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\mathrm{Supp}(\nu)\cap B(t)}\nu(z)\sigma_m, & \text{当 } m\geqslant 2 \text{ 时;}\\ \displaystyle\sum_{|z|\leqslant t}\nu(z), & \text{当 } m=1 \text{ 时,}\end{cases}$$

设 k, M 均是正整数或 ∞, 回顾 $\nu^{(M)}(z)=\min\{\nu(z),\ M\}$ 及进一步定义

$$\nu_{k)}{}^{(M)}(z) \ = \ \begin{cases}0, & \text{当 } \nu(z)>k \text{ 时;}\\ \nu^{(M)}(z), & \text{当 } \nu(z)\leqslant k \text{ 时,}\end{cases}$$

及

$$\nu_{(k}{}^{(M)}(z) \ = \ \begin{cases}0, & \text{当 } \nu(z)<k \text{ 时;}\\ \nu^{(M)}(z), & \text{当 } \nu(z)\geqslant k \text{ 时,}\end{cases}$$

则可类似定义 $\nu^{(M)}(t), \nu_{k)}{}^{(M)}(t), \nu_{(k}{}^{(M)}(t)$ 以及 $N(r,\nu^{(M)}), N(r,\nu_{k)}{}^{(M)}), N(r,\nu_{(k}{}^{(M)})$.

设 f 是 $\mathbb{C}^m$ 到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的一个亚纯映射, $(w_0:\cdots:w_n)$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的齐次坐标, 则可以取 $\mathbb{C}^m$ 上的全纯函数 $f_0,\cdots,f_n$, 使得 不定点集 $I_f=\{z\in\mathbb{C}^m; f_0(z)=\cdots=f_n(z)=0\}$ 的维数不超过 $m-2$, 且在 $\mathbb{C}^m\backslash I_f$ 上, 有 $f(z)=\mathbb{P}^n((f_0(z),\cdots,f_n(z)))$. 称这样的 $(f_0:\cdots:f_n)$ 是 f 的一个既约表示. 记 $\|f(z)\|=[|f_0(z)|^2+\cdots+|f_n(z)|^2]^{\frac{1}{2}}$, 定义 f 的特征函数为

$$T_f(r)=\int_{S(r)}\log\|f(z)\|\sigma_m-\int_{S(1)}\log\|f(z)\|\sigma_m,\quad 1<r<\infty.$$

可以验证特征函数 $T_f(r)$ 的定义与 f 既约表示的选取无关.

设 $\varphi(\not\equiv 0)$ 是 $\mathbb{C}^m$ 上的一个全纯函数, 对任意 $a\in\mathbb{C}^m$, 可以写作 $\varphi=\sum\limits_{i=0}^{\infty}P_i(z-a)$, 其中或者 $P_i\equiv 0$, 或者 P_i 是 i 次齐次多项式. φ 在 a 处的重级定义为

$$v_\varphi(a)=\min\{i;\ P_i\not\equiv 0\}.$$

设 Q 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的一个移动超曲面, $\deg Q=d$, $Q=\sum\limits_{I\in\mathcal{T}_d}a_Ix_0^{i_0}\cdots x_n^{i_n}$. 记

$$Q(f)=\sum_{I\in\mathcal{T}_d}a_If_0^{i_0}\cdots f_n^{i_n},$$

并定义 f 相交 Q 的除子为 $f^*(Q)=v_{Q(f)}$. 定义 $N_f(r,Q):=N(r,v_{Q(f)})$. 类似地可以定义 $N_{f,k)}(r,Q), N_{f,(k}(r,Q)$. 定义

$$\delta_f(Q):=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N_f(r,Q)}{d\ T_f(r)}.$$

由第一基本定理, 有 $0\leqslant\delta_f(Q)\leqslant 1$. 若 $\delta_f(Q)>0$, 则称 Q 是一个 deficient 超曲面.

定理的证明还需要下面的第二基本定理.

引理 2.1 [9] 设 f 是 $\mathbb{C}^m$ 到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的一个亚纯映射. 设 Q_j $(j=1,\cdots,q)$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的移动超曲面, 且处于弱一般位置, $Q_j(f)\not\equiv 0$ $(j=1,\cdots,q)$. 记 $\deg Q_j=d_j$ $(j=1,\cdots,q)$, d 是 $d_1,\cdots,d_q$ 的最小公倍数, $N=\binom{n+d}{n}-1$, 则分别有下面结论成立:

(a) 若 $q\geqslant nN+n+1$, 则

$$\Big\|\ \frac{q-(n-1)(N+1)}{N+2}T_f(r)\leqslant\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{d_j}N_f^{(N)}(r,Q_j)+o(T_f(r))+O\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant q}T_{Q_j}(r)\Big),$$

其中 “ $\|$ ”表示该不等式对除去一个 Lebesgue 测度有限集外的所有 r 成立;

(b) 若 $q \geqslant N+n+1$, 还有 $\{Q_j\}_{j=1}^{q}$ 关于 Veronese 嵌入处于一般位置, 则

$$\Big\| \ \frac{q-n+1}{N+2}T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q}\frac{1}{d_j}N_f^{(N)}(r,Q_j)+o(T_f(r))+O\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant q}T_{Q_j}(r)\Big).$$

3　定理的证明

定理 1.1 (a) 的证明 分别取定 f,g 的既约表示 $f=(f_0:\cdots:f_n),\ g=(g_0:\cdots:g_n)$. 假设 $f\neq g$, 则存在 $s,t\in\{0,1,\cdots,n\}$, 使得

$$H:=f_sg_t-f_tg_s\not\equiv 0.$$

一方面, 由 Jensen 公式, 有

$$\begin{aligned}N_H(r)&=\int_{S(r)}\log|f_sg_t-f_tg_s|\sigma_m\\&\leqslant\int_{S(r)}\log\|f\|\sigma_m+\int_{S(r)}\log\|g\|\sigma_m\\&=T_f(r)+T_g(r).\end{aligned}$$

另一方面, 由定理条件 (ii) 知, 集合 $\bigcup\limits_{j=1}^{q}\{z\in\mathbb{C}^m;\ 0<v_{Q_j(f)}\leqslant m_j, 或\ 0<v_{Q_j(g)}\leqslant m_j\}$ 中的点均是 H 的零点, 再由条件 (i) , 有

$$N_H(r)\geqslant\sum_{j=1}^{q}N^{(1)}_{f,m_j)}(r,Q_j),$$

及

$$N_H(r)\geqslant\sum_{j=1}^{q}N^{(1)}_{g,m_j)}(r,Q_j).$$

故

$$N_H(r)\geqslant\frac12\Big(\sum_{j=1}^{q}N^{(1)}_{f,m_j)}(r,Q_j)+\sum_{j=1}^{q}N^{(1)}_{g,m_j)}(r,Q_j)\Big).$$

注意到

$$N^{(1)}_{f,m_j)}(r,Q_j)\geqslant N^{(1)}_{f,m_j)}(r,{Q_j}^{\frac{d}{d_j}})\geqslant\frac1N N^{(N)}_{f,m_j)}(r,{Q_j}^{\frac{d}{d_j}}).$$

对 g 也有类似的结论, 故

$$N_H(r)\geqslant\frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{q}\Big(N^{(N)}_{f,m_j)}(r,{Q_j}^{\frac{d}{d_j}})+N^{(N)}_{g,m_j)}(r,{Q_j}^{\frac{d}{d_j}})\Big),$$

从而

$$T_f(r)+T_g(r)\geqslant\frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{q}\Big(N^{(N)}_{f,m_j)}\big(r,{Q_j}^{\frac{d}{d_j}}\big)+N^{(N)}_{g,m_j)}\big(r,{Q_j}^{\frac{d}{d_j}}\big)\Big).\tag{3.1}$$

现对 f 和 $Q_j^{\frac{d}{d_j}}$ 利用引理 2.1 (a), 得到

$$\begin{aligned}&\Big\| \ \frac{q-(n-1)(N+1)}{N+2}dT_f(r)-o(T_f(r))\\ \leqslant&\sum_{j=1}^{q}N_f^{(N)}(r,Q_j^{\frac{d}{d_j}})\\ \leqslant&\sum_{j=1}^{q}\Big(N_{f,m_j)}^{(N)}(r,Q_j^{\frac{d}{d_j}})+N_{f,(m_j+1}^{(N)}(r,Q_j^{\frac{d}{d_j}})\Big)\\ \leqslant&\sum_{j=1}^{q}\Big(N_{f,m_j)}^{(N)}(r,Q_j^{\frac{d}{d_j}})+\frac{N}{m_j+1}N_{f,(m_j+1}(r,Q_j^{\frac{d}{d_j}})\Big).\end{aligned}$$

而

$$N_{f,(m_j+1}^{(N)}(r,Q_j^{\frac{d}{d_j}})=N_f(r,Q_j^{\frac{d}{d_j}})-N_{f,m_j)}(r,Q_j^{\frac{d}{d_j}}),$$

故

$$\begin{aligned}&\Big\| \ \frac{q-(n-1)(N+1)}{N+2}dT_f(r)-o(T_f(r))\\ \leqslant&\sum_{j=1}^{q}\Big(\Big(1-\frac{N}{m_j+1}\Big)N_{f,m_j)}^{(N)}(r,Q_j^{\frac{d}{d_j}})+\frac{N}{m_j+1}N_f(r,Q_j^{\frac{d}{d_j}})\Big).\end{aligned}$$

注意条件

$$\frac{q-(n-1)(N+1)}{N(N+2)}d+\frac{2N}{m_0+1}-d\sum_{j=1}^{q}\frac{1-\min\big\{\delta_f(Q_j^{\frac{d}{d_j}}),\delta_g(Q_j^{\frac{d}{d_j}})\big\}}{m_j+1}>2,$$

取 $\varepsilon_0>0$ 且满足

$$\frac{q-(n-1)(N+1)}{N(N+2)}d+\frac{2N}{m_0+1}-d\sum_{j=1}^{q}\frac{1-\min\big\{\delta_f(Q_j^{\frac{d}{d_j}}),\delta_g(Q_j^{\frac{d}{d_j}})\big\}+\varepsilon_0}{m_j+1}>2.$$

由 $\delta_f(Q_j^{\frac{d}{d_j}})$ 的定义, 当 r 充分大后

$$N_f(r,Q_j^{\frac{d}{d_j}})\leqslant d\big(1-\delta_f(Q_j^{\frac{d}{d_j}})+\varepsilon_0)T_f(r)$$

成立. 所以

$$\begin{aligned}&\Big\| \ \Big[\frac{q-(n-1)(N+1)}{N+2}d-d\sum_{j=1}^{q}\frac{N}{m_j+1}\big(1-\delta_f(Q_j^{\frac{d}{d_j}})+\varepsilon_0\big)\Big]T_f(r)\\ \leqslant&\sum_{j=1}^{q}\Big(1-\frac{N}{m_j+1}\Big)N_{f,m_j)}^{(N)}(r,Q_j^{\frac{d}{d_j}})+o(T_f(r))\\ \leqslant&\Big(1-\frac{N}{m_0+1}\Big)\sum_{j=1}^{q}N_{f,m_j)}^{(N)}(r,Q_j^{\frac{d}{d_j}})+o(T_f(r)).\end{aligned}$$

对 g 也有类似的结论, 故

$$\Big\| \Big[\frac{q-(n-1)(N+1)}{N(N+2)}d-d\sum_{j=1}^{q}\frac{1-\min\{\delta_f(Q_j^{\frac{d}{d_j}}),\delta_g(Q_j^{\frac{d}{d_j}})\}+\varepsilon_0}{m_j+1}\Big](T_f(r)+T_g(r))$$

$$\leqslant \frac{1}{N}\Big(1-\frac{N}{m_0+1}\Big)\sum_{j=1}^{q}\Big(N^{(N)}_{f,m_j)}(r,Q_j^{\frac{d}{d_j}})+N^{(N)}_{g,m_j)}(r,Q_j^{\frac{d}{d_j}})\Big)+o(T_f(r)+T_g(r)).$$

利用上式及 (3.1), 有

$$\Big\|\Big[\frac{q-(n-1)(N+1)}{N(N+2)}d-d\sum_{j=1}^{q}\frac{1-\min\{\delta_f(Q_j^{\frac{d}{d_j}}),\delta_g(Q_j^{\frac{d}{d_j}})\}+\varepsilon_0}{m_j+1}\Big](T_f(r)+T_g(r))$$

$$\leqslant 2\Big(1-\frac{N}{m_0+1}\Big)(T_f(r)+T_g(r))+o(T_f(r)+T_g(r)).$$

这与

$$\frac{q-(n-1)(N+1)}{N(N+2)}d+\frac{2N}{m_0+1}-d\sum_{j=1}^{q}\frac{1-\min\{\delta_f(Q_j^{\frac{d}{d_j}}),\delta_g(Q_j^{\frac{d}{d_j}})\}+\varepsilon_0}{m_j+1}>2$$

矛盾. 所以 $f=g$.

注 3.1　注意到若 $\{Q_j\}_{j=1}^q$ 关于 Veronese 嵌入处于一般位置, 利用引理 2.1 (b), 将上述证明过程中的 $\frac{q-(n-1)(N+1)}{N(N+2)}$ 改作 $\frac{q-n+1}{N(N+2)}$, 即得定理 1.1 (b).

参　考　文　献

[1] Fujimoto H. The uniqueness problem of meromorphic maps into the complex projective spaces [J]. *Nagoya Math J,* 1975, 58:1–23.

[2] Chen Z H, Ru M, Yan Q M. Schmidt's subspace theorem with moving hypersurfaces [J]. *Int Math Res Not*, 2015, 15:6305–6329.

[3] Chen Z H, Ru M, Yan Q M. The degenerated second main theorem and Schmidt's subspace theorem [J]. *Sci China Math,* 2012, 55:1367–1380.

[4] Chen Z H, Yan Q M. Uniqueness theorem of meromorphic mappings into $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ sharing $2N+3$ hyperplanes regardless of multiplicities [J]. *Internat J Math,* 2009, 20:717–726.

[5] Dulock M, Ru M. A uniqueness theorem for holomorphic curves sharing hypersurfaces [J]. *Complex Var Elliptic Equ,* 2008, 53:792–802.

[6] Quang S D, Quynh L N. Two meromorphic mappings sharing $2n+2$ hyperplanes regardless of multiplicity [J]. *J Math Anal Appl,* 2014, 410:771–782.

[7] Tu Z H, Wang Z H. Uniqueness problem for meromorphic mappings in several complex variables into $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ with truncated multiplicities [J]. *Acta Math Sci Ser B Engl Ed,* 2013, 33:122–130.

[8] Yang C C, Yi H X. Uniqueness theory of meromorphic functions [M]. Beijing: Scinece Press, Kluwer Academic Publishers, 1995.

[9] Quang S D, An D P. Second main theorems for meromorphic mappings with moving hypersurfaces and a uniqueness problem [J]. *Comput Methods Funct Theory,* 2017, 17(3):445–461.

[10] Aihara Y. Unicity theorems for meromrohic mappings with deficiencies [J]. *Complex Var*, 2000, 42:259–268.

[11] Ru M. Nevanlinna theory and its relation to Diophantine approximation [M]. Singapore: World Scientific, 2001.

[12] Shabat B V. Distribution of value of holomorphic mappings [M]. Providence: American Mathematical Society, 1980.

Unicity for Meromrohic Mappings Intersecting Moving Hypersurfaces

YANG Liu[1]

[1]School of Mathematics & Physics Science and Engineering, Anhui University of Technology, Ma'anshan, 243032, Anhui, China.
E-mail: yangliu20062006@126.com

Abstract Under the additional conditions on Nevanlinna's deficiencies, the author gives unicity theorems for meromorphic mappings from the complex m-space into complex projective spaces with hypersurfaces as divisors.

Keywords Meromrohic mappings, Moving hypersurfaces, Uniqueness theorem
2000 MR Subject Classification 32H30, 30D35

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 1, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA