数 学 年 刊 A 辑
2018, 39(4):341–348
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2018.0029

亚纯函数与其差分的唯一性*

邓炳茂[1] 刘 丹[1] 方明亮[2]

提要 研究了亚纯函数与其差分算子分担多项式的唯一性问题, 证明了: 设 f 是一个有穷级非常数亚纯函数, $p(z)(\not\equiv 0)$ 是一个多项式. 如果 $f, \Delta_c f$ 与 $\Delta_c^2 f$ CM 分担 ∞, $p(z)$, 则 $f \equiv \Delta_c f$ 或 $f(z) = \mathrm{e}^{Az+B} + b$, 其中 $p(z) \equiv b \neq 0$, $A \neq 0$ 满足 $\mathrm{e}^{Ac} = 1$. 本文结果是对 Chang, Fang(Chang J M, Fang M L. Uniqueness of entire functions and fixed points [J]. *Kodai Math J*, 2002, 25(1): 309–320.) 结果的差分模拟, 并且完整回答了 Chen, Chen(Chen B Q, Chen Z X, Li S. Uniqueness theorems on entire functions and their difference operators or shifts [J]. *Abstr Appl Anal*, 2012, Art. ID 906893, 8 pp.) 的问题.

关键词 分担多项式, 唯一性, 差分算子
MR (2000) 主题分类 30D35, 39B32
中图法分类 O174.52
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2018)04-0341-8

1 引 言

在本文中, 假设读者熟知 Nevanlinna 值分布理论的相关基础知识及常见符号[1−2]. 特别地, $\rho(f)$ 表示函数 f 的增长级, $S(f)$ 表示由 f 的小函数所构成的集合.

设 $f(z)$ 是复平面上的亚纯函数, 定义其平移为 $f_c(z) = f(z+c)$, 其差分算子定义为

$$\Delta_c f(z) = f(z+c) - f(z), \quad \Delta_c^n f(z) = \Delta_c^{n-1}(\Delta_c f(z)).$$

设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 是复平面上两个亚纯函数, $p(z)$ 是一个多项式. 如果 $f(z) - p(z)$ 与 $g(z) - p(z)$ 具有相同的零点 (计重数) , 则称 $f(z)$ 与 $g(z)$ CM 分担 $p(z)$.

1986 年, Jank 等人[3]证明了下面的定理.

定理 1.1 设 f 是一个亚纯函数, a 是一个非零常数. 如果 f, f' 与 f'' CM 分担 a, 则 $f \equiv f'$.

2002 年, Chang and Fang[4]考虑了 f, f' 与 f'' 分担 z 的情形, 他们证明了下面的定理.

定理 1.2 设 f 是一个整函数. 如果 f, f' 与 f'' CM 分担 z, 则 $f \equiv f'$.

近年来, 亚纯函数值分布的差分模拟成为一个研究的热门问题[5−8]. 在 2012 年, Chen 等人[7]考虑了定理 1.1 的差分模拟问题, 并证明了下面的定理.

本文 2017 年 3 月 24 日收到, 2017 年 12 月 10 日收到修改稿.

[1]华南农业大学应用数学研究所, 广州 510642. E-mail: dbmao2012@163.com; liudan@scau.edu.cn

[2]通信作者. 华南农业大学应用数学研究所, 广州 510642. E-mail: mlfang@scau.edu.cn

*本文受到国家自然科学基金 (No. 11371149, No. 11701188) 和华南农业大学博士研究生境外联合培养项目 (No. 2017LHPY003) 的资助.

定理 1.3 设 f 是一个有穷级非常数整函数, $a(z)(\not\equiv 0) \in S(f)$ 是一个周期为 c 的整函数. 如果 $f, \Delta_c f$ 与 $\Delta_c^2 f$ CM 分担 $a(z)$, 则 $\Delta_c f \equiv \Delta_c^2 f$.

在文 [7, 注 1.3] 中, 作者提出如下问题: 定理 1.3 中的结论是否能改进为 $f \equiv \Delta_c f$? 2016 年, El Farissi 等人[8]研究了该问题, 并证明了以下结论.

定理 1.4 设 f 是一个非周期有穷级整函数, $a(z)(\not\equiv 0) \in S(f)$ 是一个周期为 c 的整函数. 如果 $f, \Delta_c f$ 与 $\Delta_c^2 f$ CM 分担 $a(z)$, 则 $f \equiv \Delta_c f$.

本文完全解决了该问题, 证明了下面的定理.

定理 1.5 设 f 是一个有穷级非常数整函数, $a(z)(\not\equiv 0) \in S(f)$ 是一个周期为 c 的整函数. 如果 $f, \Delta_c f$ 与 $\Delta_c^2 f$ CM 分担 $a(z)$, 则 $f \equiv \Delta_c f$ 或者 $f(z) = a(z)\mathrm{e}^{Az+B} + a(z)$, 其中 $A \neq 0$ 且 $\mathrm{e}^{Ac} = 1$.

注 1.1 显然, 定理 1.3 与定理 1.4 均是定理 1.5 的推论.

另一方面, 由定理 1.2, 自然会问: 是否有对应于定理 1.2 的差分模拟的相关结论?
本文研究了该问题, 并证明了下面的定理.

定理 1.6 设 f 是一个有穷级非常数亚纯函数, $p(z)(\not\equiv 0)$ 是一个多项式. 如果 $f, \Delta_c f$ 与 $\Delta_c^2 f$ CM 分担 $\infty, p(z)$, 则 $f \equiv \Delta_c f$ 或者 $f(z) = \mathrm{e}^{Az+B} + b$, 其中 $p(z) \equiv b(\neq 0)$, $A \neq 0$ 且 $\mathrm{e}^{Ac} = 1$.

由定理 1.6, 立即可得以下推论.

推论 1.1 设 f 是一个有穷级非常数整函数, $p(z)(\not\equiv 0)$ 是一个多项式. 如果 $f, \Delta_c f$ 与 $\Delta_c^2 f$ CM 分担 $p(z)$, 则 $f \equiv \Delta_c f$ 或者 $f(z) = \mathrm{e}^{Az+B} + b$, 其中 $p(z) = b(\neq 0)$, $A \neq 0$ 满足 $\mathrm{e}^{Ac} = 1$.

推论 1.2 设 f 是一个有穷级非常数整函数. 如果 $f, \Delta_c f$ 与 $\Delta_c^2 f$ CM 分担 z, 则 $f \equiv \Delta_c f$.

例 1.1 设 a, c 是两个非零有穷复数, 设 $f(z) = \mathrm{e}^{z \ln a}$. 如果 $a^c = 2$, 则对任意的 $p(z)$, 显然 $f, \Delta_c f$ 与 $\Delta_c^2 f$ CM 分担 $p(z)$, 并且 $f \equiv \Delta_c f$. 该例子满足定理 1.6. 如果 $a^c = 3$, 则 $\Delta_c^2 f(z) = 2\Delta_c f(z) = 4f(z)$. 显然, $f, \Delta_c f$ 与 $\Delta_c^2 f$ CM 分担 0, 这表明定理 1.6 中的条件 $p(z)(\not\equiv 0)$ 是必要的.

例 1.2 设 A, b, c 是 3 个非零有穷复数, 且满足 $\mathrm{e}^{Ac} = 1$, 设 $f(z) = \mathrm{e}^{Az} + b$, $p(z) = b$, 则 $f, \Delta_c f$ 与 $\Delta_c^2 f$ CM 分担 $p(z)$, 并且 $f \neq \Delta_c f$. 这表明定理 1.6 中的第二个结论不可去掉.

例 1.3 设 A, b, c 是 3 个非零有穷复数, 且满足 $\mathrm{e}^{Ac} = 1$, 设 $f(z) = a(z)\mathrm{e}^{Az} + a(z)$, 其中 $a(z) \in S(f)$ 是一个周期为 c 的整函数, 则 $\Delta_c f \equiv \Delta_c^2 f \equiv 0$, 并且 $f, \Delta_c f$ 与 $\Delta_c^2 f$ CM 分担 $a(z)$. 计算可得 $f \neq \Delta_c f$. 该例子表明定理 1.5 的第二个结论不可去掉.

例 1.4 设 A, b, c 是 3 个非零有穷复数, 且满足 $\mathrm{e}^{Ac} = 1$, 设 $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{Az}} + p(z)$, $p(z) = b$, 则 $f, \Delta_c f$ 与 $\Delta_c^2 f$ CM 分担 $p(z)$. 这表明 f 是一个有穷级亚纯函数是必要的.

2 一些引理

引理 2.1 [6] 设 $f(z)$ 是一个有穷级亚纯函数, c 是一个非零有穷复数, 则

$$T(r,f(z+c))=T(r,f)+S(r,f).$$

引理 2.2 [5] 设 $c\in\mathbb{C}$, k 是一个正整数, $f(z)$ 是一个有穷级亚纯函数, 则

$$m\Big(r,\frac{\Delta_c^k f(z)}{f(z)}\Big)=S(r,f).$$

引理 2.3 设 f 是一个非常数有穷级亚纯函数, $p(z)(\not\equiv 0)$ 是一个多项式. 假设

$$\frac{\Delta_c^2 f(z)-p(z)}{f(z)-p(z)}=\mathrm{e}^{\alpha(z)},\quad \frac{\Delta_c f(z)-p(z)}{f(z)-p(z)}=\mathrm{e}^{\beta(z)},\tag{2.1}$$

其中 α 与 β 是两个多项式, 并且 $T(r,\mathrm{e}^{\alpha})+T(r,\mathrm{e}^{\beta})=S(r,f)$, 则 $f\equiv\Delta_c f$.

证 首先证明 f 不可能是非常数有理函数. 否则, 假设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, 其中 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 是两个互素多项式. 由 (2.1) 可得 $f(z)$ 与 $\Delta_c f(z)$ CM 分担 ∞. 断言: $Q(z)$ 是一个常数. 若不然, 则存在 z_0, 使得 $Q(z_0+c)=0$. 由于 $f(z)$ 与 $\Delta_c f(z)$ CM 分担 ∞, 且

$$\Delta_c f(z)=f(z+c)-f(z)=\frac{P(z+c)}{Q(z+c)}-\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(z+c)Q(z)-P(z)Q(z+c)}{Q(z)Q(z+c)},\tag{2.2}$$

可推得 $Q(z+c)=0\Rightarrow Q(z)=0$. 否则, 假设存在 z_1, 使得 $Q(z_1+c)=0$, 但 $Q(z_1)\neq 0$, 则由 (2.2) 知 z_1+c 是 $\Delta_c f$ 的极点, 但不是 f 的极点, 这跟 $f(z)$ 与 $\Delta_c f(z)$ CM 分担 ∞ 矛盾. 因此

$$Q(z_0+c)=0\Rightarrow Q(z_0)=0\Rightarrow Q(z_0-c)=0\Rightarrow\cdots\Rightarrow Q(z_0-nc)=0.$$

这表明 $Q(z)$ 有无穷多个零点, 这与 $Q(z)$ 是非零多项式矛盾, 断言得证.

因此 f 是一个非常数多项式, 可设

$$f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0,\quad p(z)=b_mz^m+\cdots+b_1z+b_0,$$

则 $\Delta_c f(z)=f(z+c)-f(z)$, $\Delta_c^2 f(z)=f(z+2c)-2f(z+c)+f(z)$ 是两个多项式, 且满足 $\deg\Delta_c^2 f(z)\leqslant\deg\Delta_c f(z)<\deg f(z)$. 从 (2.1) 可得 $\alpha(z),\beta(z)$ 是两个常数, 设 $\mathrm{e}^{\alpha(z)}=a,\mathrm{e}^{\beta(z)}=b$. 于是 (2.1) 可改写成

$$\Delta_c^2 f(z)-p(z)=a(f(z)-p(z)),\quad \Delta_c f(z)-p(z)=b(f(z)-p(z)).$$

再由 $\deg\Delta_c^2 f(z)\leqslant\deg\Delta_c f(z)<\deg f(z)$ 可得 $\deg f=n\leqslant\deg p=m$. 如果 $n<m$, 则可得 $a=b=1$, 从而有 $f\equiv\Delta_c f(z)\equiv\Delta_c^2 f$, 这与 $\deg\Delta_c f(z)<\deg f(z)$ 矛盾. 如果 $n=m$, 可得 $a=b=\frac{b_n}{a_n-b_n}$, 进而可得 $\Delta_c f(z)\equiv\Delta_c^2 f$, 因此 f 是一个常数, 矛盾.

因此 f 是一个非常数超越亚纯函数, 从而有 $T(r,p)=S(r,f)$. 由引理 2.2 以及 (2.1) 的第一个等式, 可得 $\frac{p(z)-\Delta_c^2 p(z)}{f(z)-p(z)}=\frac{\Delta_c^2 f(z)-\Delta_c^2 p(z)}{f(z)-p(z)}-\mathrm{e}^{\alpha(z)}$, 并且

$$\begin{aligned}m\Big(r,\frac{1}{f(z)-p(z)}\Big)&=m\Big(r,\frac{1}{p(z)-\Delta_c^2 p(z)}\Big(\frac{\Delta_c^2 f(z)-\Delta_c^2 p(z)}{f(z)-p(z)}-\mathrm{e}^{\alpha(z)}\Big)\Big)\\&\leqslant m\Big(r,\frac{\Delta_c^2 f(z)-\Delta_c^2 p(z)}{f(z)-p(z)}\Big)+m(r,\mathrm{e}^{\alpha(z)})+S(r,f)\\&=S(r,f).\end{aligned}$$

因此

$$N\Big(r,\frac{1}{f(z)-p(z)}\Big)=T(r,f(z))-m\Big(r,\frac{1}{f(z)-p(z)}\Big)+S(r,f)$$
$$=T(r,f(z))+S(r,f). \tag{2.3}$$

另一方面, 从 (2.1) 的第二个等式可得 $\Delta_c f(z)=\mathrm{e}^{\beta(z)}(f(z)-p(z))+p(z)$, 则

$$\begin{aligned}\Delta_c^2 f(z)&=\Delta_c(\mathrm{e}^{\beta(z)}(f(z)-p(z))+p(z))\\&=\mathrm{e}^{\beta(z+c)}(f(z+c)-p(z+c))+p(z+c)-\mathrm{e}^{\beta(z)}(f(z)-p(z))-p(z)\\&=\mathrm{e}^{\beta(z+c)}f(z+c)-\mathrm{e}^{\beta(z)}f(z)-p(z+c)\mathrm{e}^{\beta(z+c)}\\&\quad+\mathrm{e}^{\beta(z)}p(z)+p(z+c)-p(z).\end{aligned} \tag{2.4}$$

再由 (2.1) 的第一个等式, 易得

$$\Delta_c^2 f(z)=\mathrm{e}^{\alpha(z)}f(z)-p(z)\mathrm{e}^{\alpha(z)}+p(z). \tag{2.5}$$

由 (2.4) 与 (2.5) 可得

$$f(z+c)=(\mathrm{e}^{\alpha(z)-\beta(z+c)}+\mathrm{e}^{\beta(z)-\beta(z+c)})f(z)+\mu(z), \tag{2.6}$$

其中 $\mu(z)=-p(z)(\mathrm{e}^{\alpha(z)-\beta(z+c)}+\mathrm{e}^{\beta(z)-\beta(z+c)})+(2p(z)-p(z+c))\mathrm{e}^{-\beta(z+c)}+p(z+c)$.

令 $\omega(z)=\mathrm{e}^{\alpha(z)-\beta(z+c)}+\mathrm{e}^{\beta(z)-\beta(z+c)}-1$, 则

$$\Delta_c f(z)=\omega(z)f(z)+\mu(z). \tag{2.7}$$

因为 f 是超越亚纯函数, $p(z)$ 是多项式, 并且 $T(r,\mathrm{e}^{\alpha})+T(r,\mathrm{e}^{\beta})=S(r,f)$, 显然有

$$T(r,\omega)=S(r,f),\quad T(r,\mu)=S(r,f).$$

因此可将 (2.7) 改写成

$$\Delta_c f(z)-p(z)-\omega(z)(f(z)-p(z))=\omega(z)p(z)+\mu(z)-p(z). \tag{2.8}$$

断言: $\omega(z)p(z)+\mu(z)-p(z)\equiv 0$. 否则, 如果 $\omega(z)p(z)+\mu(z)-p(z)\not\equiv 0$. 设 z_0 是 $f(z)-p(z)$ 的 l 重零点. 因为 $f(z),\Delta_c f(z)$ CM 分担 $p(z)$, 则 z_0 是 $\Delta_c f(z)-p(z)$ 的 l 重零点. 因此, z_0 是 $\Delta_c f(z)-p(z)-\omega(z)(f(z)-p(z))$ 的至少 l 重零点. 因此, 由 (2.3) 与 (2.8), 可得

$$\begin{aligned}T(r,f(z))&=N\Big(r,\frac{1}{f(z)-p(z)}\Big)+S(r,f)\\&\leqslant N\Big(r,\frac{1}{\Delta_c f(z)-p(z)-\omega(z)(f(z)-p(z))}\Big)+S(r,f)\\&=N\Big(r,\frac{1}{\omega(z)p(z)+\mu(z)-p(z)}\Big)+S(r,f)\\&\leqslant T\Big(r,\frac{1}{\omega(z)p(z)+\mu(z)-p(z)}\Big)+S(r,f)\\&\leqslant S(r,f).\end{aligned} \tag{2.9}$$

矛盾, 断言得证.

因此, $\omega(z)p(z)+\mu(z)-p(z)\equiv 0$, 注意到

$$\mu(z)=-p(z)\omega(z)+p(z+c)-p(z)+(2p(z)-p(z+c))\mathrm{e}^{-\beta(z+c)}, \tag{2.10}$$

可得 $(2p(z)-p(z+c))(\mathrm{e}^{-\beta(z+c)}-1)\equiv 0$, 这表明 $\mathrm{e}^{-\beta(z+c)}\equiv 1$. 因此, $\mathrm{e}^{\beta(z)}\equiv \mathrm{e}^{\beta(z+c)}\equiv 1$. 再由 (2.1) 的第二个等式可得 $f\equiv \Delta_c f$.

引理 2.3 得证.

3　定理 1.5 的证明

证　因为 $f(z),\Delta_c f(z),\Delta_c^2 f(z)$ CM 分担 $a(z)$, 且 $f(z)$ 是有穷级整函数, 则存在两个多项式 $\alpha(z)$ 与 $\beta(z)$, 使得下式成立:

$$\frac{\Delta_c^2 f(z)-a(z)}{f(z)-a(z)}=\mathrm{e}^{\alpha(z)},\quad \frac{\Delta_c f(z)-a(z)}{f(z)-a(z)}=\mathrm{e}^{\beta(z)}. \tag{3.1}$$

由定理 1.3 知 $\Delta_c f\equiv \Delta_c^2 f$.

以下的证明方法及思路, 请参见文 [8]. 假设 $f(z)\not\equiv \Delta_c f(z)$. 令

$$Q(z)=\Delta_c f(z)-f(z), \tag{3.2}$$

则 $Q(z)\not\equiv 0$ 是一个周期为 c 的整函数, 并且有

$$\Delta_c f(z)-a(z)=f(z)-a(z)+Q(z). \tag{3.3}$$

因此 $\frac{\Delta_c f(z)-a(z)}{f(z)-a(z)}=1+\frac{Q(z)}{f(z)-a(z)}$, 进而可得

$$f(z)-a(z)=\frac{Q(z)}{\mathrm{e}^{\beta(z)}-1}. \tag{3.4}$$

因 $Q(z)$ 是一个以 c 为周期的整函数, 可得

$$\Delta_c f(z)=Q(z)\cdot\Delta_c\Big(\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(z)}-1}\Big), \tag{3.5}$$

$$\Delta_c^2 f(z)=Q(z)\cdot\Delta_c^2\Big(\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(z)}-1}\Big). \tag{3.6}$$

以下分两种情形讨论.

情形 3.1　$\beta(z)$ 是一个常数. 如果 $\mathrm{e}^{\beta(z)}=1$, 则由 (3.1) 的第二个式子可得 $f(z)=\Delta_c f(z)$. 如果 $\mathrm{e}^{\beta(z)}\neq 1$, 则由 (3.4), 可推出 $f(z)$ 是以 c 为周期的整函数, 因此 $\Delta_c f(z)=0$, 并且 $Q(z)=-f(z)$, 则从 (3.4) 可得

$$f(z)=a(z)\frac{\mathrm{e}^{\beta}-1}{\mathrm{e}^{\beta}}.$$

因此 $T(r,f)=S(r,f)$, 矛盾.

情形 3.2　$\beta(z)$ 是一个非常数多项式. 从 (3.5), (3.6) 以及 $\Delta_c f(z)=\Delta_c^2 f(z)$, 可得

$$\mathrm{e}^{\beta_c(z)+\beta(z)}-3\mathrm{e}^{\beta_{2c}(z)+\beta(z)}+2\mathrm{e}^{\beta_{2c}(z)+\beta_c(z)}+\mathrm{e}^{\beta_{2c}(z)}-3\mathrm{e}^{\beta_c(z)}+2\mathrm{e}^{\beta(z)}=0,$$

这表明

$$\mathrm{e}^{\beta_c(z)}+(2\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}-3)\mathrm{e}^{\beta_{2c}(z)}=-\mathrm{e}^{\Delta_c\beta_c(z)+\Delta_c\beta(z)}+3\mathrm{e}^{\Delta_c\beta(z)}-2. \tag{3.7}$$

由于 $\deg\Delta_c\beta=\deg\beta-1$, 可得

$$\rho(\mathrm{e}^{\beta_c}+(2\mathrm{e}^{\Delta_c\beta}-3)\mathrm{e}^{\beta_{2c}})=\rho(-\mathrm{e}^{\Delta_c\beta_c+\Delta_c\beta}+3\mathrm{e}^{\Delta_c\beta}-2)\leqslant\deg\beta-1. \tag{3.8}$$

如果 $\mathrm{e}^{\beta_c}+(2\mathrm{e}^{\Delta_c\beta}-3)\mathrm{e}^{\beta_{2c}}\not\equiv 0$, 可断言

$$\rho(\mathrm{e}^{\beta_c}+(2\mathrm{e}^{\Delta_c\beta}-3)\mathrm{e}^{\beta_{2c}})=\rho(\mathrm{e}^{\beta_c})=\deg\beta. \tag{3.9}$$

若不然, 假设 $\rho(\mathrm{e}^{\beta_c}+(2\mathrm{e}^{\Delta_c\beta}-3)\mathrm{e}^{\beta_{2c}})<\rho(\mathrm{e}^{\beta_c})$, 则

$$\deg\beta=\rho\Big(\frac{\mathrm{e}^{\beta_c}+(2\mathrm{e}^{\Delta_c\beta}-3)\mathrm{e}^{\beta_{2c}}}{\mathrm{e}^{\beta_c}}\Big)=\rho(1+(2\mathrm{e}^{\Delta_c\beta}-3)\mathrm{e}^{\Delta\beta_c})\leqslant\deg\beta-1,$$

矛盾. 断言得证. 但 (3.8) 与 (3.9) 相互矛盾, 因此假设不成立.

所以 $\mathrm{e}^{\beta_c}+(2\mathrm{e}^{\Delta_c\beta}-3)\mathrm{e}^{\beta_{2c}}\equiv 0$, 即

$$\mathrm{e}^{\beta_c}=(3-2\mathrm{e}^{\Delta_c\beta})\mathrm{e}^{\beta_{2c}}.\tag{3.10}$$

显然, $\Delta_c\beta$ 是一个常数, 这表明 $\beta(z)=Az+B$, 其中 $A\neq 0,B$ 是两个常数. 由此 (3.10) 可改写成

$$\mathrm{e}^{Az+Ac+B}=(3-2\mathrm{e}^{Ac})\mathrm{e}^{Az+2Ac+B}.\tag{3.11}$$

再由 (3.11) 易得 $\mathrm{e}^{Ac}=1$ 或 $\mathrm{e}^{Ac}=\frac{1}{2}$. 结合 (3.7), 可得 $\mathrm{e}^{Ac}=1$. 因此 $\mathrm{e}^{\beta_c(z)}=\mathrm{e}^{Az+Ac+B}=\mathrm{e}^{Az+B}=\mathrm{e}^{\beta(z)}$, 这表明 $\mathrm{e}^{\beta(z)}$ 是以 c 为周期的整函数.

由 (3.4), 可推出 $f(z)$ 是以 c 为周期的整函数, 因此 $\Delta_cf(z)=0$, 并且 $Q(z)=-f(z)$. 再由 (3.4) 可得 $f(z)=a(z)\frac{\mathrm{e}^{Az+B}-1}{\mathrm{e}^{Az+B}}=a(z)\mathrm{e}^{A_1z+B_1}+a(z)$, 其中 $A_1=-A,\ \mathrm{e}^{B_1}=-\mathrm{e}^{-B}$.

定理 1.5 得证.

4 定理 1.6 的证明

证 因为 $f(z),\Delta_cf(z),\Delta_c^2f(z)$ CM 分担 $\infty,\ p(z)$, 并且 $f(z)$ 是有穷级亚纯函数, 则存在两个多项式 $\alpha(z)$ 与 $\beta(z)$, 使得下式成立:

$$\frac{\Delta_c^2f(z)-p(z)}{f(z)-p(z)}=\mathrm{e}^{\alpha(z)},\quad \frac{\Delta_cf(z)-p(z)}{f(z)-p(z)}=\mathrm{e}^{\beta(z)}.\tag{4.1}$$

类似引理 2.3 的讨论, 可得 $f(z)$ 不可能是有理函数. 因此, $f(z)$ 是一个超越亚纯函数, 从而有 $T(r,p)=S(r,f)$.

令 $F(z):=f(z)-p(z)$, 则 $T(r,f)=T(r,F)+S(r,f)$ 且 $T(r,p)=S(r,F)$. 注意到

$$f(z)=F(z)+p(z),\quad \Delta_cf(z)=\Delta_cF(z)+\Delta_cp(z),\quad \Delta_c^2f(z)=\Delta_c^2F(z)+\Delta_c^2p(z),$$

(4.1) 可改写成

$$\frac{\Delta_c^2F(z)+\Delta_c^2p(z)-p(z)}{F(z)}=\mathrm{e}^{\alpha(z)},\quad \frac{\Delta_cF(z)+\Delta_cp(z)-p(z)}{F(z)}=\mathrm{e}^{\beta(z)}.\tag{4.2}$$

由 $p(z)(\not\equiv 0)$ 是多项式, 则显然 $\Delta_c^2p(z)-p(z)\not\equiv 0$, 且 $\Delta_cp(z)-p(z)\not\equiv 0$. 设

$$\phi(z):=\frac{(p(z)-\Delta_c^2p(z))\Delta_cF(z)-(p(z)-\Delta_cp(z))\Delta_c^2F(z)}{F(z)}.\tag{4.3}$$

以下分两种情形讨论.

情形 4.1 $\phi(z)\not\equiv 0$. 由 $T(r,p)=S(r,F)$ 以及引理 2.2, 可得

$$m(r,\phi)=S(r,F).\tag{4.4}$$

由 (4.2)–(4.3), 可将 ϕ 改写成

$$\phi(z)=(p(z)-\Delta_c^2p(z))\mathrm{e}^{\beta(z)}-(p(z)-\Delta_cp(z))\mathrm{e}^{\alpha(z)}.\tag{4.5}$$

由于 $p(z)$ 是多项式, 显然 $N(r,\phi)=S(r,F)$. 再由 (4.4), 可得

$$T(r,\phi)=S(r,F).\tag{4.6}$$

因为 $\phi(z)\not\equiv 0$, 由 (4.5) 可得

$$(p(z)-\Delta_c^2p(z))\frac{\mathrm{e}^{\beta(z)}}{\phi(z)}=1+(p(z)-\Delta_cp(z))\frac{\mathrm{e}^{\alpha(z)}}{\phi(z)}. \tag{4.7}$$

由 Nevanlinna 第二基本定理可得

$$\begin{aligned}T\Big(r,(p-\Delta_c^2p)\frac{\mathrm{e}^{\beta}}{\phi}\Big)&\leqslant\overline{N}\Big(r,(p-\Delta_c^2p)\frac{\mathrm{e}^{\beta}}{\phi}\Big)+\overline{N}\Big(r,\frac{\phi}{(p-\Delta_c^2p)\mathrm{e}^{\beta}}\Big)\\&\quad+\overline{N}\Big(r,\frac{1}{(p-\Delta_c^2p)\Big(\dfrac{\mathrm{e}^{\beta}}{\phi}\Big)-1}\Big)+S\Big(r,(p-\Delta_c^2p)\frac{\mathrm{e}^{\beta}}{\phi}\Big)\\&\leqslant S(r,F)+S\Big(r,(p-\Delta_c^2p)\frac{\mathrm{e}^{\beta}}{\phi}\Big).\end{aligned}$$

结合 (4.6), 可得

$$T(r,\mathrm{e}^{\beta})=S(r,F). \tag{4.8}$$

从 (4.5)–(4.8), 可得

$$T(r,\mathrm{e}^{\alpha})=T\Big(r,\frac{(p-\Delta_c^2p)\mathrm{e}^{\beta}-\phi}{p-\Delta_cp}\Big)=S(r,F). \tag{4.9}$$

因此, 由引理 2.3, 可得 $f\equiv\Delta_cf$.

情形 4.2 $\phi\equiv 0$. 即

$$(p(z)-\Delta_c^2p(z))\Delta_cF(z)=(p(z)-\Delta_cp(z))\Delta_c^2F(z). \tag{4.10}$$

由简单计算, 可将 (4.10) 改写成

$$(p(z)-\Delta_c^2p(z))(\Delta_cf(z)-p(z))=(p(z)-\Delta_cp(z))(\Delta_c^2f(z)-p(z)). \tag{4.11}$$

结合 (4.1) 与 (4.11), 可得

$$\frac{\Delta_c^2f(z)-p(z)}{\Delta_cf(z)-p(z)}=\mathrm{e}^{\alpha(z)-\beta(z)}=\frac{p(z)-\Delta_c^2p(z)}{p(z)-\Delta_cp(z)}. \tag{4.12}$$

因 $p(z)$ 是多项式, 从 (4.12) 可得 $\mathrm{e}^{\alpha(z)-\beta(z)}$ 是一个常数. 设 $\mathrm{e}^{\alpha(z)-\beta(z)}=A$, 则 $p(z)-\Delta_c^2p(z)=A(p(z)-\Delta_cp(z))$, 从而可推得 $A=1$ 并且 $p(z)$ 是一个常数, 记 $p(z)\equiv b$.

从定理 1.5, 可推得 $f(z)\equiv\Delta_cf(z)$ 或者 $f(z)=\mathrm{e}^{Az+B}+b$, 其中 $\mathrm{e}^{Ac}=1$.

定理 1.6 得证.

致谢 感谢审稿人及编辑提出的宝贵意见.

参　考　文　献

[1] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] Yang L. Value distribution theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[3] Jank G, Mues E, Volkmann L. Meromorphe funktionen, die mit ihrer ersten und zweiten ableitung einen endlichen wert teilen [J]. *Complex Variables, Theory and Application*, 1986, 6(1):51–71.

[4] Chang J M, Fang M L. Uniqueness of entire functions and fixed points [J]. *Kodai Math J*, 2002, 25(1):309–320.

[5] Halburd R G, Korhonen R J. Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with applications to difference equations [J]. *J Math Anal Appl*, 2006, 314(2):477–487.

[6] Chiang Y M, Feng S J. On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane [J]. *Ramanujan Journal*, 2008, 16(1):105–129.

[7] Chen B Q, Chen Z X, Li S. Uniqueness theorems on entire functions and their difference operators or shifts [J]. *Abstr Appl Anal*, 2012, Art ID 906893, 8 pp.

[8] El Farissi A, Latreuch Z, Asiri A. On the uniqueness theory of entire functions and their difference operators [J]. *Complex Anal Oper Theory*, 2016, 10:1317–1327.

Unicity of Meromorphic Functions and Their Difference Operators

DENG Bingmao[1] LIU Dan[1] FANG Mingliang[2]

[1]Institute of Applied Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China.
E-mail: dbmao2012@163.com; liudan@scau.edu.cn

[2]Corresponding author. Institute of Applied Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China.
E-mail: mlfang@scau.edu.cn

Abstract This paper deals with the unicity of meromorphic functions and their difference operators and proves: Let f be a nonconstant meromorphic function of finite order, and let $p(z)(\not\equiv 0)$ be a polynomial. If $f, \Delta_c f$ and $\Delta_c^2 f$ share ∞ and $p(z)$ CM, then either $f \equiv \Delta_c f$ or $f(z) = \mathrm{e}^{Az+B} + b$, where $p(z) \equiv b \neq 0$, $A \neq 0$ satisfying $\mathrm{e}^{Ac} = 1$. Our result provides a difference analogue of a result of Chang and Fang (Chang J M, Fang M L. Uniqueness of entire functions and fixed points [J]. *Kodai Math J*, 2002, 25(1): 309–320.), and answers the question of Chen and Chen (Chen B Q, Chen Z X, Li S. Uniqueness theorems on entire functions and their difference operators or shifts [J]. *Abstr Appl Anal*, 2012, Art ID 906893, 8 pp.).

Keywords Shared polynomial, Uniqueness, Difference operators

2000 MR Subject Classification 30D35, 39B32

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 39 No. 4, 2018
by ALLERTON PRESS, INC., USA