数学年刊
2017, 38A(2):215–226
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2017.0017

3 阶全矩阵代数的 H_8-模代数结构*

高凤霞[1]　杨士林[2]

提要 设 H_8 是非交换非余交换的 8 维半单 Hopf 代数, $\mathbb{C}[\mathbb{K}_4]$ 是克莱因四元群的群代数, $M_3(\mathbb{C})$ 是复数域上的 3 阶全矩阵代数. 通过方阵和方阵对的弱相似给出了同构意义下 $M_3(\mathbb{C})$ 上全部的 $\mathbb{C}[\mathbb{K}_4]$-模代数结构. 在此基础上结合 H_8 与 $\mathbb{C}[\mathbb{K}_4]$ 的关系, 刻划了同构意义下 $M_3(\mathbb{C})$ 上所有的 H_8-模代数结构.

关键词 全矩阵代数, 弱相似, 模代数
MR (2000) 主题分类 16T05, 15A04, 15A24
中图法分类 O153.3
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2017)02-0215-12

1 引　言

近几年, 群和 Hopf 代数在代数上的作用一直在代数学中占有比较重要的地位, 也是许多数学工作者一直关注的课题. 1976 年, Beatie[1−2] 引入了 Hopf 代数在代数上的作用. 1985 年, Blattner 和 Montgomery[3] 研究了 Hopf 模代数的对偶定理, 并推广了群作用理论中相应的定理. 自此, 许多数学家开始致力于 Hopf 代数作用的研究. 例如, Bergen 和 Cohen[4] 探讨了交换 Hopf 代数的作用, Cohen 和 Fischman[5] 研究了广义的 Hopf 代数作用. 1993 年, Montgomery[6] 系统地总结了此前有关 Hopf 代数作用的成果. 其他的有关 Hopf 代数作用的成果可参考文 [7–9]. 对于 Sweedler 4 维 Hopf 代数 $\mathbb{H}_4$, 陈慧香和张印火 [10] 分类了全矩阵代数 $M_2(k)$ 上的全部的 Yetter-Drinfeld $\mathbb{H}_4$-模代数结构. 赵士银等 [11−12] 分别利用方阵和方阵对的弱相似讨论了 $M_2(k)$ 的 $k[\mathbb{C}_2]$, $k[\mathbb{C}_3]$-模代数结构和 $k[S_3]$-模代数结构, 并给出了详细的分类. 对于非交换非余交换的 8 维半单 Hopf 代数 H_8, 文 [13] 完全刻划了 $M_2(\mathbb{C})$ 的 H_8-模代数结构.

本文主要目的就是首先通过方阵和方阵对弱相似的概念, 给出同构意义下 $M_3(\mathbb{C})$ 上相对于克莱因四元群的群代数 $\mathbb{C}[\mathbb{K}_4]$ 的全部的模代数结构, 在此基础上结合 $\mathbb{C}[\mathbb{K}_4]$ 与非交换非余交换的 8 维半单 Hopf 代数 H_8 的关系, 分类了 $M_3(\mathbb{C})$ 上所有的 H_8-模代数结构.

2 预备知识

设 $\mathbb{C}$ 为复数域, i 为虚数单位, $M_n(\mathbb{C})$ 表示 $\mathbb{C}$ 上 n 阶矩阵, $GL_n(\mathbb{C})$ 表示 $\mathbb{C}$ 上 n 阶可逆矩阵组成的乘法群, E_n 表示域 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶单位矩阵, $\{E_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ 为矩阵单位, $\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 表示主对角线上分别为 $\alpha_i \in \mathbb{C}$ 的对角阵. 令 $\mathbb{C}^*$ 表示 $\mathbb{C}$ 中非零元构

本文 2015 年 2 月 6 日收到, 2016 年 9 月 28 日收到修改稿.
[1]北京工业大学应用数理学院, 北京 100124; 河南工学院基础部, 河南 新乡 453003.
E-mail: gaofengxiahappy@163.com
[2]通讯作者. 北京工业大学应用数理学院, 北京 100124. E-mail: slyang@bjut.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11471186, No. 11671024) 和北京市自然科学基金 (No. 1162002) 的资助.

成的乘法群, $\mathbb{K}_4$ 表示克莱因四元群. 对任意群 G, 我们用 $\mathbb{C}[G]$ 表示由 G 决定的群代数. 除特别说明, 文中出现的代数和 Hopf 代数均定义在 $\mathbb{C}$ 上.

定义 2.1 [6,14] 令 H, A 分别是一个 Hopf 代数和一个代数. 对任意 $h \in H$, $a, b \in A$, 下列条件满足

(1) A 是一个左 H-模, $h \otimes a \to h \cdot a$;

(2) $h \cdot (ab) = \sum\limits_{(h)} (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$; $h \cdot 1_A = \varepsilon(h) 1_A$;

则称 A 是一个左 H-模代数. 特别地, 当 $H = \mathbb{C}[G]$ 是一个群代数时, 则 G 中每一个元素的作用都是 A 的代数自同构. 也就是说, A 上的 H-模代数结构由群同态 $\varphi : G \mapsto \mathrm{Aut}(A)$ 决定, 其中 $\mathrm{Aut}(A)$ 为 A 的代数自同构群, 任意 $a \in A$, $g \cdot a = \varphi(g)(a)$. 为了方便, 我们将 A 上由 φ 决定的 H-模代数结构记为 $A(\varphi)$.

注 2.1 设 A, B 是两个 H-模代数. 如果存在一个代数同构 $\phi : A \mapsto B$ 且对任意 $a \in A$, $h \in H$, $\phi(h \cdot a) = h \cdot \phi(a)$, 则称 ϕ 是一个 H-模代数同构.

特别地, 设 $A(\varphi_1), A(\varphi_2)$ 分别是由群同态 φ_1, φ_2 决定的 $\mathbb{C}[G]$-模代数, 则 $A(\varphi_1) \simeq A(\varphi_2)$ 当且仅当存在 A 的一个代数自同构 ϕ, 使得任意 $g \in G$, $\phi \circ \varphi_1(g) = \varphi_2(g) \circ \phi$.

定义 2.2 [15] 设 H_8 是唯一的非交换非余交换的 8 维半单 Hopf 代数. 它可由满足如下关系式的 g, h, x 生成

$$\begin{aligned} &g^2 = 1, \quad h^2 = 1, \quad xg = hx, \\ &gh = hg, \quad gx = xh, \quad x^2 = \frac{1}{2}(1 + g + h - gh). \end{aligned}$$

其余乘法和对极如下

$$\begin{aligned} &\Delta(g) = g \otimes g, \quad \Delta(h) = h \otimes h, \\ &\Delta(x) = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + h \otimes 1 - h \otimes g)(x \otimes x), \\ &\varepsilon(g) = 1, \quad \varepsilon(h) = 1, \quad \varepsilon(x) = 1, \\ &S(g) = g, \quad S(h) = h, \quad S(x) = x. \end{aligned}$$

定义 2.3 [11,16] 设 $X_1, X_2 \in M_n(\mathbb{C})$. 若存在 $P \in GL_n(\mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, 使得 $PX_1 = \alpha X_2 P$, 则称 X_1 与 X_2 是弱相似的.

可以将矩阵弱相似的定义推广到矩阵对的情形.

定义 2.4 [12] 设 $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in M_n(\mathbb{C})$, 称矩阵对 (X_1, X_2) 与矩阵对 (Y_1, Y_2) 是弱相似的当且仅当存在 $P \in GL_n(\mathbb{C})$ 及 $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$ $(i = 1, 2)$, 使得 $PX_iP^{-1} = \alpha_i Y_i$ $(i = 1, 2)$, 简记为 $(X_1, X_2) \sim (Y_1, Y_2)$.

注 2.2 对于单代数 $A = M_n(\mathbb{C})$, 由 Skolem-Noether 定理可知, A 的每一个代数自同构都是内自同构. 也就是说, 对于任意 $\phi \in \mathrm{Aut}(A)$, 都存在一个矩阵 $X \in GL_n(\mathbb{C})$, 使得对任意 $a \in A$, $g(a) = XaX^{-1}$.

我们知道克莱因四元群有以下的表现

$$\mathbb{K}_4 = \langle g_1, g_2 \mid g_1^2 = g_2^2 = (g_1 g_2)^2 = 1 \rangle,$$

$\mathbb{K}_4$ 到 $\mathrm{Aut}(A)$ 的群同态可由 $GL_n(\mathbb{C})$ 的矩阵对 (X_1, X_2) 决定, $g_1^2 = g_2^2 = (g_1 g_2)^2 = 1$ 意味着 $X_1^2, X_2^2, (X_1 X_2)^2 \in \mathbb{C}E_3$. 若将由 (X_1, X_2) 决定的 $\mathbb{C}[\mathbb{K}_4]$-模代数结构记为 $A(X_1, X_2)$,

则 $A(X_1,X_2)\simeq A(Y_1,Y_2)$ 当且仅当存在 $P\in GL_n(C)$, 使得对任意 $a\in A$,

$$PX_1aX_1^{-1}P^{-1}=Y_1PaP^{-1}Y_1^{-1},\quad PX_2aX_2^{-1}P^{-1}=Y_2PaP^{-1}Y_2^{-1},$$

即 $P^{-1}Y_1^{-1}PX_1^{-1},\ P^{-1}Y_2^{-1}PX_2^{-1}\in\mathbb{C}E_3$, 也就是说 (X_1,X_2) 弱相似于 (Y_1,Y_2).

3　$M_3(\mathbb{C})$ 的 H_8-模代数结构

3.1　$M_3(\mathbb{C})$ 的 $\mathbb{C}[\mathbb{K}_4]$-模代数结构

本小节我们利用弱相似的概念讨论 $M_3(\mathbb{C})$ 的 $\mathbb{C}[\mathbb{K}_4]$-模代数结构, 为研究 $M_3(\mathbb{C})$ 的 H_8-模代数结构做一些准备. 关于 $M_3(\mathbb{C})$ 的 $\mathbb{C}[\mathbb{K}_4]$-模代数结构我们有以下的分类结果.

定理 3.1　在同构意义下, $M_3(\mathbb{C})$ 上全部的 $\mathbb{C}[\mathbb{K}_4]$-模代数结构共有 6 类. 对任意 $a\in M_3(\mathbb{C})$, 生成元的作用如下

(1) $g_1\cdot a=g_2\cdot a=a$;

(2) $g_1\cdot a=TaT_1,\ g_2\cdot a=a$, 其中 $T=\mathrm{diag}(1,1,-1)$;

(3) $g_1\cdot a=T_1aT_1^{-1},\ \ g_2\cdot a=T_2aT_2^{-1}$, 其中 $T_1=E_3,\ T_2=\mathrm{diag}(1,1,-1)$;

(4) $g_1\cdot a=T_1aT_1^{-1},\ \ g_2\cdot a=T_2aT_2^{-1}$, 其中 $T_1=\mathrm{diag}(1,1,-1),\ T_2=\mathrm{diag}(1,1,-1)$;

(5) $g_1\cdot a=T_1aT_1^{-1},\ \ g_2\cdot a=T_2aT_2^{-1}$, 其中 $T_1=\mathrm{diag}(1,-1,-1),\ T_2=\mathrm{diag}(1,1,-1)$;

(6) $g_1\cdot a=T_1aT_1^{-1},\ \ g_2\cdot a=T_2aT_2^{-1}$, 其中 $T_1=\mathrm{diag}(1,1,-1),\ T_2=\mathrm{diag}(1,-1,-1)$.

证　由注 2.2 可知, 代数 $M_3(\mathbb{C})$ 上的 $\mathbb{C}[\mathbb{K}_4]$-模代数结构由集合

$$\Sigma_3=\{(X_1,X_2)\mid X_1^2,X_2^2,(X_1X_2)^2\in\mathbb{C}E_3\}$$

的元素所决定, 模代数的同构类由弱相似的等价类决定. 因此上述结果归结为以下引理.

引理 3.2　按弱相似关系矩阵集合 $\{X\in GL_3(\mathbb{C})\mid X^2\in\mathbb{C}E_3\}$ 可分为两类, 其代表元可取 E_3 和 $\mathrm{diag}(1,1,-1)$.

引理 3.3　设 $X_1\in GL_3(\mathbb{C})$, $(X_1,X_2)\in\Sigma_3$, 则 (X_1,E_3) 弱相似于 $\lambda_1=(E_3,E_3)$ 或 $\lambda_2=(\mathrm{diag}(1,1,-1),E_3)$, 且 λ_1 与 λ_2 不弱相似.

证　显然成立.

引理 3.4　设 $X_1\in GL_3(\mathbb{C})$, $(X_1,\mathrm{diag}(1,1,-1))\in\Sigma_3$, 则 $(X_1,\mathrm{diag}(1,1,-1))$ 弱相似于

$$\lambda_3=(E_3,\mathrm{diag}(1,1,-1)),\quad \lambda_4=(\mathrm{diag}(1,1,-1),\ \mathrm{diag}(1,1,-1)),$$

$$\lambda_5=(\mathrm{diag}(1,-1,-1),\ \mathrm{diag}(1,1,-1)),$$

且它们不弱相似.

证　设 $X_1\in GL_3(\mathbb{C}),(X_1,\mathrm{diag}(1,1,-1))\in\Sigma_3,\ X_1^2=\alpha_1E_3,\ (X_1X_2)^2=\alpha_2E_3$, 其中 $\alpha_i\in C\ (i=1,2)$. 令

$$X_1=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix},\quad X_2=\mathrm{diag}(1,1,-1),\quad X_{11}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix},$$

$$X_{12}=\begin{pmatrix}x_{13}\\x_{23}\end{pmatrix},\qquad X_{21}=\begin{pmatrix}x_{31}&x_{32}\end{pmatrix},\quad X_{22}=(x_{33}).$$

则 $X_1^2=\alpha_1E_3$ 意味着

$$X_{11}^2+X_{12}X_{21}=\alpha_1E_2,\quad X_{11}X_{12}+x_{33}X_{12}=0, \tag{3.1}$$

$$X_{21}X_{12}+x_{33}^2=\alpha_1,\qquad X_{21}X_{11}+x_{33}X_{21}=0. \tag{3.2}$$

又因为

$$X_1\operatorname{diag}(1,1,-1)=\begin{pmatrix}X_{11} & -X_{12}\\ X_{21} & -X_{22}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}X_{11} & -X_{12}\\ X_{21} & -X_{22}\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}X_{11}^2-X_{12}X_{21} & -X_{11}X_{12}+X_{12}X_{22}\\ X_{21}X_{11}-X_{22}X_{21} & -X_{21}X_{12}+X_{22}^2\end{pmatrix}=\alpha_2E_3.$$

可得

$$X_{11}^2-X_{12}X_{21}=\alpha_2E_2,\quad -X_{11}X_{12}+X_{12}X_{22}=0, \tag{3.3}$$

$$X_{21}X_{12}-X_{22}^2=\alpha_2,\qquad -X_{21}X_{11}+X_{22}X_{21}=0. \tag{3.4}$$

由 (3.1)–(3.4) 可得 $X_{11}^2=(\alpha_1+\alpha_2)E_2,\ X_{12}=0,\ X_{21}=0,\ x_{33}^2=\alpha_1+\alpha_2$. 因此

$$X_1=\begin{pmatrix}X_{11} & 0\\ 0 & x_{33}\end{pmatrix}.$$

进一步可得 $(X_1,\operatorname{diag}(1,1,-1))$ 弱相似于 $\lambda_3=(E_3,\operatorname{diag}(1,1,-1))$, $\lambda_4=(\operatorname{diag}(1,1,-1),\operatorname{diag}(1,1,-1))$, 或者 $\lambda_5=(\operatorname{diag}(1,-1,-1),\operatorname{diag}(1,1,-1))$.

引理 3.5 设 $X_2\in GL_3(\mathbb{C})$, $(\operatorname{diag}(1,1,-1),X_2)\in\Sigma_3$, 则 $(\operatorname{diag}(1,1,-1),X_2)$ 弱相似于 $\lambda_6=(\operatorname{diag}(1,1,-1),\operatorname{diag}(1,-1,-1))$.

证 类似于引理 3.3.

3.2 $M_3(\mathbb{C})$ 的 H_8-模代数结构

本小节在 $M_3(\mathbb{C})$ 中我们将固定顺序为 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22},E_{33},E_{13},E_{23},E_{31},E_{32}$ 的基记为 $(*)$. 此外, 设

$$P_1=\operatorname{diag}(1,-1,-1,1,1,-1,1,-1,1),\quad P_2=\operatorname{diag}(1,-1,-1,1,1,-1,1,-1,1),$$

$$X_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

定理 3.2 保持上面的符号. 则在同构意义下, $M_3(\mathbb{C})$ 的 H_8-模代数结构共有 5 大类

(1) $g\cdot a=h\cdot a=x\cdot a=a,\ \forall a\in M_3(\mathbb{C})$;

(2) $g\cdot a=h\cdot a=a,\ x\cdot a=TaT^{-1}$, 对 $a\in M_3(\mathbb{C})$, 其中 $T=\mathrm{diag}(1,1,-1)$;

(3) g,h,x 在基 $(*)$ 下的矩阵分别为 P_1,P_2 和 X_1;

(4) g,h,x 在基 $(*)$ 下的矩阵分别为 P_2,P_1 和 X_2;

(5) g,h 在基 $(*)$ 下的矩阵均为 $\mathrm{diag}(1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1)$, x 在基 $(*)$ 下的矩阵为

$$X=\begin{pmatrix} -U\otimes V & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

其中 $U=(u_{ij})_{2\times 2},\ V=(v_{ij})_{2\times 2}\in M_2(\mathbb{C}),\ b=-u_{11}v_{11}-u_{21}v_{21},\ U\bigotimes V$ 代表 $U,\ V$ 的张量积或 Kronecker 积, 并且 U,V 可取以下 14 种情况之一:

(1) $U=\mathrm{diag}(\mathrm{i},\mathrm{i}),\ V=\mathrm{diag}(\mathrm{i},\mathrm{i}),\ b=1$;

(2) $U=\mathrm{diag}(\mathrm{i},\mathrm{i}),\ V=\mathrm{diag}(-\mathrm{i},-\mathrm{i}),\ b=-1$;

(3) $U=\mathrm{diag}(\mathrm{i},\mathrm{i}),\ V=\mathrm{diag}(\mathrm{i},-\mathrm{i}),\ b=1$;

(4) $U=\mathrm{diag}(-\mathrm{i},-\mathrm{i}),\ V=\mathrm{diag}(\mathrm{i},\mathrm{i}),\ b=-1$;

(5) $U=\mathrm{diag}(-\mathrm{i},-\mathrm{i}),\ V=\mathrm{diag}(-\mathrm{i},-\mathrm{i}),\ b=1$;

(6) $U=\mathrm{diag}(-\mathrm{i},-\mathrm{i}),\ V=\mathrm{diag}(\mathrm{i},-\mathrm{i}),\ b=-1$;

(7) $U=\mathrm{diag}(\mathrm{i},-\mathrm{i}),\ V=\mathrm{diag}(\mathrm{i},\mathrm{i}),\ b=1$;

(8) $U=\mathrm{diag}(\mathrm{i},-\mathrm{i}),\ V=\mathrm{diag}(-\mathrm{i},-\mathrm{i}),\ b=1$;

(9) $U=\mathrm{diag}(\mathrm{i},-\mathrm{i}),\ V=\mathrm{diag}(\mathrm{i},-\mathrm{i}),\ b=1$;

(10) $U=\mathrm{diag}(\mathrm{i},-\mathrm{i}),\ V=\mathrm{diag}(-\mathrm{i},\mathrm{i}),\ b=1$;

(11) $U=\mathrm{diag}(\mathrm{i},-\mathrm{i}),\ V=\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},\ b=1$;

(12) $U=\mathrm{diag}(\mathrm{i},-\mathrm{i}),\ V=\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},\ b=1$;

(13) $U=\mathrm{diag}(\mathrm{i},-\mathrm{i}),\ V=\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix},\ b=-1$;

(14) $U=\mathrm{diag}(\mathrm{i},-\mathrm{i}),\ V=\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix},\ b=-1$.

证　设 $H=\mathbb{C}1\oplus\mathbb{C}g\oplus\mathbb{C}h\oplus\mathbb{C}gh$, 容易证 H 是 H_8 的一个 Hopf 子代数, 且作为 Hopf 代数 $H\simeq\mathbb{C}[\mathbb{K}_4]$, 其中 $g\to g_1,\ h\to g_2$. 我们知道每一个 H_8-模代数均以显然的方式做成一个 H-模代数. 通过 $H\simeq\mathbb{C}[\mathbb{K}_4]$, $M_3(\mathbb{C})$ 上所有 H-模代数结构都已经清楚. 因此为了确定 $M_3(\mathbb{C})$ 上所有的 H_8-模代数结构, 我们需要探讨 x 在 $M_3(\mathbb{C})$ 上的作用. 首先取定 $M_3(\mathbb{C})$ 的基 $(*)$, 设 $g,\ h,\ x$ 在基 $(*)$ 下的矩阵分别为 $P,\ Q,\ X$, 则 X 满足以下条件

$$X^2=\frac{1}{2}(E_4+P+Q-PQ),\quad XP=QX,\quad XQ=PX, \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} x(E_{ij}E_{kl})=&\frac{1}{2}(x(E_{ij})x(E_{kl})+x(E_{ij})(gx)(E_{kl}))\\ &+\frac{1}{2}((hx)(E_{ij})x(E_{kl})-(hx)(E_{ij})(gx)(E_{kl})). \end{aligned} \tag{3.6}$$

下面从 6 个方面讨论 X 的存在性.

情形 1 (g,h) 对应的自同构由 λ_1 决定.

此时 $P=Q=E_9$. 从而 $X^2=E_9$. 显然 $PX=X=XQ,\ XP=X=QX$ 是恒成立的. x 满足 (3.6) 意味着对任意 $i,j,k,l\in\{1,2,3\}$, 有 $x(E_{ij}E_{kl})=x(E_{ij})x(E_{kl})$ 成立. 既然 $M_3(\mathbb{C})$ 作为代数可由标准基生成. 因此, x 的作用必定为一个代数同构. 故存在一个可逆矩阵 T, 使得

$$x(a)=TaT^{-1},\quad a\in M_3(\mathbb{C}).$$

从而 $x^2(a)=T^2aT^{-2}=a,\ a\in M_3(\mathbb{C})m$, 即 $T^2\in\mathbb{C}E_3$. 从而在弱相似意义下可取 $T=E_3$ 或 $T=\mathrm{diag}(1,1,-1)$.

情形 2 (g,h) 对应的自同构由 λ_2 决定.

此时 $P=\mathrm{diag}(1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1)$, $Q=E_9$, 因此 $X^2=\frac{1}{2}(E_9+P+Q-PQ)=E_9$, 即 X 可对角化, X 的特征值为 ±1. 因此, X 必相似于某个

$$D_i=\mathrm{diag}(\underbrace{1,\cdots,1}_{i},\underbrace{-1,\cdots,-1}_{9-i}),\quad \text{其中 } i=0,1,\cdots,9.$$

若设 $S_i=\{TD_iT^{-1}\mid T\in GL_9(\mathbb{C})\}$ $(i=0,1,\cdots,9)$, 则 X 必属于某个 S_i.

为了进一步确定 X, 我们需要计算 S_i $(i=0,1,\cdots,9)$ 与矩阵方程组 $XP=QX,\ XQ=PX$ 解集 S 的交集. 显然 $S_0\cap S$ 和 $S_9\cap S$ 均为空集. 我们首先考虑 S_1 与 S 的交集.

如果 $X\in S_1$, 即存在一个 9 阶的可逆矩阵 T, 使得 $X=T\mathrm{diag}(1,1,1,1,1,1,1,1,-1)T^{-1}$. 从而

$$XP=X\mathrm{diag}(1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1),\quad QX=X.$$

显然 $XP\neq X$. 从而 $S_1\cap S$ 为空集. 同理可得 $S_i\cap S,\ i=2,3,\cdots,8$ 均为空集. 因此, 此时 $M_3(\mathbb{C})$ 上的 H-模代数结构不存在与之相容的 H_8-模代数结构.

情形 3 (g,h) 对应的自同构由 λ_3 决定.

由于 g,h 的作用是对称的, 与情形 2 的情况完全类似, 故满足条件的 X 也是不存在的.

情形 4 (g,h) 对应的自同构由 λ_4 决定.

此时 $P=Q=\mathrm{diag}(1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1)$. 从而

$$X^2=\frac{1}{2}(E_9+P+Q-PQ)=\mathrm{diag}(1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1).$$

设 $X=\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}$, 其中

$$X_{11}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&x_{14}&x_{15}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&x_{24}&x_{25}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&x_{34}&x_{35}\\x_{41}&x_{42}&x_{43}&x_{44}&x_{45}\\x_{51}&x_{52}&x_{53}&x_{54}&x_{55}\end{pmatrix},$$

$$X_{12}=\begin{pmatrix}x_{16}&x_{17}&x_{18}&x_{19}\\x_{26}&x_{27}&x_{28}&x_{29}\\x_{36}&x_{37}&x_{38}&x_{39}\\x_{46}&x_{47}&x_{48}&x_{49}\\x_{56}&x_{57}&x_{58}&x_{59}\end{pmatrix},$$

$$X_{21}=\begin{pmatrix} x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} \\ x_{71} & x_{72} & x_{73} & x_{74} & x_{75} \\ x_{81} & x_{82} & x_{83} & x_{84} & x_{85} \\ x_{91} & x_{92} & x_{93} & x_{94} & x_{95} \end{pmatrix},$$

$$X_{22}=\begin{pmatrix} x_{66} & x_{67} & x_{68} & x_{69} \\ x_{76} & x_{77} & x_{78} & x_{79} \\ x_{86} & x_{87} & x_{88} & x_{89} \\ x_{96} & x_{97} & x_{98} & x_{99} \end{pmatrix}.$$

从而 $PX=XQ$, $QX=XP$ 意味着 $X_{12}=0$, $X_{21}=0$. 因此, 对于 $(i,j)=(1,3)$, $(k,l)=(3,1)$, 有

$$L(1,3,3,1)=x(E_{13}E_{31})=x(E_{11})=x_{11}E_{11}+x_{21}E_{12}+x_{31}E_{21}+x_{41}E_{22}+x_{51}E_{33},$$

$$R(1,3,3,1)=-[x_{66}x_{88}E_{11}+x_{66}x_{98}E_{12}+x_{76}x_{88}E_{21}+x_{76}x_{98}E_{22}+(x_{86}x_{68}+x_{96}x_{78})E_{33}].$$

$L(1,3,3,1)=R(1,3,3,1)$ 意味着

$$x_{11}=-x_{66}x_{88},\quad x_{21}=-x_{66}x_{98},\quad x_{31}=x_{76}x_{88},$$
$$x_{41}=x_{76}x_{98},\quad x_{51}=-(x_{86}x_{68}+x_{96}x_{78}).$$

类似地, 可得以下等式:

$$x_{12}=-x_{66}x_{89},\quad x_{22}=-x_{66}x_{99},\quad x_{32}=-x_{76}x_{89},\quad x_{42}=-x_{76}x_{99},$$
$$x_{13}=-x_{67}x_{88},\quad x_{23}=-x_{67}x_{98},\quad x_{33}=-x_{77}x_{88},\quad x_{43}=-x_{77}x_{98},$$
$$x_{14}=-x_{67}x_{89},\quad x_{24}=-x_{67}x_{99},\quad x_{34}=-x_{77}x_{89},\quad x_{44}=-x_{77}x_{99},$$
$$x_{52}=-(x_{86}x_{69}+x_{96}x_{79}),\quad x_{53}=-(x_{87}x_{68}+x_{97}x_{78}),\quad x_{54}=-(x_{87}x_{69}+x_{97}x_{79}),$$
$$x_{66}x_{86}=0,\quad x_{66}x_{96}=0,\quad x_{76}x_{86}=0,\quad x_{76}x_{96}=0,\quad x_{86}x_{66}+x_{96}x_{76}=0,$$
$$x_{66}x_{87}=0,\quad x_{66}x_{97}=0,\quad x_{76}x_{87}=0,\quad x_{76}x_{97}=0,\quad x_{86}x_{67}+x_{96}x_{77}=0,$$
$$x_{67}x_{87}=0,\quad x_{67}x_{97}=0,\quad x_{77}x_{87}=0,\quad x_{77}x_{97}=0,\quad x_{87}x_{67}+x_{97}x_{77}=0,$$
$$x_{68}x_{88}=0,\quad x_{68}x_{98}=0,\quad x_{78}x_{88}=0,\quad x_{78}x_{98}=0,\quad x_{88}x_{68}+x_{98}x_{78}=0,$$
$$x_{68}x_{89}=0,\quad x_{68}x_{99}=0,\quad x_{78}x_{89}=0,\quad x_{78}x_{99}=0,\quad x_{88}x_{69}+x_{98}x_{79}=0,$$
$$x_{69}x_{88}=0,\quad x_{69}x_{98}=0,\quad x_{79}x_{88}=0,\quad x_{79}x_{98}=0,\quad x_{89}x_{68}+x_{99}x_{78}=0,$$
$$x_{15}=-x_{68}x_{86}=-x_{69}x_{87},\quad x_{25}=-x_{68}x_{96}=-x_{69}x_{97},\quad x_{35}=-x_{78}x_{86}=-x_{79}x_{87},$$
$$x_{45}=-x_{78}x_{96}=-x_{79}x_{97},\quad x_{55}=-(x_{88}x_{66}+x_{98}x_{76})=-(x_{89}x_{67}+x_{99}x_{77}).$$

上述等式可化简为

$$x_{68}=x_{69}=x_{78}=x_{79}=0, \tag{3.7}$$
$$x_{86}=x_{87}=x_{96}=x_{97}=0. \tag{3.8}$$

由此可设

$$X=\begin{pmatrix} -U\otimes V & 0 & 0 \\ 0 & -x_{88}x_{66}-x_{98}x_{76} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

其中 $U=\begin{pmatrix} x_{66} & x_{67} \\ x_{76} & x_{77} \end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix} x_{88} & x_{89} \\ x_{98} & x_{99} \end{pmatrix}$. 又由 $X^2=\mathrm{diag}(1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1)$, 可得

$$\begin{aligned}
&(x_{88}x_{66}+x_{98}x_{76})^2=1,\\
&\begin{pmatrix} x_{66}V & x_{67}V \\ x_{76}V & x_{77}V \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} (x_{66}^2+x_{67}x_{76})V^2 & (x_{67}x_{66}+x_{67}x_{77})V^2 \\ (x_{76}x_{66}+x_{76}x_{77})V^2 & (x_{77}^2+x_{67}x_{76})V^2 \end{pmatrix},\\
&U^2=\begin{pmatrix} x_{66}^2+x_{67}x_{76} & x_{67}x_{66}+x_{67}x_{77} \\ x_{76}x_{66}+x_{76}x_{77} & x_{77}^2+x_{67}x_{76} \end{pmatrix}=-E_2,\\
&V^2=\begin{pmatrix} x_{88}^2+x_{89}x_{98} & x_{88}x_{89}+x_{89}x_{99} \\ x_{88}x_{98}+x_{98}x_{99} & x_{99}^2+x_{89}x_{98} \end{pmatrix}=-E_2.
\end{aligned}$$

进一步整理可得

$$(x_{88}x_{66}+x_{98}x_{76})^2=1,\quad x_{66}^2+x_{67}x_{76}=-1,\quad x_{77}^2+x_{67}x_{76}=-1, \tag{3.9}$$

$$x_{67}x_{66}+x_{67}x_{77}=0,\quad x_{76}x_{66}+x_{76}x_{77}=0,\quad x_{88}^2+x_{89}x_{98}=-1, \tag{3.10}$$

$$x_{99}^2+x_{89}x_{98}=-1,\quad x_{88}x_{98}+x_{98}x_{99}=0,\quad x_{88}x_{89}+x_{89}x_{99}=0. \tag{3.11}$$

求解 (3.9)–(3.11), 并令 $u_{11}=x_{66}$, $v_{11}=x_{88}$, $u_{21}=x_{76}$, $v_{21}=x_{98}$, 可得

$$X=\begin{pmatrix} -U\otimes V & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

为了确定上述 X 决定的模代数的同构类. 设 f 为 $M_3(\mathbb{C})$ 的一个 H_8-模代数自同构, 对任意 $a\in M_3(\mathbb{C})$, $f(a)=waw^{-1}$. 则 $f(g(a))=g(f(a))$, $f(h(a))=h(f(a))$ 意味着 w 可取如下的形式

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & 0 \\ w_{21} & w_{22} & 0 \\ 0 & 0 & w_{33} \end{pmatrix}.$$

因此, 可设 f 在基 $(*)$ 下的矩阵为

$$W=\begin{pmatrix} W_1\otimes(W_1^{-1})^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} W_2^{-1}W_1 & 0 \\ 0 & W_2(W_1^{-1})^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

其中 $W_1=\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$, $W_2=(w_{33})$. 因为 $W_1UW_1^{-1}=U$, $U^2=-E_2$, $W_1VW_1^{-1}=V$, $V^2=-E_2$, 可得在同构意义下 U, V 可取 14 种情况中的一种.

情形 5 (g,h) 对应的自同构由 λ_5 决定.

此时,g, h 在基 $(*)$ 下的矩阵分别为

$$P=\mathrm{diag}(1,-1,-1,1,1,-1,1,-1,1)$$

和

$$Q=\mathrm{diag}(1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1),$$

从而

$$X^2=\frac{1}{2}(E_9+P+Q-PQ)=\mathrm{diag}(1,1,1,1,1,-1,1,-1,1).$$

设 $X=(x_{ij})_{9\times 9}$, 由 $PX=XQ$, $QX=XP$, 可得

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & x_{14} & x_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{27} & 0 & x_{29} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{37} & 0 & x_{39} \\ x_{41} & 0 & 0 & x_{44} & x_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{51} & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{66} & 0 & x_{68} & 0 \\ 0 & x_{72} & x_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{86} & 0 & x_{88} & 0 \\ 0 & x_{92} & x_{93} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

从而对 $(i,j,k,l)=(1,1,1,1)$, 可得

$$L(1,1,1,1)=x_{11}E_{11}+x_{41}E_{22}+x_{51}E_{33},$$
$$R(1,1,1,1)=x_{11}^2E_{11}+x_{41}^2E_{22}+x_{51}^2E_{33}.$$

由 $L(1,1,1,1)=R(1,1,1,1)$ 可得 $x_{11}=x_{11}^2$, $x_{41}=x_{41}^2$, $x_{51}=x_{51}^2$. 类似地, 可以得到下面的等式

$$x_{41}x_{72}=x_{72},\quad x_{51}x_{92}=x_{92},\quad x_{11}x_{66}=x_{66},\quad x_{51}x_{86}=x_{86},\quad x_{72}x_{93}=x_{41},$$
$$x_{92}x_{73}=x_{51},\quad x_{92}x_{44}=x_{92},\quad x_{92}x_{37}=-x_{86},\quad x_{73}x_{92}=x_{44},\quad x_{92}x_{45}=0,$$
$$x_{11}x_{27}=0,\quad x_{11}x_{29}=0,\quad x_{41}x_{37}=0,\quad x_{41}x_{39}=0,\quad x_{51}x_{55}=0,\quad x_{14}=0,$$
$$x_{51}x_{54}=0,\quad x_{51}x_{55}=0,\quad x_{51}x_{72}=0,\quad x_{51}x_{88}=0,\quad x_{51}x_{93}=0,\quad x_{27}=0,$$
$$x_{73}x_{86}=-x_{37},\quad x_{86}x_{68}=-x_{51},\quad x_{37}x_{29}=x_{44},\quad x_{15}^2=x_{15},\quad x_{11}=0,$$
$$x_{92}x_{39}=0,\quad x_{92}x_{45}=0,\quad x_{27}=0,\quad x_{66}=0.$$

通过化简上述等式, 可得

$$x_{11}=x_{14}=x_{27}=x_{39}=0, \tag{3.12}$$

$$x_{41}=x_{45}=x_{54}=x_{55}=0, \tag{3.13}$$

$$x_{66} = x_{88} = x_{72} = x_{93} = 0, \tag{3.14}$$

$$x_{73}x_{92} = x_{37}x_{92} = 1, \quad x_{37} = -x_{73}x_{86}. \tag{3.15}$$

又由 $X^2 = \mathrm{diag}(1,1,1,1,1,-1,1,-1,1)$, 可得

$$x_{37}x_{73} = 1, \quad x_{29}x_{92} = 1, \quad x_{86}x_{68} = -1. \tag{3.16}$$

总之

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{92}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{92} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{92}^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & x_{92}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{92}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{92} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (x_{92} \neq 0).$$

为了确定上述 X 决定的模的同构类. 设 f 为一个 H_8-模代数同构, 且对任意 $a \in M_3(\mathbb{C})$, 假设 $f(a) = waw^{-1}$, 则 $fg = gf$, $fh = hf$ 意味着 w 可取形式

$$\mathrm{diag}(w_1, 1, w_2), \quad \text{其中 } w_i \in \mathbb{C}^*,\ i = 1, 2.$$

因此, f 在这组基 $(*)$ 下的矩阵为

$$W = \mathrm{diag}(1, w_1, w_1^{-1}, 1, 1, w_1w_2^{-1}, w_2^{-1}, w_2w_1^{-1}, w_2).$$

x_{92} 取值为 c_1, c_2 时得到的矩阵分别记为 X_{c_1}, X_{c_2}. 以下我们确定 X_{c_1}, X_{c_2} 对应的模代数结构在什么情况下同构. 经计算可得 $WX_{c_1}W^{-1}$ 有形式

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_1w_2^{-1}c_1^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_2w_1^{-1}c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_1^2w_2^{-2}c_1^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & w_1w_2^{-1}c_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -w_2^2w_1^{-2}c_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2w_1^{-1}c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此, 对任意 $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$, 只要 $\frac{w_2}{w_1} = \frac{c_2}{c_1}$, 即有 $WX_{c_1}W^{-1} = X_{c_2}$. 也就是说, 由不同的 c 对

应的模代数结构必定是同构的. 为了方便起见, 我们可取 $c=1$, 即

$$X=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

情形 6 (g,h) 对应的自同构由 λ_6 决定.

由于 gh 的作用是对称的, 与情形 5 的证明过程类似, 可得 x 在基上的矩阵为

$$X=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&07&0 \end{pmatrix}.$$

综合以上讨论, 定理的结论得证.

参 考 文 献

[1] Beattie M. Brauer groups of H-module and H-dimodule algebras [M]. Kingston: Ontario Queen's University, 1976.

[2] Beattie M. A direct sum decomposition for the Brauer group of H-module algebras [J]. *J Algebra*, 1976, 43(2):686–693.

[3] Blattner J, Montgomery S. A duality theorem for Hopf module algebras [J]. *J Algebra*, 1985, 95(1):153–172.

[4] Bergen J, Cohen M. Actions of commutative Hopf algebras [J]. *Bull London Math Soc*, 1986, 18(2):159–164.

[5] Cohen M, Fischman D. Hopf algebra actions [J]. *J Algebra*, 1986, 100(2):363–379.

[6] Montgomery S. Hopf algebra and their actions on rings [M]//CBMS Series of AMS, 82, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1993.

[7] Caenepeel S, Oystaeyen F V, Zhang Y H. The Brauer group of Yetter-Drinfeld module algebras [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1997, 349(9):3737–3771.

[8] Duran F, Meseguer J. An extensible module algebra for Maude [J]. *Electron Notes Theor Comput Sci*, 1998, 15:174–195.

[9] Duran F, Meseguer J. Madue's module algebra [J]. *Sci Comput Programming*, 2007, 66(2):125–153.

[10] Chen Huixiang, Zhang Yinhuo. Four-dimensional Yetter-Drinfeld module algebras over H_4 [J]. *J Algebra*, 2006, 296(2):582–634.

[11] 赵士银, 周克元. 二阶全矩阵代数的模代数结构 [J]. 山东大学学报, 2013, 48(8): 24–29.

[12] Zhao Shiyin, Wang Yin, Chen Xiaojuan, et al. The kS_3-module algebra structures on $M_3(k)$ [EB/OL]. http://www. paper.edu.cn/releasepaper/content/2013.06–142.

[13] 高凤霞, 高雪琴, 杨士林. 二阶全矩阵代数的 H-模代数结构 [J]. 吉林大学学报 (自然科学版), 2015, 53(5):887–892.

[14] Sweedler M E. Hopf algebras [M]. New York: W A Benjamin, 1969.

[15] Masuoka A. Semisimple Hopf algebras of dimension 6, 8 [J]. *Israel J Math*, 1995, 92(1):361–373.

[16] Nastasescu C, Oystaeyen F V. Methods of graded rings [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2004:200–220.

[17] 张贤达. 矩阵分析与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.

The H_8-Module Algebra Structures on $M_3(\mathbb{C})$

GAO Fengxia[1] YANG Shilin[2]

[1]College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China; Basic Department, Henan Institute of Technology, Xinxiang 453003, Henan, China. E-mail: gaofengxiahappy@163.com

[2]Corresponding author. College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China. E-mail: slyang@bjut.edu.cn

Abstract Let H_8 be the unique non-commutative and non-cocommutative 8-dimensional semi-simple Hopf algebra, $\mathbb{C}[\mathbb{K}_4]$ be the group algebra of Klein-4 group. By the definitions of weak similarity and square root of the matrix, the authors describe and classify all $\mathbb{C}[\mathbb{K}_4]$-module algebra structures on $M_3(\mathbb{C})$. Then combining the relation between H_8 and $\mathbb{C}[\mathbb{K}_4]$, the authors give all H_8-module algebra structures on $M_3(\mathbb{C})$ up to isomorphism.

Keywords Full matrix algebra, Weak similarity, Module algebra

2000 MR Subject Classification 16T05, 15A04, 15A24

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 38 No. 2, 2017
by ALLERTON PRESS, INC., USA