数学年刊 A 辑
2020, 41(1):69–76
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2020.0005

Dirichlet 空间中的正交函数*

侯绳照[1] 卫淑云[1] 毋丽丽[1] 赵连阔[2]

提要 主要考虑了 Dirichlet 空间中的正交函数. 主要结论表明单位圆盘中的一个解析自映射是 Dirichlet 空间中的正交函数, 当且仅当其所对应的计数函数是本质径向的; 当且仅当其所对应的诱导测度是径向的. 作为主要结论的一个应用, 给出了单位圆盘上的单叶解析函数和闭单位圆盘上的解析函数是 Dirichlet 空间中正交函数的完全刻画.

关键词 Dirichlet 空间, 正交函数, 计数函数, 诱导测度
MR (2000) 主题分类 46E20, 46E22
中图法分类 O177.1
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2020)01-0069-08

1 引 言

设 $\mathcal{H}$ 是由解析函数构成的 Hilbert 空间, φ 是 $\mathcal{H}$ 中的一个有界解析函数. 若 $\{\varphi^k : k=0,1,2,\cdots\}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的正交集, 则称 φ 是 $\mathcal{H}$ 中的正交函数. 正交函数的概念来自 Rudin 在 1988 年的 MSRI (美国国家数学科学研究所) 会议上提出的一个猜想. Rudin 猜想是问在 Hardy 空间中, 正交函数是否只能是内函数的常数倍. 虽然在 φ 满足一些较弱的条件下, Bourdon[1], Cima, Korenblum 和 Stessin[2]等人证实了 Rudin 猜想, 但 Bishop[3] 和 Sundberg[4]独立地证明 Rudin 猜想并不成立. 尽管如此, 由此却引申出了一个新的研究课题: 如何刻画 Hardy 空间, 更一般地, 解析 Hilbert 空间中的正交函数? Bourdon[1] 利用 Nevanlinna 计数函数给出了 Hardy 空间中正交函数的完全刻画, Nakazi[5] 则给出了这类函数的 Nevanlinna 计数函数的表示形式. Guo 和 Zheng[6] 研究了 Bergman 空间中的正交函数, 得到相应于 Hardy 空间中的一些刻画, 并给出了单位圆盘中的单叶函数和闭单位圆盘上的解析函数是 Bergman 空间中正交函数的完全刻画.

关于 Dirichlet 空间中正交函数的刻画首次出现在文 [7] 中. 该文主要目的是通过 Dirichlet 空间中的正交函数来刻画 Dirichlet 空间中的等距复合算子, 其关于 Dirichlet 空间中正交函数的结论如下 (见 [7, 定理 2.1]).

设 φ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的解析自映射, $\varphi(0)=0$ 且 n_φ 是本质有界的, 这里 n_φ 是 φ 所对应的计数函数. 那么 φ 是 Dirichlet 空间中的正交函数, 当且仅当 n_φ 是本质径向的.

本文 2018 年 3 月 29 日收到, 2019 年 1 月 8 日收到修改稿.
[1]苏州大学数学学院, 江苏 苏州 215006.
E-mail: shou@suda.edu.cn; swei@suda.edu.cn; 2857145055@qq.com
[2]通信作者. 山西师范大学数学与计算机学院, 山西 临汾 041004. E-mail: liankuozhao@sina.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11571248, No. 11171245, No. 11771401) 的资助.

受其证明方法所限, 上述命题中有限制条件 “n_φ 是本质有界的”.

本文进一步研究 Dirichlet 空间中的正交函数, 通过计数函数和诱导测度, 给出了 Dirichlet 空间中正交函数的一些刻画. 作为主要结论的一个应用, 给出了单位圆盘上的单叶解析函数和闭单位圆盘上的解析函数是 Dirichlet 空间中正交函数的完全刻画. 我们的结论表明, 若闭单位圆盘上的解析函数是 Dirichlet 空间中的正交函数, 则其只能是有限 Blaschke 积的常数倍. 但对于单叶解析函数来说, 若其是 Dirichlet 空间中的正交函数当且仅当它是一个单叶全映射的常数倍, 这一结论是完全不同于 Hardy 空间 [1] 和 Bergman 空间 [6] 中的相应结论.

下面给出本文中用到的一些记号.

设 $\mathbb{D}$ 是开单位圆盘. $\mathrm{d}A$ 表示 $\mathbb{D}$ 上的正规化面积测度. 由 $\mathbb{D}$ 上满足条件

$$D(f)=\int_{\mathbb{D}}|f'|^2\mathrm{d}A<\infty$$

的解析函数 f 构成的空间称为 Dirichlet 空间.

$\mathcal{D}$ 中函数 f 赋予如下范数:

$$\|f\|=(|f(0)|^2+D(f))^{\frac{1}{2}}.$$

在此范数下, $\mathcal{D}$ 是一个 Hilbert 空间, 相应的内积定义为

$$\langle f,g\rangle=f(0)\overline{g(0)}+\int_{\mathbb{D}}f'(z)\overline{g'(z)}\mathrm{d}A(z),\quad f,g\in\mathcal{D}.$$

记

$$\mathcal{D}_0=\{f\in\mathcal{D}\ :\ f(0)=0\}.$$

我们注意到, 若 φ 是 $\mathcal{D}$ 中的正交函数, 则 $\varphi\in\mathcal{D}_0$, 且正交函数的常数倍还是正交函数. 因此只需考虑 $\mathbb{D}$ 上的属于 $\mathcal{D}_0$ 中的解析自映射是正交函数的刻画即可.

设 φ 是 $\mathbb{D}$ 的一个解析自映射, φ 的计数函数 n_φ 定义如下: 对任意 $w\in\mathbb{D}$, $n_\varphi(w)$ 等于集合 $\{z\in\mathbb{D}\ :\ \varphi(z)=w\}$ 的基数. 下面是与计数函数有关的两个常见结论, 我们将在后面用到.

引理 1.1 设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的解析自映射, 若 $u:\mathbb{D}\to[0,+\infty)$ 是一个 Borel 可测函数, 则有

$$\int_{\mathbb{D}}u(\varphi(z))|\varphi'(z)|^2\mathrm{d}A(z)=\int_{\mathbb{D}}u(w)n_\varphi(w)\mathrm{d}A(w).$$

引理 1.2 设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的解析自映射, $\varphi\in\mathcal{D}$ 当且仅当 $n_\varphi\in L^1(\mathbb{D})$.

设 f 是 $\mathbb{D}$ 上的一个函数. 若对于几乎处处所有的 $r\in[0,1)$ 以及几乎处处所有的 $\theta\in[0,2\pi]$, 有 $f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=f(r)$, 则称 f 是本质径向的. 设 μ 是 $\mathbb{D}$ 上的一个 Borel 测度. 若对 $\mathbb{D}$ 中的任意可测集 E 以及任意的 $\theta\in[0,2\pi]$, 有 $\mu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}E)=\mu(E)$, 则称 μ 是径向的.

2 正交函数, 计数函数与诱导测度

本节通过 φ 的计数函数 n_φ 和诱导函数 μ_φ 给出 φ 是 Dirichlet 空间中正交函数的刻画. 下面的结论去掉了文 [7, 定理 2.1] 中的限制条件, 从而推广了该结论.

定理 2.1 设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的解析自映射且 $\varphi \in \mathcal{D}_0$, φ 是 $\mathcal{D}$ 中的正交函数, 当且仅当 n_φ 是本质径向的.

证 因为 $\varphi \in \mathcal{D}$, 由引理 1.2, $n_\varphi \in L^1(\mathbb{D})$. 再由 Fubini 定理知, 对于几乎处处所有的 $r \in [0,1)$, $rn_\varphi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \in L^1[0,2\pi]$. 对任意正整数 k, 令

$$\varphi_k(r) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\ rn_\varphi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta.$$

对任意正整数 n 且 $n > k$, 由引理 1.1 得,

$$\begin{aligned}\langle \varphi^n, \varphi^{n-k}\rangle &= n(n-k)\int_{\mathbb{D}} \varphi(z)^{n-1}\overline{\varphi(z)}^{n-k-1}|\varphi'(z)|^2\mathrm{d}A(z)\\ &= n(n-k)\int_{\mathbb{D}} w^{n-1}\overline{w}^{n-k-1}n_\varphi(w)\mathrm{d}A(w)\\ &= \frac{n(n-k)}{\pi}\int_0^1 r^{2n-k-2}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\ rn_\varphi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\\ &= \frac{n(n-k)}{\pi}\int_0^1 r^{2n-2k-2}r^k\varphi_k(r)\mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{2.1}$$

设 φ 是 $\mathcal{D}$ 中的正交函数. 即 $\{\varphi^k:\ k=1,2,\cdots\}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的正交集. 由 (2.1) 得,

$$0 = \langle \varphi^n, \varphi^{n-k}\rangle = \frac{n(n-k)}{\pi}\int_0^1 r^{2n-2k-2}r^k\varphi_k(r)\mathrm{d}r.$$

取 $n = k+1$, 则有 $\int_0^1 r^k\varphi_k(r)\mathrm{d}r = 0$, 这表明 $r^k\varphi_k(r) \in L^1[0,1]$. 令

$$\rho_k(f) = \int_0^1 f(r)r^k\varphi_k(r)\mathrm{d}r, \quad \forall f \in C[0,1],$$

则 ρ_k 是 $C[0,1]$ 上的有界线性泛函. 由 (2.1) 知, 对任意正整数 n 且 $n > k$, 有

$$\rho_k(r^{2n-2k-2}) = \int_0^1 r^{2n-2k-2}r^k\varphi_k(r)\mathrm{d}r = 0.$$

由文 [8, 定理 15.26] 知, $\{r^{2n-2k-2} : n > k\}$ 的线性组合在 $C[0,1]$ 中是稠密的. 因此 ρ_k 是 $C[0,1]$ 上的零泛函. 从而对于几乎处处所有的 $r \in [0,1]$, $r^k\varphi_k(r) = 0$. 因而对于几乎处处所有的 $r \in [0,1]$, $\varphi_k(r) = 0$. 故对任意正整数 k 以及几乎处处所有的 $r \in [0,1)$, 有

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\ rn_\varphi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta = 0. \tag{2.2}$$

上式两边同时取共轭, 我们得到, 对于任意非零整数 k 以及几乎处处所有的 $r \in [0,1)$,

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\ rn_\varphi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta = 0. \tag{2.3}$$

由 (2.3) 得, 对于几乎处处所有的 $\theta \in [0,2\pi]$, $rn_\varphi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 是一个常数. 从而对于几乎处处所有的 $\theta \in [0,2\pi]$, $n_\varphi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 也是常数, 这表明 n_φ 是本质径向的.

另一方面, 如果 n_φ 是本质径向的, 那么由 (2.1) 知, 对任意正整数 n,k 且 $n>k$, 有

$$\langle\varphi^n,\varphi^{n-k}\rangle=\frac{n(n-k)}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^{2n-k-1}n_\varphi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}r=0.$$

因此 φ 是 $\mathcal{D}$ 中的正交函数.

设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的一个解析自映射且 $\varphi\in\mathcal{D}$, 则 $\varphi'\in L^2(\mathbb{D})$. φ 的诱导测度 μ_φ 定义为

$$\mathrm{d}\mu_\varphi(w)=\mathrm{d}v_\varphi(\varphi^{-1}(w)),$$

这里

$$\mathrm{d}v_\varphi(z)=|\varphi'(z)|^2\mathrm{d}A(z).$$

与文 [3, 引理 2.4] 相似, 下面的结论通过诱导测度给出了 $\mathcal{D}$ 中正交函数的刻画.

定理 2.2 设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的解析自映射且 $\varphi\in\mathcal{D}_0$, 则 φ 是 $\mathcal{D}$ 中的正交函数, 当且仅当 μ_φ 是径向的.

证 设 μ_φ 是径向的. 对任意正整数 m,n 且 $m\neq n$, 有

$$\begin{aligned}\langle\varphi^n,\varphi^m\rangle&=mn\int_{\mathbb{D}}\varphi(z)^{n-1}\overline{\varphi(z)}^{m-1}|\varphi'(z)|^2\mathrm{d}A(z)\\&=mn\int_{\mathbb{D}}\varphi(z)^{n-1}\overline{\varphi(z)}^{m-1}\mathrm{d}v_\varphi(z)\\&=mn\int_{\mathbb{D}}w^{n-1}\overline{w}^{m-1}\mathrm{d}v_\varphi(\varphi^{-1}(w))\\&=mn\int_{\mathbb{D}}w^{n-1}\overline{w}^{m-1}\mathrm{d}\mu_\varphi(w)\\&=mn\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{m+n-2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta}\mathrm{d}\mu_\varphi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).\end{aligned}$$

令

$$t=\theta-\frac{\pi}{n-m},$$

则

$$\langle\varphi^n,\varphi^m\rangle=mn\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{m+n-2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)t+\mathrm{i}\pi}\mathrm{d}\mu_\varphi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\frac{\pi}{n-m})}).$$

因为 μ_φ 是径向的, 则

$$\begin{aligned}\langle\varphi^n,\varphi^m\rangle&=mn\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{m+n-2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)t+\mathrm{i}\pi}\mathrm{d}\mu_\varphi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\\&=-mn\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{m+n-2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)t}\mathrm{d}\mu_\varphi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\\&=-\langle\varphi^n,\varphi^m\rangle,\end{aligned}$$

这表明 $\{\varphi^k:\ k=1,2,\cdots\}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的正交集. 因此 φ 是 $\mathcal{D}$ 中的正交函数.

另一方面, 若 φ 是 $\mathcal{D}$ 中的正交函数, 则对任意正整数 m,n 且 $m\neq n$, 有

$$0=\langle\varphi^n,\varphi^m\rangle=mn\int_{\mathbb{D}}z^{n-1}\overline{z}^{m-1}\mathrm{d}\mu_\varphi(z).$$

令

$$P(z,\overline{z})=\sum_{n,m}a_{n,m}z^n\overline{z}^m,$$

则

$$\int_{\mathbb{D}}P(z,\overline{z})\mathrm{d}\mu_\varphi(z)=\int_{\mathbb{D}}\sum_n a_{n,n}r^{2n}\mathrm{d}\mu_\varphi(z).$$

对任意复数 λ 且 $|\lambda|=1$, 有

$$\int_{\mathbb{D}}P(\lambda z,\overline{\lambda z})\mathrm{d}\mu_\varphi(z)=\int_{\mathbb{D}}\sum_n a_{n,n}r^{2n}\mathrm{d}\mu_\varphi(z).$$

因此

$$\int_{\mathbb{D}}P(z,\overline{z})\mathrm{d}\mu_\varphi(z)=\int_{\mathbb{D}}P(\lambda z,\overline{\lambda z})\mathrm{d}\mu_\varphi(z).$$

因为 $\{P(z,\overline{z})\}$ 在 $C(\overline{\mathbb{D}})$ 中稠密, 所以对任意 $g\in C(\overline{\mathbb{D}})$ 及复数 λ, $|\lambda|=1$,

$$\int_{\mathbb{D}}g(\lambda z)\mathrm{d}\mu_\varphi(z)=\int_{\mathbb{D}}g(z)\mathrm{d}\mu_\varphi(z).$$

即

$$\int_{\mathbb{D}}g(z)\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda z)=\int_{\mathbb{D}}g(z)\mathrm{d}\mu_\varphi(z).$$

因此 μ_φ 是径向的.

3 $\overline{\mathbb{D}}$ 上的解析函数和 $\mathbb{D}$ 上的单叶解析函数

本节我们应用定理 2.1 刻画在 Dirichlet 空间中, 或者在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上解析的, 或者在 $\mathbb{D}$ 上单叶解析的正交函数. 本节主要结论的证明需要用到下面的引理, 其思想来源于文 [6, 定理 3.2].

引理 3.1 设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的解析函数且 $\varphi(0)=0$, $\|\varphi\|_\infty=1$. 若 n_φ 是本质径向的, 则有下面的结论:

(a) φ 是一个全映射, 即集合 $\mathbb{D}\setminus\varphi(\mathbb{D})$ 的面积测度为零;

(b) 若 φ 是在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上解析, 则 φ 是一个有限 Blaschke 积.

证 (a) 因为 $\varphi(0)=0$ 且 $\|\varphi\|_\infty=1$, 所以对任意 $r\in[0,1)$, 存在 $\omega\in\varphi(\mathbb{D})$, 使得 $|\omega|=r$. 因为 $\varphi(\mathbb{D})$ 是开集且 n_φ 是本质径向的, 所以对几乎处处所有的 $r\in[0,1)$, n_φ 在圆圈 $C_r=\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}:\theta\in[0,2\pi]\}$ 上是本质常数. 因此 $C_r\setminus\varphi(\mathbb{D})$ 是一个 θ- 零测集. 故 $\mathbb{D}\setminus\varphi(\mathbb{D})$ 的面积测度是零.

(b) 令 $E=\mathbb{D}\setminus\varphi(\mathbb{D})$. 由 (a) 得, E 的面积测度是零. 因此

$$\partial\mathbb{D}\subset\overline{\mathbb{D}}=\overline{\varphi(\mathbb{D})\cup E}=\overline{\varphi(\mathbb{D})}.$$

因为 φ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上是连续的, 所以 $\varphi(\overline{\mathbb{D}})$ 是紧集. 又因为

$$\overline{\varphi(\mathbb{D})} \subset \overline{\varphi(\overline{\mathbb{D}})} = \varphi(\overline{\mathbb{D}}),$$

所以 $\partial\mathbb{D} \subset \varphi(\overline{\mathbb{D}})$. 由极大模定理得, $\partial\mathbb{D} \subset \varphi(\partial\mathbb{D})$. 令

$$\psi(z) = \varphi(z)\overline{\varphi\Big(\frac{1}{\overline{z}}\Big)},$$

则 ψ 在包含 $\partial\mathbb{D}$ 的某个圆环内解析. 由 $\partial\mathbb{D} \subset \varphi(\partial\mathbb{D})$, 存在无穷多点 $z \in \partial\mathbb{D}$, 使得

$$|\varphi(z)| = 1, \quad \Big|\varphi\Big(\frac{1}{\overline{z}}\Big)\Big| = 1.$$

因此 $|\psi(z)| = 1$. 从而在该开圆环中, $|\psi(z)| = 1$. 这表明 φ 是内函数. 又因为 $\varphi \in C(\overline{D})$, φ 一定是一个有限 Blaschke 积.

定理 3.1 设 φ 是 $\overline{\mathbb{D}}$ 上的解析函数且 $\varphi(0) = 0$, φ 是 $\mathcal{D}$ 中的正交函数, 当且仅当 φ 是一个有限 Blaschke 积的常数倍.

证 因为 φ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上解析, $\varphi \in \mathcal{D} \cap H^\infty$. 不失一般性, 设 $\|\varphi\|_\infty = 1$.

必要性由定理 2.1 和引理 3.1(b) 可得. 下面给出充分性的证明.

设 $\varphi(z) = \lambda B(z)$, 其中 λ 是一个常数, $B(z)$ 是一个 k 阶有限 Blaschke 积. 众所周知, 在 $\mathbb{D}$ 中, $n_B \equiv k$. 由定理 2.1 知, $B(z)$ 是 $\mathcal{D}$ 中的正交函数. 因此 φ 是 $\mathcal{D}$ 中的正交函数.

定理 3.2 设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的单叶解析自映射且 $\varphi(0) = 0$, φ 是 $\mathcal{D}$ 中的正交函数, 当且仅当 φ 是一个全映射的常数倍.

证 因为 φ 是单叶的, 故当 $w \in \varphi(\mathbb{D})$ 时, $n_\varphi(w) = 1$; 当 $w \in \mathbb{D} \setminus \varphi(\mathbb{D})$ 时, $n_\varphi(w) = 0$. 由引理 1.2 得, $\varphi \in \mathcal{D} \cap H^\infty$.

必要性由定理 2.1 和引理 3.1(a) 可得. 下面给出充分性的证明.

对任意正整数 n, m 且 $n \neq m$, 由引理 1.1 以及所设条件 "$\mathbb{D} \setminus \varphi(\mathbb{D})$ 的面积测度为零" 得,

$$\begin{aligned}\langle \varphi^n, \varphi^m \rangle &= mn \int_{\mathbb{D}} \varphi(z)^{n-1}\overline{\varphi(z)}^{m-1} |\varphi'(z)|^2 \mathrm{d}A(z) \\ &= mn \int_{\mathbb{D}} w^{n-1}\overline{w}^{m-1} n_\varphi(w) \mathrm{d}A(w) \\ &= mn \int_{\varphi(\mathbb{D})} w^{n-1}\overline{w}^{m-1} \mathrm{d}A(w) \\ &= mn \int_{\mathbb{D}} w^{n-1}\overline{w}^{m-1} \mathrm{d}A(w) \\ &= 0.\end{aligned}$$

因此 φ 是 $\mathcal{D}$ 中的正交函数.

注 3.1 设 E 是 $\mathbb{D}$ 中有限或可数条互不相交弧段的并, 且 $0 \in \mathbb{D} \setminus E$. 由 Riemann 映射定理, 存在 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D} \setminus E$ 上的单叶解析函数 φ_0. 进一步, 我们可以选取 $\mathbb{D}$ 的 Mobius 变换

B, 使得 $\varphi(0)=\varphi_0(B(0))=0$. φ 是 $\mathbb{D}$ 上的一个单叶解析全映射且 $\varphi(0)=0$. 由定理 3.2 知, φ 是 $\mathcal{D}$ 中的正交函数. 但 φ 不是一个有限 Blaschke 积.

在本节最后, 我们指出 $\mathcal{D}$ 中正交函数与 $\mathcal{D}$ 上等距复合算子之间的联系. 设 φ 是 $\mathbb{D}$ 的一个解析自映射. 由 φ 定义的 $\mathcal{D}$ 上的复合算子如下:

$$C_\varphi f=f\circ\varphi,\quad f\in\mathcal{D}.$$

文 [9] 中的主要定理表明 $\mathcal{D}$ 上的复合算子 C_φ 是等距的, 当且仅当 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的一个单叶解析全映射且 $\varphi(0)=0$. 结合定理 3.2, 我们得到下面的结论.

推论 3.1　设 φ 是 $\mathbb{D}$ 的一个解析自映射. $\mathcal{D}$ 上的复合算子 C_φ 是等距的, 当且仅当 φ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个单叶正交函数且 $\|\varphi\|_\infty=1$.

致谢　审稿专家和编辑对本文提出了非常好的修改意见, 作者在此表示衷心感谢.

参 考 文 献

[1] Bourdon P S. Rudin's orthogonality problem and the Nevanlinna counting function [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1997, 125:1187–1192.

[2] Cima J A, Korenblum B, Stessin M. On Rudin's orthogonality and independence problem, preprint.

[3] Bishop C. Orthogonal functions in H^∞ [J]. *Pacific J Math*, 2005, 220:1–31.

[4] Sundberg C. Measures induced by analytic functions and a problem of Walter Rudin [J]. *J Amer Math Soc*, 2003, 16:69–90.

[5] Nakazi T. The Nevanlinna counting functions for Rudin's orthogonal functions [J]. *Proc Amer Math Soc*, 2003, 131:1267–1271.

[6] Guo K, Zheng D. Rudin orthogonality problem on the Bergman space [J]. *J Funct Anal*, 2011, 261:51–68.

[7] Chacón G A, Chacón G R, Giménez J. Composition operators on the Dirichlet space and related problems [J]. *Bol Asoc Mat Venez*, 2006, 13:155–164.

[8] Rudin W. Real and complex analysis (2nd edition) [M]. McGraw-Hill: New York, 1974.

[9] Martin M J, Vukotić D. Isometries of the Dirichlet space among the composition operators [J]. *Proc Amer Math Soc*, 2006, 134:1701–1705.

Orthogonal Functions in the Dirichlet Space

HOU Shengzhao[1] WEI Shuyun[1] WU Lili[1] ZHAO Liankuo[2]

[1]School of Mathematical Sciences, Soochow University, Suzhou 215006, Jiangsu, China. E-mail: shou@suda.edu.cn; swei@suda.edu.cn; 2857145055@qq.com
[2]Corresponding author. School of Mathematics and Computer Science, Shanxi Normal University, Linfen 041004, Shanxi, China.
E-mail: liankuozhao@sina.com

Abstract This paper focuses on orthogonal functions in the Dirichlet space. The authors show that an analytic self-map of the unit disk is orthogonal in the Dirichlet space if and only if the corresponding counting function is essential radial, and if and only if the corresponding induced measure is radial. As an application, the authors completely characterize orthogonal functions analytic in a neighborhood of the closed unit disk or univalent in the unit disk.

Keywords Dirichlet space, Orthogonal function, Counting function, Induced measure

2000 MR Subject Classification 46E20, 46E22

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 41 No. 1, 2020
by ALLERTON PRESS, INC., USA