数学年刊 A 辑
2020, 41(1):39–52
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2020.0003

具有两个 p' 维非线性不可约特征标的非可解群

刘　洋[1]　鲁自群[2]　张继平[3]

提要 McKay 猜想是有限群表示理论中的一个重要问题. 本文考虑了具有两个 p' 维不可约特征标的非可解群群 G, 并证明了 McKay 猜想对此类群成立. 更进一步, 当 p 为奇素数时, 下面结果成立: $p=3$, $G\cong \mathrm{PSL}_2(7)$ 或存在一个正规 2-群 N, 满足 $G/N\cong \mathrm{PSL}_2(5)$.

关键词 McKay 猜想, 特征标维数, 非可解群
MR (2000) 主题分类 20C15, 20C33
中图法分类 O152
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2020)01-0039-14

1 引　言

设 G 为有限群, p 为素数. 令 $\mathrm{Irr}(G)$ 为 G 的全体不可约特征标的集合, $\mathrm{Irr}_{p'}(G)$ 为上述集合中的 p'-维不可约特征标. 著名的 McKay 猜想声称, $|\mathrm{Irr}_{p'}(G)|=|\mathrm{Irr}_{p'}(N_G(P))|$, 其中 P 为 G 的 Sylow$p$-子群且 $N_G(P)$ 为 P 的正规化子. 当 G 是可解群时, 该问题已经证明. 近年来, 在对非可解群的研究中一个重要的进展来自于 Isaacs, Malle 和 Navarro. 他们在文 [1] 中提出单群的诱导 McKay 条件, 并证明如果所有的非交换单群满足该条件, 则猜想成立. 目前, 很多单群已经被验证满足诱导 McKay 条件, 例如零散单群、交错群以及部分 Lie 型单群 (见 [2–5]). 最近, Malle 和 Späth 在文 [6] 中得到更深刻的结果, 他们证明了当 $p=2$ 时,McKay 猜想成立.

本文主要考察具有较少 p'-维非线性不可约特征标的非可解群 G, 在得到群结构方面的信息后, 验证了 McKay 猜想对于此类群成立. 记 $\mathrm{Irr}_1(G,p')$ 为 $\mathrm{Irr}(G,p')$ 中的非线性特征标, $\mathrm{cd}_1(G,p')=\{\chi(1)\mid \chi\in \mathrm{Irr}_1(G,p')\}$. 如果 $|\mathrm{Irr}_1(G,p')|=0$, 称群 G 为 Thompson 群. 根据文 [7, 命题 25.9] 及其后面的论述可知, Thompson 群均为可解群. Kazarin 和 Berkovich 在文 [8] 中证明了如果群 G 满足 $|\mathrm{Irr}_1(G,p')|=1$, 则 G 为可解群. 因此, 我们考虑满足 $|\mathrm{Irr}_1(G,p')|=2$ 的非可解群 G, 即文 [8] 中的研究问题 3.

首先, 我们考虑满足上述条件的单群, 得到如下结果.

定理 1.1 如果非交换单群 S 满足 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')|=2$, 则 $p=3$ 且 $S\cong \mathrm{PSL}_2(5)$ 或 $\mathrm{PSL}_2(7)$.

本文 2018 年 5 月 25 日收到.
[1]通信作者. 天津师范大学数学科学学院, 天津 300387. E-mail: liuyang@math.pku.edu.cn
[2]清华大学数学科学系, 北京 100184. E-mail: zlu@tsinghua.edu.cn
[3]北京大学北京国际数学研究中心, 北京 100871. E-mail: jzhang@pku.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11701421, No. 11871011, No. 11871292, No. 11631001) 和天津师范大学引进人才基金项目 (No. 5RL145) 的资助.

在上述定理的基础上, 可以验证 McKay 猜想对于本文所研究的非可解群成立.

定理 1.2 McKay 猜想对满足 $|\mathrm{Irr}_1(G,p')|=2$ 的非可解群 G 成立.

更进一步, 我们在对满足上述条件的群进行更细致的分析后, 得到了群结构更精确的刻画.

定理 1.3 如果 G 为满足 $|\mathrm{Irr}_1(G,p')|=2$ 的非可解群且 p 为奇素数, 则 $p=3$ 且 $G\cong \mathrm{PSL}_2(7)$ 或存在一个正规 2-子群 N, 满足 $G/N\cong \mathrm{PSL}_2(5)$.

记 $C(n)$ 为 n 阶循环群, $E(p^n)$ 为 p^n 阶初等交换 p-群, $ES(m,p)$ 为 p^{1+2m} 阶超特殊 p-群, $Q(8)$ 为四元数群, (A,B) 为 Frobenius 群, 其中 B 为核, A 为补, $G^{(n)}$ 为 G 的 n-次换位子群.

2 准备工作

如果非负整数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 满足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=n$ 且 $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\cdots\geqslant\alpha_k$, 则称整数组 $[\alpha]=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$ 为 n 的一个划分, α_i 为 α 的部分. 令 $m_i=|\{r\in\{1,2,\cdots,k\}\mid \alpha_r=i\}|$, 则 α 可记作 $\alpha=(n^{m_n},(n-1)^{m_{n-1}},\cdots,1^{m_1})$. 特别地, 当 $m_i=0$ 时, 可以将 i^{m_i} 省略. 对于任意的划分 $[\alpha]$, 存在一个与其相关的 n 的划分 $[\alpha]^*$: $n=\alpha_1^*+\alpha_2^*+\cdots+\alpha_s^*$, 其中 $\alpha_1^*=k$ 且 $\alpha_i^*=|\{j\in N\mid \alpha_j\geqslant i\}|$. 如果 $[\alpha]=[\alpha]^*$, 称划分 $[\alpha]$ 是自相关的. 下面介绍一个对称群表示理论中的基本结果[9].

引理 2.1 对称群 S_n 的所有不可约表示与 n 的所有划分一一对应. 设 $[\alpha]$ 为 n 的一个划分, $\chi=\chi^{[\alpha]}$ 为 S_n 的对应于 $[\alpha]$ 的不可约特征标, 则下列结论成立:

(i)

$$\chi(1)=\frac{n!}{\prod\limits_{(i,j)}h(i,j)},$$

其中 $h(i,j)$ 是 (i,j)-hook 数.

(ii) 如果 $[\alpha]\neq[\alpha]^*$, 则 $\chi_{A_n}\in\mathrm{Irr}(A_n)$.

(iii) 如果 $[\alpha]$ 是自相关的, 则 $\chi_{A_n}=\gamma_1+\gamma_2$, 其中 γ_1,γ_2 是 A_n 的具有相同维数的互异不可约特征标.

引理 2.2 [10, 推论11.29] 设 $N\trianglelefteq G$, $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ 且 θ 为 χ_N 的一个不可约成分, 则 $\chi(1)/\theta(1)$ 整除 $|G:N|$.

接下来我们介绍几个非交换单群的不可约特征标可以扩充到其自同构群上的结果.

引理 2.3 [11, 定理3, 定理4] 如果非交换单群 S 不是 Lie 型单群, 则 S 中存在两个可以扩充到 $\mathrm{Aut}(S)$ 上的维数互素的非线性不可约特征标.

引理 2.4 设 S 是定义特征为 p 的非交换 Lie 型单群, 记 St 为 S 的 Steinberg 特征标, 则 St 可以扩充至 $\mathrm{Aut}(S)$ 并且其维数为 $|S|_p$.

证 St 可以扩充的性质是 Schmid 的结果 (见 [12–13]), 其维数公式参考文 [14] 中的定理 6.4.7.

引理 2.5 [11, 引理5] 设 $N = S_1 \times \cdots \times S_t$ 是 G 的一个极小正规子群, 其中 $S_i \cong S$, S 为一个非交换单群, $i = 1, \cdots, t$. 令 A 为 S 的自同构群. 如果 $\sigma \in \mathrm{Irr}(S)$ 可以扩充至 A, 则 $\sigma \times \cdots \times \sigma \in \mathrm{Irr}(N)$ 可以扩充至 G.

如果有限群的非线性不可约特征标个数很少, 其群结构会非常特殊.

引理 2.6 [15–16] 给定一个有限群 G. 如果 $|\mathrm{Irr}_1(G)| = 1$, 则 $G \in \{ES(m,2), (C(l^n - 1), E(l^n))\}$. 如果 $|\mathrm{Irr}_1(G)| = 2$, 则

$$G \in \Big\{\Big(C\Big(\frac{l^n-1}{2}\Big), E(l^n)\Big), (Q(8), E(9)), ES(m,3)\Big\},$$

或 G 的阶为 2^{2m} 且满足下述条件之一:

(i) $|Z(G)| = 4,\ |G'| = 2$;

(ii) $|Z(G)| = 2,\ Z(G) \not\leq G'$ 且 $G/Z(G) \cong (C(l^n - 1), E(l^n))$.

下面介绍一个判断正规子群是否可解的定理.

引理 2.7 设 $N \trianglelefteq G$, 如果 $\mathrm{cd}(G \mid N') = \{\chi(1) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G), N' \not\subseteq \ker(\chi)\}$ 中的每一个数均被素数 p 整除, 则 N 可解且具有正规 p-补.

证 见文 [17] 中的定理 D.

3　具有较少 p'-维不可约特征标的单群

本节我们主要考虑具有两个 p'-维不可约特征标的单群. 因为 Lie 型单群的幂幺特征标维数均被定义特征整除, 所以我们对此类单群的研究主要集中于半单特征标.

引理 3.1 设 S 是一个 Lie 型单群, 其定义特征 p 为奇素数, 则 $|\mathrm{cd}_1(S, p')| \geqslant 3$, 除非 $S \cong \mathrm{PSL}_2(5)$.

证 假设 q 为 p 的方幂.

如果 $S \cong \mathrm{PSL}_2(q)$, 由文 [18] 中 38 节的结果知 $\mathrm{cd}(S) = \{1, q-1,\ q,\ q+1, \frac{q+\varepsilon}{2}\}$ $(\varepsilon = (-1)^{\frac{q-1}{2}}\ )$, 引理成立.

如果 $S \cong \mathrm{PSL}_3(q)$, 由文 [19] 知 $(q-1)^2(q+1),\ (q-1)(q^2+q+1),\ (q+1)(q^2+q+1) \in \mathrm{cd}(S)$, 引理成立.

如果 $S \cong \mathrm{PSL}_{l+1}(q),\ l \geqslant 3$. 令 $G = \mathrm{PGL}_{l+1}(q)$, 则 $|G : S| = d = (l+1, q-1)$. 由文 [20] 中引理 2.2 的证明过程知, G 有 3 个不可约特征标 χ_1, χ_2, χ_3, 其维数分别是:

$$\chi_1(1) = (q-1)(q^2-1)(q^3-1)\cdots(q^{l-1}-1)(q^l-1),$$
$$\chi_2(1) = (q^2-1)(q^3-1)\cdots(q^{l-1}-1)(q^{l+1}-1),$$
$$\chi_3(1) = \frac{(q^2-1)(q^3-1)\cdots(q^l-1)(q^{l+1}-1)}{(q^2-1)(q^{l-1}-1)}.$$

分别取 $(\chi_1)_S, (\chi_2)_S, (\chi_3)_S$ 的一个不可约分支 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. 由引理 2.2 知 $\theta_1(1), \theta_2(1), \theta_3(1)$ 为不同的 p'-数, 引理成立.

如果 $S \cong \mathrm{PSU}_3(q^2)$, 则 $(q-1)(q+1)^2$, $(q-1)(q^2-q+1)$, $(q+1)(q^2-q+1) \in \mathrm{cd}(S)$[19], 引理成立.

如果 $S \cong \mathrm{PSU}_4(3^2)$, $p=3$. $\mathrm{PU}_4(3^2)$ 有 3 个不可约特征标 χ_1, χ_2, χ_3, 其维数分别为 20, 70, 112[21]. 分别取 $(\chi_1)_S$, $(\chi_2)_S$, $(\chi_3)_S$ 的一个不可约分 θ_1, θ_2, θ_3. 由引理 2.2 知 $\theta_1(1)$, $\theta_2(1)$, $\theta_3(1)$ 为不同的 p'-数, 引理成立.

如果 $S \cong \mathrm{PSU}_{l+1}(q^2)$, 其中 $l \geqslant 3$ 且 $(l,q) \neq (3,3)$. 令 $G = \mathrm{PU}_{l+1}(q^2)$, 则 $|G:S| = d = (l+1, q+1)$. 由文 [20] 引理 2.3 的证明过程知, G 有 3 个不可约特征标 χ_1, χ_2, χ_3, 满足:

$$\begin{aligned}
\chi_1(1) &= (q+1)(q^2-1)(q^3+1)\cdots(q^{l-1}-(-1)^{l-1})(q^l-(-1)^l),\\
\chi_2(1) &= (q^2-1)(q^3+1)\cdots(q^{l-1}-(-1)^{l-1})(q^{l+1}-(-1)^{l+1}),\\
\chi_3(1) &= \frac{(q^2-1)(q^3+1)\cdots(q^l-(-1)^l)(q^{l+1}-(-1)^{l+1})}{(q^2-1)(q^{l-1}-(-1)^{l-1})}.
\end{aligned}$$

分别取 $(\chi_1)_S, (\chi_2)_S, (\chi_3)_S$ 的一个不可约分支 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, 则 $\theta_1(1), \theta_2(1), \theta_3(1)$ 为不同的 p'-数, 引理成立.

如果 $S \cong \mathrm{PSp}_4(q)$, 则 $(q^2-1)^2$, $(q-1)(q^2+1)$, $(q+1)(q^2+1) \in \mathrm{cd}(S)$[22], 引理成立.

对于其他类型的典型单群, 其伴随型群的半单特征标维数在文 [23] 第 8 节中已有刻画.

如果 S 为 $B_l(q)$ 型, $l \geqslant 3$. 记 χ_1 为对应于划分对 $\lambda = (1^l)$, $\mu = (0)$, $\xi^{(1)} = (0)$, $\eta^{(1)} = (l)$ 的 $\mathrm{SO}_{2l+1}(q)$ 的半单特征标, χ_2 为对应于划分对 $\lambda = (1^{l-1})$, $\mu = (1^l)$, $\xi^{(1)} = (0)$, $\eta^{(1)} = (l-1)$, $\zeta^{(1)} = (1)$ 的半单特征标, χ_3 为对应于划分对 $\lambda = (1^{l-1})$, $\mu = (1^l)$, $\xi^{(1)} = (1)$, $\eta^{(1)} = (l-2)$, $\zeta^{(1)} = (1)$ 的半单特征标.

如果 S 为 $C_l(q)$ 型, $l \geqslant 3$. 记 χ_1 为对应于划分对 $\lambda = (1^l)$, $\mu = (0)$, $\xi^{(1)} = (0)$, $\eta^{(1)} = (l)$ 的 $\mathrm{PCSp}_{2l}(q)$ 的半单特征标, χ_2 为对应于划分对 $\lambda = (1^l)$, $\mu = (0)$, $\xi^{(1)} = (1)$, $\eta^{(1)} = (l-1)$ 的半单特征标, χ_3 为对应于划分对 $\lambda = (1^{l-2})$, $\mu = (2^l)$, $\xi^{(1)} = (0)$, $\eta^{(1)} = (l-2)$, $\zeta^{(2)} = (1)$, $\omega^{(2)} = (0)$ 的半单特征标.

如果 S 为 $D_l(q)$ 型, $l \geqslant 4$. 记 χ_1 为对应于划分对 $\lambda = (1^l)$, $\mu = (0)$, $\xi^{(1)} = (0)$, $\eta^{(1)} = (1, l-1)$ 的 $\mathrm{P}(\mathrm{CO}_{2l}(q)^0)$ 的半单特征标, χ_2 为对应于划分对 $\lambda = (1^l)$, $\mu = (0)$, $\xi^{(1)} = (1)$, $\eta^{(1)} = (l-1)$ 的半单特征标, χ_3 为对应于划分对 $\lambda = (1^{l-2})$, $\mu = (2^l)$, $\xi^{(1)} = (0)$, $\eta^{(1)} = (l-2)$, $\zeta^{(2)} = (1)$, $\omega^{(2)} = (0)$ 的半单特征标.

如果 S 为 ${}^2D_l(q^2)$, $l \geqslant 4$. 记 χ_1 为对应于划分对 $\lambda = (1^l)$, $\mu = (0)$, $\xi^{(1)} = (0)$, $\eta^{(1)} = (1, l-1)$ 的 $\mathrm{P}(\mathrm{CO}_{2l}^-(q)^0)$ 的半单特征标, χ_2 为对应于划分对 $\lambda = (1^l)$, $\mu = (0)$, $\xi^{(1)} = (1)$, $\eta^{(1)} = (l-1)$ 的半单特征标, χ_3 为对应于划分对 $\lambda = (1^{l-2})$, $\mu = (2^l)$, $\xi^{(1)} = 0$, $\eta^{(1)} = (l-2)$, $\zeta^{(2)} = (1)$, $\omega^{(2)} = (0)$ 的半单特征标.

表 1　p 为定义特征

单群 S	伴随型群 G	维数	$\lvert G:S\rvert$
$B_l(q), l\geqslant 3$	G	$\chi_1(1)=\frac{(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2(l-1)}-1)(q^{2l}-1)}{q^l+1}$ $\chi_2(1)=\frac{(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2(l-1)}-1)(q^{2l}-1)}{(q^2-1)(q^{l-1}+1)}$ $\chi_3(1)=\frac{(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2(l-1)}-1)(q^{2l}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^{l-2}+1)}$	2
$C_l(q), l\geqslant 3$	G	$\chi_1(1)=\frac{(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2(l-1)}-1)(q^{2l}-1)}{q^l+1}$ $\chi_2(1)=\frac{(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2(l-1)}-1)(q^{2l}-1)}{(q-1)(q^{l-1}+1)}$ $\chi_3(1)=\frac{(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2(l-1)}-1)(q^{2l}-1)}{(q^2-1)^2(q^{l-2}+1)}$	2
$D_l(q), l\geqslant 4$	G	$\chi_1(1)=\frac{(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2(l-1)}-1)(q^{l}-1)}{(q+1)(q^{l-1}+1)}$ $\chi_2(1)=\frac{(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2(l-1)}-1)(q^{l}-1)}{(q-1)(q^{l-1}+1)}$ $\chi_3(1)=\frac{(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2(l-1)}-1)(q^{l}-1)}{(q^2-1)^2(q^{l-2}+1)}$	$(4,\ q^l-1)$
${}^2D_l(q^2), l\geqslant 4$	G	$\chi_1(1)=\frac{(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2(l-1)}-1)(q^{l}+1)}{(q+1)(q^{l-1}+1)}$ $\chi_2(1)=\frac{(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2(l-1)}-1)(q^{l}+1)}{(q-1)(q^{l-1}+1)}$ $\chi_3(1)=\frac{(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2(l-1)}-1)(q^{l}+1)}{(q^2-1)^2(q^{l-2}+1)}$	$(4,\ q^l+1)$
$G_2(q)$	G	$(q^2+q+1)(q^2-q+1)$ $(q-1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)$ $(q+1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)$	1
${}^2G_2(q^2)$	G	$(q^2-\sqrt{3}q+1)(q^2+\sqrt{3}q+1)$ $(q-1)(q+1)(q^2+1)(q^2-\sqrt{3}q+1)$ $(q-1)(q+1)(q^2-\sqrt{3}q+1)(q^2+\sqrt{3}q+1)$	1
$F_4(q)$	G	$(q^2+q+1)(q^2-q+1)(q^4-q^2+1)$ $(q-1)(q^2+1)(q^4+1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)(q^4-q^2+1)$ $(q+1)(q^2+1)(q^4+1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)(q^4-q^2+1)$	1
${}^3D_4(q^3)$	G	$\Phi_1\Phi_3^2\Phi_6\Phi_{12}$ $\Phi_2\Phi_3\Phi_6^2\Phi_{12}$ $\Phi_2\Phi_6^2\Phi_{12}$	1
$E_6(q)$	G	$\Phi_3^2\Phi_6\Phi_9\Phi_{12}$ $\Phi_3\Phi_4\Phi_6\Phi_8\Phi_9\Phi_{12}$ $\Phi_1\Phi_3\Phi_4\Phi_6\Phi_8\Phi_9\Phi_{12}$	$(3,\ q-1)$
${}^2E_6(q^2)$	G	$\Phi_3\Phi_6^2\Phi_{12}\Phi_{18}$ $\Phi_3\Phi_4\Phi_6\Phi_8\Phi_{12}\Phi_{18}$ $\Phi_1\Phi_3\Phi_4\Phi_6\Phi_8\Phi_{12}\Phi_{18}$	$(3,\ q+1)$
$E_7(q)$	G	$\Phi_1^3\Phi_3\Phi_5\Phi_7\Phi_9\Phi_{14}$ $\Phi_2^3\Phi_6\Phi_7\Phi_{10}\Phi_{14}\Phi_{18}$ $\Phi_3\Phi_6\Phi_7\Phi_9\Phi_{12}\Phi_{14}\Phi_{18}$	$(2,\ q-1)$
$E_8(q)$	G	$\Phi_3\Phi_4^2\Phi_5\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}\Phi_{15}\Phi_{20}\Phi_{24}\Phi_{30}$ $\Phi_1\Phi_3\Phi_4^2\Phi_5\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}\Phi_{15}\Phi_{20}\Phi_{24}\Phi_{30}$ $\Phi_2\Phi_3\Phi_4^2\Phi_5\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}\Phi_{15}\Phi_{20}\Phi_{24}\Phi_{30}$	1

对于上面 4 种类型的典型群, χ_1,χ_2,χ_3 的维数见表 1. 如果 S 为例外型的 Lie 型单群, 由文 [21, 24] 知存在 $\chi_1,\chi_2,\chi_3\in\mathrm{Irr}(G)$(维数见表 1). 分别取 $(\chi_1)_S$, $(\chi_2)_S$, $(\chi_3)_S$ 的一个不可约分支 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$. 容易验证 $\theta_1(1),\theta_2(1),\theta_3(1)$ 为不同的 p'-数, 引理成立.

引理 3.2 如果 p 为 G 非交换单群的素因子, 则 $\mathrm{Irr}_1(G,p')$ 中至少有两个维数不同的不可约特征标.

证 见文 [8] 中的定理 B.

定理 1.1 的证明 首先我们证明 p 是奇素数. 如果 $p=2$ 且 $|\mathrm{Irr}_1(S,2')|=2$. 令 $\mathrm{Irr}_1(S,2')=\{\chi_1,\chi_2\}$, 则 $|S|=1+(\chi_1(1))^2+(\chi_2(1))^2+\sum\limits_{\beta\in\mathrm{Irr}_1(S,2)}(\beta(1))^2$. 因为 $|S|\equiv 0\bmod 4$, $(\chi_1(1))^2\equiv 1\bmod 4$ 且 $(\chi_2(1))^2\equiv 1\bmod 4$, 得到矛盾. 因此 p 为奇素数.

如果 S 是零散单群, 由文 [25] 知命题成立.

如果 S 是交错群 A_n. 因为 $A_5\cong\mathrm{PSL}_2(5)$, 我们可以假设 $n\geqslant 6$. 令 $\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4,\chi_5,\chi_6,\chi_7$ 为 S_n 的对应于划分 $(n-1,1)$, $(n-2,2)$, $(n-2,1^2)$, $(n-3,3)$, $(n-3,1^3)$, $(n-3,2,1)$, $(n-4,2,1^2)$ 的不可约特征标. 由引理 2.1 可知: $\chi_1(1)=n-1$, $\chi_2(1)=\frac{n(n-3)}{2}$, $\chi_3(1)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, $\chi_4(1)=\frac{n(n-1)(n-5)}{6}$, $\chi_5(1)=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$, $\chi_6(1)=\frac{n(n-2)(n-4)}{3}$, $\chi_7(1)=\frac{n(n-2)(n-3)(n-5)}{8}$.

记 n_p 为正整数 n 的 p-部分. 如果 $n\geqslant 9$, 上述划分都是非自相关的. 由引理 2.1 知, $\chi_i(1)\in\mathrm{cd}(A_n)$. 又因为 $(\chi_1(1),\chi_7(1))_p=1$, $(\chi_2(1),\chi_3(1))=1$, $(\chi_4(1),\chi_5(1),\chi_6(1))=1$, 所以当 $n\geqslant 9$ 时, $|\mathrm{Irr}_1(A_n,p')|\geqslant 3$. 剩余的 A_6,A_7,A_8 可通过文 [25] 直接验证.

下面假设 S 是 Lie 型单群, 其定义特征为素数 r. 由引理 3.1 知 $r\neq p$. 从而 Steinberg 特征标 $St\in\mathrm{Irr}_1(S,p')$.

如果 $S\cong\mathrm{PSL}_2(q)$. 由文 [18] 中 38 节的结论知, 当 q 为偶数时, $q+1$ 维和 $q-1$ 维特征标的重数分别为 $\frac{q-2}{2}$ 和 $\frac{q}{2}$; 当 q 为奇数时, $q+1$ 维, $q-1$ 维和 $\frac{q+\varepsilon}{2}$ $(\varepsilon=(-1)^{\frac{q-1}{2}})$ 维特征标的重数分别为 i, j, 2, 其中 i 是小于等于 $\frac{q-3}{2}$ 的偶数个数, j 小于等于 $\frac{q-1}{2}$ 的偶数个数, 则 $\mathrm{PSL}_2(q)$ 有两个非线性 p'-维不可约特征标当且仅当 $q=4,5,7$ 且 $p=3$. 因此 $p=3$ 且 $S\cong\mathrm{PSL}_2(4)\cong\mathrm{PSL}_2(5)$ 或 $\mathrm{PSL}_2(7)$.

如果 $S\cong\mathrm{PSL}_3(q)$, 则 $\mathrm{cd}(S)=\big\{1,q^3,q(q+1),(q-1)^2(q+1),q(q^2+q+1),(q-1)(q^2+q+1),q^2+q+1,(q+1)(q^2+q+1),\frac{(q+1)(q^2+q+1)}{3}\big\}$[19], 且当 $q\equiv 1\bmod 3$ 时, 最后一个维数出现. 若 $p\nmid(q^2+q+1)$, 则 $q^3,q(q^2+q+1),q^2+q+1$ 为 p'- 数, 即 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')|\geqslant 3$, 得到矛盾. 下面可假设 $p\mid(q^2+q+1)$. 若 $p\nmid(q-1)$, 则 $q^3,q(q+1),(q-1)^2(q+1)$ 为 p'-数, 即 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')|\geqslant 3$, 得到矛盾. 若 $p\mid(q-1)$, 则 $p=3$. 令 $q=3k+1$, k 为一个正整数, 则 $q^2+q+1=9k^2+9k+3$, 所以 $\frac{q^2+q+1}{3}$ 为 $3'$-数. 因此 $q^3,q(q+1),\frac{(q+1)(q^2+q+1)}{3}$ 为 p'-数, 即 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')|\geqslant 3$, 得到矛盾.

如果 $S\cong\mathrm{PSL}_4(q)$, 其伴随型群为 $G\cong\mathrm{PGL}_4(q)$. 存在 4 个不可约特征标 $\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4\in\mathrm{Irr}(G)$ [21], 维数分别为 $\chi_1(1)=q(q^2+q+1)$, $\chi_2(1)=(q+1)(q^2+1)$, $\chi_3(1)=(q^2+q+1)(q-1)^2$, $\chi_4(1)=q^2(q^2+1)$. 取 $(\chi_i)_S$ 的一个不可约分支 $\theta_i(i=1,2,3,4)$. 因为 $|G:S|=(4,q-1)$, θ_i 的维数各不相同. 又因为 $(\chi_1(1),\chi_2(1))=1$ 且 $(\chi_3(1),\chi_4(1))_p=1$, $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ 中至少有两个 p'-维不可约特征标. 注意到 Steinberg 特征标也是 p'-维不可约

特征标. 因此 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾.

如果 $S \cong \mathrm{PSL}_5(q)$, 其伴随型群为 $G \cong \mathrm{PGL}_5(q)$. 存在 4 个不可约特征标 $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4 \in \mathrm{Irr}(G)$[21], 维数分别为 $\chi_1(1) = q(q+1)(q^2+q+1)$, $\chi_2(1) = q^4+q^3+q^2+q+1$, $\chi_3(1) = q^2(q^4+q^3+q^2+q+1)$, $\chi_4(1) = q^3(q^2+1)(q^2+q+1)$. 取 $(\chi_i)_S$ 的一个不可约分支 $\theta_i (i=1,2,3,4)$. 因为 $|G:S| = (5, q-1)$, θ_i 的维数各不相同. 又因为 $(\chi_1(1), \chi_2(1)) = 1$ 且 $(\chi_3(1), \chi_4(1))_p = 1$, 同上可得 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾.

如果 $S \cong \mathrm{PSL}_{l+1}(q)$, $l \geqslant 5$. 根据文 [14] 中 13.8 节的结果知, S 的幂幺特征标可以被 $l+1$ 的划分 α 所刻画. 记 $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5$ 分别为对应于划分 $(1,l), (2,l-1), (1,2,l-2), (1,1,l-1), (1,1,2,l-3)$ 的幂幺特征标, 其维数可见表 2.

表 2　p 不是定义特征

单群	维数
$\mathrm{PSL}_{l+1}(q), l \geqslant 6$	$\chi_1(1) = \frac{q(q^l-1)}{q-1}, \chi_2(1) = \frac{q^2(q^{l+1}-1)(q^{l-2}-1)}{(q-1)(q^2-1)}$ $\chi_3(1) = \frac{q^4(q^{l+1}-1)(q^{l-1}-1)(q^{l-3}-1)}{(q-1)^2(q^3-1)}$ $\chi_4(1) = \frac{q^3(q^l-1)(q^{l-1}-1)}{(q-1)(q^2-1)}$ $\chi_5(1) = \frac{q^7(q^{l+1}-1)(q^{l-1}-1)(q^{l-2}-1)(q^{l-4}-1)}{(q-1)^2(q^2-1)(q^4-1)}$
$\mathrm{PSU}_{l+1}(q^2), l \geqslant 6$	$\chi_1(1) = \frac{q(q^l-(-1)^l)}{q+1}, \chi_2(1) = \frac{q^2(q^{l+1}-(-1)^{l+1})(q^{l-2}-(-1)^{l-2})}{(q+1)(q^2-1)}$ $\chi_3(1) = \frac{q^3(q^l-(-1)^l)(q^{l-1}-(-1)^{l-1})}{(q+1)(q^2-1)}$ $\chi_4(1) = \frac{q^4(q^{l+1}-(-1)^{l+1})(q^{l-1}-(-1)^{l-1})(q^{l-3}-(-1)^{l-3})}{(q+1)^2(q^3+1)}$ $\chi_5(1) = \frac{q^7(q^{l+1}-(-1)^{l+1})(q^{l-1}-(-1)^{l-1})(q^{l-2}-(-1)^{l-2})(q^{l-4}-(-1)^{l-4})}{(q+1)^2(q^2-1)(q^4-1)}$
$B_l(q), l \geqslant 2$	$\chi_1(1) = \frac{q(q^l-1)(q^{l-1}-1)}{2(q+1)}, \chi_2(1) = \frac{q(q^l+1)(q^{l-1}+1)}{2(q+1)}$ $\chi_3(1) = \frac{q(q^l-1)(q^{l-1}+1)}{2(q-1)}, \chi_4(1) = \frac{q(q^l+1)(q^{l-1}-1)}{2(q-1)}$
$D_l(q), l \geqslant 4$	$\chi_1(1) = \frac{q(q^l-1)(q^{l-2}+1)}{q^2-1}, \chi_2(1) = \frac{q^2(q^{l-1}-1)(q^{l-1}+1)}{q^2-1}$ $\chi_3(1) = \frac{q^3(q^l-1)(q^{l-1}-1)(q^{l-2}+1)(q^{l-3}+1)}{2(q^2-1)^2}$ $\chi_4(1) = \frac{q^6(q^{l-1}-1)(q^{l-2}-1)(q^{l-1}+1)(q^{l-2}+1)}{(q^2-1)(q^4-1)}$ $\chi_5(1) = \frac{q^3(q^l-1)(q^{l-2}-1)(q^{l-1}+1)(q^{l-3}+1)}{2(q^2+1)(q-1)^2}$
${}^2D_l(q), l \geqslant 4$	$\chi_1(1) = \frac{q(q^l+1)(q^{l-2}-1)}{q^2-1}, \chi_2(1) = \frac{q^2(q^{l-1}-1)(q^{l-1}+1)}{q^2-1}$ $\chi_3(1) = \frac{q^3(q^l+1)(q^{l-1}-1)(q^{l-2}+1)(q^{l-3}-1)}{2(q-1)^2(q^2+1)}$ $\chi_4(1) = \frac{q^6(q^{l-1}-1)(q^{l-2}-1)(q^{l-1}+1)(q^{l-2}+1)}{(q^2-1)(q^4-1)}$ $\chi_5(1) = \frac{q^3(q^l+1)(q^{l-2}-1)(q^{l-1}+1)(q^{l-3}-1)}{2(q^2-1)^2}$

记 $a = \frac{(q^{l+1}-1)(q^{l-1}-1)(q^{l-3}-1)}{(q-1)^3}$, $b = \frac{(q^{l+1}-1)(q^{l-1}-1)(q^{l-2}-1)(q^{l-4}-1)}{(q-1)^4}$, 则 $\chi_3(1) \mid a$ 且 $\chi_5(1) \mid b$. 容易验证 $(\frac{q^l-1}{q-1}, a, b) = 1$, 因此 $(\chi_1(1), \chi_3(1), \chi_5(1))_p = 1$, $(\chi_2(1), \chi_4(1))_p = 1$, $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$. 得到矛盾.

如果 $S \cong \mathrm{PSU}_3(q^2)$, 则 $\mathrm{cd}(S) = \{1, q^3, q(q-1), (q-1)(q+1)^2, q(q^2-q+1), (q-1)(q^2-q+1), q^2-q+1, (q+1)(q^2-q+1), \frac{(q-1)(q^2-q+1)}{3}\}$ [19] 且只有当 $q \equiv -1 \bmod 3$ 时最后一个维数存在. 如果 $p \nmid (q^2-q+1)$, 则 $q^3, q(q^2-q+1), q^2-q+1$ 为 p'-数, 从而 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$. 因此我们假设 $p \mid (q^2-q+1)$. 如果 $p \nmid (q+1)$, 则 $q^3, q(q-1), (q-1)(q+1)^2$ 为 p'-数, 从而

$|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$. 如果 $p \mid (q+1)$, 则 $p=3$ 且 $q \equiv -1 \bmod 3$. 此时 $q^3, q(q-1), \frac{(q-1)(q^2-q+1)}{3}$ 为 p'-数, 从而 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾.

如果 $S \cong \mathrm{PSU}_4(q^2)$, 其伴随型群为 $G \cong \mathrm{PGU}_4(q^2)$. 存在 4 个不可约特征标 $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4 \in \mathrm{Irr}(G)$ [21], 维数分别为 $\chi_1(1) = q(q^2-q+1)$, $\chi_2(1) = (q-1)(q^2+1)$, $\chi_3(1) = (q^2-q+1)(q+1)^2$, $\chi_4(1) = q^2(q^2+1)$. 取 $(\chi_i)_S$ 的一个不可约分支 θ_i $(i=1,2,3,4)$. 因为 $|G:S| = (4, q+1)$, θ_i 的维数各不相同. 又因为 $(\chi_1(1), \chi_2(1)) = 1$ 且 $(\chi_3(1), \chi_4(1))_p = 1$, 所以 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾.

如果 $S \cong \mathrm{PSU}_5(q^2)$, 其伴随型群为 $G \cong \mathrm{PGU}_5(q^2)$. 存在 4 个不可约特征标 $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4 \in \mathrm{Irr}(G)$[21], 维数分别为 $\chi_1(1) = q(q-1)(q^2+1)$, $\chi_2(1) = q^4-q^3+q^2-q+1$, $\chi_3(1) = q^2(q^4-q^3+q^2-q+1)$, $\chi_4(1) = q^3(q^2+1)(q^2-q+1)$. 取 $(\chi_i)_S$ 的一个不可约分支 $\theta_i (i=1,2,3,4)$. 因为 $|G:S| = (5, q+1)$, θ_i 的维数各不相同. 又因为 $(\chi_1(1), \chi_2(1)) = 1$ 且 $(\chi_3(1), \chi_4(1))_p = 1$, 所以 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾.

如果 $S \cong \mathrm{PSU}_{l+1}(q^2)$, $l \geqslant 5$, 则 S 的幂幺特征标可以被 $l+1$ 的划分 α 所刻画. 记 $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5$ 分别为对应于划分 $(1,l), (2,l-1), (1,1,l-1), (1,2,l-2), (1,1,2,l-3)$ 的幂幺特征标, 其维数可见表 2. 因为 $(\chi_1(1), \chi_4(1), \chi_5(1))_p = 1$ 且 $(\chi_2(1), \chi_3(1))_p = 1$, 所以 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾.

如果 $S \cong B_l(q)$ 或 $C_l(q)$, 则 S 的幂幺特征标可以被形式为 $\binom{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \cdots,\ \lambda_a}{\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \cdots,\ \mu_b}$ 的符号所刻画. 记 $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ 分别为对应于符号 $\binom{0\ 1\ l}{\ \ -}$, $\binom{0\ 1}{\ \ l}$, $\binom{0\ l}{\ \ 1}$, $\binom{1\ l}{\ \ 0}$ 的幂幺特征标, 其维数可见表 2. 因为 $(\chi_1(1), \chi_2(1))_p = 1$ 且 $(\chi_3(1), \chi_4(1))_p = 1$, 所以 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾.

如果 $S \cong D_l(q)$, 则 S 的幂幺特征标可以被形式为 $\binom{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \cdots,\ \lambda_a}{\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \cdots,\ \mu_b}$ 的符号所刻画. 记 $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5$ 分别为对应于符号 $\binom{l-1}{\ \ 1}$, $\binom{1\ l}{0\ 1}$, $\binom{0\ l-1}{1\ 2}$, $\binom{1\ 2\ l}{0\ 1\ 2}$, $\binom{1\ l-1}{0\ 2}$ 的幂幺特征标, 其维数可见表 2.

下面我们证明 $\chi_3(1)$, $\chi_4(1)$ 和 $\chi_5(1)$ 的最大公因数是 q 的方幂. 记

$$a = \frac{(q^l-1)(q^{l-1}-1)(q^{l-2}+1)(q^{l-3}+1)}{(q^2-1)^2}, \quad b = \frac{(q^{l-1}-1)(q^{l-2}-1)(q^{l-1}+1)(q^{l-2}+1)}{(q^2-1)^2},$$

$$c = \frac{(q^l-1)(q^{l-2}-1)(q^{l-1}+1)(q^{l-3}+1)}{(q^2+1)(q-1)^2}, \quad d = \frac{(q^{l-1}-1)(q^{l-2}-1)(q^{l-1}+1)(q^{l-2}+1)}{(q^2+1)(q-1)^2},$$

则 $\chi_3(1) = \frac{q^3 \cdot a}{2}$, $\chi_4(1) = \frac{q^6 \cdot b}{q^2+1} = \frac{q^6 \cdot d}{(q+1)^2}$, $\chi_5(1) = \frac{q^3 \cdot c}{2}$. 容易验证 $a-b = q^{l-3} \cdot \frac{(q^{l-1}-1)(q^{l-2}+1)}{q-1}$, $c-d = q^{l-3} \cdot \frac{(q^{l-2}-1)(q^{l-1}+1)}{q-1}$. 因此 $(a,b,c,d) = (a, a-b, c, c-d) = \big(a,\ c,\ \frac{(q^{l-1}-1)(q^{l-2}+1)}{q-1}, \frac{(q^{l-2}-1)(q^{l-1}+1)}{q-1}\big) = \big(a,\ c,\ \frac{(q^{l-1}-1)(q^{l-2}+1)}{q-1}, 2\big)$.

若 q 为奇数, 则 $2 \mid q+1$, $2 \mid q^2+1$ 且 $\big(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}, \frac{d}{2}\big) = 1$. 此时 $(\chi_3(1), \chi_4(1), \chi_5(1))$ 是 q 的方幂. 若 q 为偶数, 则 $(a,b,c,d) = 1$. 此时 $(\chi_3(1), \chi_4(1), \chi_5(1))$ 是 q 的方幂.

所以 χ_3, χ_4 和 χ_5 中至少有一个是 p' 维的. 又因为 $(\chi_1(1), \chi_2(1))_p = 1$, χ_1 和 χ_2 中至少有一个是 p' 维的. 因此 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾.

如果 $S \cong {}^2D_l(q^2)$, 则 S 的幂幺特征标可以被形式为 $\binom{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \cdots,\ \lambda_a}{\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \cdots,\ \mu_b}$ 的符号所刻画. 记 $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5$ 分别为对应于符号 $\binom{1\ l-1}{\ \ -}$, $\binom{0\ 1\ l}{\ \ 1}$, $\binom{0\ 2\ l-1}{\ \ \ \ 1}$, $\binom{0\ 1\ 2\ l}{\ \ \ 1\ 2}$, $\binom{1\ 2\ l-1}{\ \ \ \ 0}$ 的幂幺特征标, 其维数可见表 2. 与 $S \cong D_l(q)$ 的情况类似, 可以验证 $\chi_3(1)$, $\chi_4(1)$ 和 $\chi_5(1)$ 的最大公因数是 q 的方幂并且 $(\chi_1(1), \chi_2(1))_p = 1$. 因此 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾.

如果 $S \cong G_2(q)$. 注意到 p 是奇素数. 若 $p \neq 3$, 则 $(\Phi_i, \Phi_j)_p = 1$, $i, j \in \{1,2,3,6\}$(Φ_i 为分圆多项式). $q^6, \frac{q\Phi_1^2\Phi_6}{6}, \frac{q\Phi_2^2\Phi_3}{6}, \frac{q\Phi_1^2\Phi_3}{2}, \frac{q\Phi_2^2\Phi_6}{2} \in \mathrm{cd}(S)$[21]. 容易验证 $\left(\frac{q\Phi_1^2\Phi_6}{6}, \frac{q\Phi_2^2\Phi_3}{6}\right)_p = 1$ 和 $\left(\frac{q\Phi_1^2\Phi_3}{2}, \frac{q\Phi_2^2\Phi_6}{2}\right)_p = 1$, 从而 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾. 因此 $p = 3$. 若 $3 \nmid \Phi_1\Phi_2$, 则 $\left(\frac{q\Phi_1^2\Phi_6}{6}, \frac{q\Phi_2^2\Phi_3}{6}\right)_p = 1$ 且 $\left(\frac{q\Phi_1^2\Phi_3}{2}, \frac{q\Phi_2^2\Phi_6}{2}\right)_p = 1$, 此时 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$. 若 $3 \mid \Phi_1$, 即 $3 \mid q-1$, 则 $3 \nmid \Phi_2$ 且 $3 \nmid \Phi_6$. 因为 $q \equiv 1$ 或 $4 \bmod 6$, $\Phi_2\Phi_6$, $q\Phi_2^2\Phi_6$, $q^3\Phi_2\Phi_6 \in \mathrm{cd}(S,p')$. 若 $3 \mid \Phi_2$, 即 $3 \mid q+1$, 则 $3 \nmid \Phi_1$ 且 $3 \nmid \Phi_3$. 因为 $q \equiv 2$ 或 $5 \bmod 6$, $\Phi_1\Phi_3$, $q\Phi_1^2\Phi_3$, $q^3\Phi_1\Phi_3 \in \mathrm{cd}(S,p')$. 此时 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾.

如果 $S \cong {}^2G_2(q^2)$, $q^2 = 3^{2m+1}$. 由文 [14] 中 76 页的结果, $|{}^2G_2(q^2)| = q^6(q^2-1)(q^2+1)(q^4-q^2+1)$. 容易验证 $(q^2+1, q^2-1)_p = 1$, $(q^2+1, (q^2+1-\sqrt{3}q)(q^2+1+\sqrt{3}q)) = 1$, $(q^2-1, (q^2+1-\sqrt{3}q)(q^2+1+\sqrt{3}q)) = 1$. 若 $p \mid (q^2+1)$, 则 $(q^2+1-\sqrt{3}q)(q^2+1+\sqrt{3}q)$, $\frac{\sqrt{3}}{6}q(q+1)(q-1)(q^2+1-\sqrt{3}q)$, $\frac{\sqrt{3}}{6}q(q+1)(q-1)(q^2+1+\sqrt{3}q) \in \mathrm{cd}(S,p')$[21]. 若 $p \mid (q^2-1)$, 则 $(q^2+1-\sqrt{3}q)(q^2+1+\sqrt{3}q)$, $q^2(q^2+1-\sqrt{3}q)(q^2+1+\sqrt{3}q)$, $q^6 \in \mathrm{cd}(S,p')$. 若 $p \mid (q^2+1-\sqrt{3}q)(q^2+1+\sqrt{3}q)$. 因为 $(\frac{\sqrt{3}}{6}q(q+1)(q-1)(q^2+1-\sqrt{3}q), \frac{\sqrt{3}}{6}q(q+1)(q-1)(q^2+1+\sqrt{3}q))_p = 1$, $\frac{\sqrt{3}}{3}q(q+1)(q-1)(q^2+1), q^6 \in \mathrm{cd}(S,p')$. 所以 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾.

如果 $S \cong {}^3D_4(q^3)$. 容易验证 $(\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_6, \Phi_{12}) = 1$. 若 $p \mid \Phi_{12}$, 则 q^{12}, $\frac{q^3\Phi_2^2\Phi_6^2}{2}$, $\frac{q^3\Phi_1^2\Phi_3^2}{2} \in \mathrm{cd}(S,p')$[24]. 若 $p \nmid \Phi_{12}$, 则 q^{12}, $q\Phi_{12}$, $q^7\Phi_{12} \in \mathrm{cd}(S,p')$. 因此 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾.

如果 $S \cong {}^2B_2(q^2)$, $q^2 = 2^{2n+1}$. 令 $r^2 = 2q^2$, 则 $(q^4+1, \frac{r(q^2-1)}{2}) = 1$. 由文 [21] 知, S 中存在两个维数为 a 的不可约特征标, $a \in \{q^4+1, \frac{r(q^2-1)}{2}\}$. 因此 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾.

如果 $S \cong {}^2F_4(q^2)$, $q^2 = 2^{2m+1}$. 容易验证 $(\Phi_1\Phi_2, \Phi_{12}\Phi_{24}) = 1$ 且 $(\Phi_4\Phi_{12}, \Phi_8\Phi_{24}) = 1$. 若 $p \mid \Phi_1\Phi_2$, 则 q^{24}, $q^2\Phi_{12}\Phi_{24}$, $q^{10}\Phi_{12}\Phi_{24} \in \mathrm{cd}(S,p')$[21]. 因此 $p \nmid \Phi_1\Phi_2$. 若 $p \mid \Phi_4\Phi_{12}$, 则 q^{24}, $\frac{q^4\Phi_8^2\Phi_{24}}{2}$, $q^2\Phi_1^2\Phi_2^2\Phi_8^2\Phi_{24} \in \mathrm{cd}(S,p')$. 若 $p \nmid \Phi_4\Phi_{12}$, 则 q^{24}, $\frac{1}{\sqrt{2}}q\Phi_1\Phi_2\Phi_4^2\Phi_{12}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}q^{13}\Phi_1\Phi_2\Phi_4^2\Phi_{12} \in \mathrm{cd}(S,p')$. 因此 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾.

如果 $S \cong F_4(q)$. 容易验证 $(\Phi_3\Phi_6, \Phi_4\Phi_8) = 1$ 且 $(\Phi_1\Phi_3\Phi_8, \Phi_{12}) = 1$. 若 $p \mid \Phi_{12}$, 由文 [14] 中 479 页的结果知 $\varphi_{1,24}$, $B_2, 1$ 和 $B_2, \varepsilon \in \mathrm{Irr}(S,p')$. 若 $p \nmid \Phi_{12}$, 则 $(\phi_{9,2}(1), \phi'_{8,3}(1))_p = 1$ 且 $(\phi_{9,10}(1), \phi''_{8,3}(1))_p = 1$. 因此 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾.

如果 $S \cong E_6(q)$. 容易验证 $(\Phi_4\Phi_5\Phi_8\Phi_{12}, \Phi_9) = 1$ 且 $(\Phi_3\Phi_6\Phi_9\Phi_{12}, \Phi_8) = 1$. 若 $p \nmid \Phi_8\Phi_9$, 则 $\phi_{6,1}, \phi_{6,25}, \phi_{1,36} \in \mathrm{Irr}(S,p')$[14]. 若 $p \mid \Phi_8$, 则 $\phi_{81,6}, \phi_{81,10}, \phi_{1,36} \in \mathrm{Irr}(S,p')$. 若 $p \mid \Phi_9$, 则 $\phi_{20,2}, \phi_{20,20}, \phi_{1,36} \in \mathrm{Irr}(S,p')$. 因此 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾.

如果 $S \cong {}^2E_6(q^2)$. 容易验证 $(\Phi_3\Phi_6\Phi_{12}\Phi_{18}, \Phi_8) = 1$ 且 $(\Phi_4\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}, \Phi_{18}) = 1$. 若 $p \nmid \Phi_8\Phi_{18}$, 则 $\phi'_{2,4}, \phi''_{2,16}, \phi_{1,24} \in \mathrm{Irr}(S,p')$[14]. 若 $p \mid \Phi_8$, 则 $\phi'_{9,6}, \phi''_{9,6}, \phi_{1,24} \in \mathrm{Irr}(S,p')$. 若 $p \mid \Phi_{18}$, 则 $\phi_{4,1}, \phi_{4,13}, \phi_{1,24} \in \mathrm{Irr}(S,p')$. 因此 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾.

如果 $S \cong E_7(q)$. 容易验证 $(\Phi_7\Phi_9\Phi_{14}\Phi_{18}, \Phi_{12}) = 1$ 且 $(\Phi_3\Phi_6\Phi_9\Phi_{12}\Phi_{18}, \Phi_7\Phi_{14}) = 1$. 若 $p \nmid \Phi_7\Phi_{12}\Phi_{14}$, 则 $\phi_{7,1}, \phi_{7,46}, \phi_{1,63} \in \mathrm{Irr}(S,p')$[14]. 若 $p \mid \Phi_7\Phi_{14}$, 则 $\phi_{27,2}, \phi_{27,37}, \phi_{1,63} \in \mathrm{Irr}(S,p')$. 若 $p \mid \Phi_{12}$, 则 $\phi_{21,3}, \phi_{21,36}, \phi_{1,63} \in \mathrm{Irr}(S,p')$. 因此 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾.

如果 $S \cong E_8(q)$. 容易验证 $(\Phi_4\Phi_8\Phi_{12}\Phi_{24}, \Phi_5\Phi_7\Phi_{10}\Phi_{14}\Phi_{15}\Phi_{30}) = 1$ 且 $(\Phi_3\Phi_6\Phi_7\Phi_9\Phi_{12}\Phi_{14}\Phi_{15}\Phi_{18}\Phi_{24}\Phi_{30}, \Phi_{20}) = 1$. 若 $p \nmid \Phi_4\Phi_8\Phi_{12}\Phi_{20}\Phi_{24}$, 则 $\phi_{8,1}$, $\phi_{8,91}$, $\phi_{1,120} \in \mathrm{Irr}(S,p')$[14]. 若 $p \mid \Phi_{20}$, 则 $\phi_{567,6}, \phi_{567,46}, \phi_{1,120} \in \mathrm{Irr}(S,p')$. 若 $p \nmid \Phi_{20}$ 且 $p \mid \Phi_4\Phi_8\Phi_{12}\Phi_{24}$, 则 $\phi_{35,2}, \phi_{35,74}$, $\phi_{1,120} \in \mathrm{Irr}(S,p')$. 因此 $|\mathrm{Irr}_1(S,p')| \geqslant 3$, 得到矛盾.

4 具有较少 p'-维不可约特征标的非可解群

本节我们将要考虑具有两个 p'-维不可约特征标的非可解群.

定理 4.1 如果非可解群 G 满足 $|\mathrm{Irr}_1(G,p')|=2$, p 是奇素数, 则 $G=G'$. 如果 N 为 G 的一个极大正规子群, 则 $p=3$, $G/N\cong \mathrm{PSL}_2(q)$, 其中 $q=5$ 或 7, 并且 N 为一个有正规 3-补的可解群.

证 我们用反证法证明 $G=G'$. 假设 $G'<G$, 通过下面的步骤可以得到矛盾.

第一步 证明 $p\mid |G|$ 且 $p\nmid |G:G'|$.

如果 $p\nmid |G|$, 则 $\mathrm{Irr}_1(G)=\mathrm{Irr}_1(G,p')$ 且 $|\mathrm{cd}(G)|\leqslant 3$. 由文 [10] 知, G 为可解群, 得到矛盾. 若 $p\mid |G:G'|$, 则 G 中存在一个指数为 p 的正规子群 H. 选取 $\chi\in \mathrm{Irr}_1(G,p')$, 则 $\chi_H\in \mathrm{Irr}(H)$ 且 $(\chi_H)^G=\chi_1+\chi_2+\cdots+\chi_p$, 其中 $\chi_1=\chi$ 且 $\chi_i(1)=\chi(1)$. 因此 $|\mathrm{Irr}_1(G,p')|\geqslant p\geqslant 3$, 得到矛盾.

第二步 证明 $G''=G'$.

如果 $G''<G'$. 因为 G 是非可解群, 所以存在一个正整数 $m\geqslant 2$ 满足 $G^{(m+1)}=G^{(m)}<G^{(m-1)}$. 取 G 的一个正规子群 M 满足 $M<G^{(m)}$ 且 $G^{(m)}/M$ 为 G 的主因子, 则 $|\mathrm{Irr}_1(G/M,p')|=2$. 否则 $|\mathrm{Irr}_1(G/M,p')|\leqslant 1$, 从而 G/M 可解, 得到矛盾.

由第一步知 $p\nmid |G:G'|$, 则 $\mathrm{Irr}_1(G/G'')=\mathrm{Irr}_1(G/G'',p')$ 且 $|\mathrm{Irr}_1(G/G'')|\leqslant 2$. 若 $|\mathrm{Irr}_1(G/G'')|=2$, 则对任意的 $\chi\in \mathrm{Irr}_1(G)-\mathrm{Irr}_1(G/G'')$, $p\mid \chi(1)$. 由定理 2.7 可得, G' 可解, 从而 G 可解, 得到矛盾. 因此 $|\mathrm{Irr}_1(G/G'')|=1$. 由引理 2.6 可知, G/G'' 同构于 $ES(m,2)$ 或 $(C(q^n-1),E(q^n))$.

下面证明当 $p\nmid |G:G''|$ 时, $m\geqslant 3$. 否则可假设 $p\nmid |G:G''|$ 且 $m=2$, 即 $G'''=G''<G'$. 此时 G''/M 是 G/M 的一个极小正规子群, 因此 $G''/M=S_1\times S_2\times\cdots\times S_t$ 满足 $S_i\cong S$ 为非交换单群. 因为 $|\mathrm{cd}(G/G'')|\geqslant 3$, 由引理 2.5 知对于任意 p'-维不可约特征标 $\chi\in \mathrm{Irr}(S)$, χ 不能扩充至 $\mathrm{Aut}(S)$. 由引理 2.3 和引理 2.4 知, $\mathrm{PSL}_2(5)\ncong S$ 是一个 Lie 型单群, 其定义特征为 p. 由引理 3.1 知, $\mathrm{Irr}(G''/M)$ 中存在 3 个维数不同的 p'-维特征标 θ_1, θ_2, θ_3. 选取 $\chi_1\in \mathrm{Irr}(\theta_1^G)$, $\chi_2\in \mathrm{Irr}(\theta_2^G)$, $\chi_3\in \mathrm{Irr}(\theta_3^G)$, 由 Clifford 理论可知 χ_1, χ_2 和 $\chi_3\in \mathrm{Irr}_1(G,p')$ 且它们互不相同, 得到矛盾. 因此当 $p\nmid |G:G''|$ 时, $m\geqslant 3$.

如果 $p\nmid |G:G''|$, 则 $G'''<G''$ 且 $|\mathrm{Irr}_1(G/G''')|=|\mathrm{Irr}_1(G/G''',p')|=2$. 此时对任意的 $\chi\in \mathrm{Irr}_1(G)-\mathrm{Irr}_1(G/G''')$, $p\mid \chi(1)$. 由定理 2.7 可得, G'' 可解, 从而 G 为可解群. 得到矛盾. 所以 $p\mid |G:G''|$. 根据第一步可得 $p\nmid |G/G'|$, 因此 G/G'' 同构于 $(C(q^n-1),E(q^n))$ 且 $p=q$. 选取 $\chi\in \mathrm{Irr}_1(G/G'')$, 易知 $\chi_{G'}$ 的所有不可约成分均为线性特征标. 选取 $\beta\in \mathrm{Irr}_1(G',p')$(满足条件的 β 一定存在, 否则 G' 是一个 Thompson 群, 从而 G' 可解, 得到矛盾), 则 $\beta_{G''}\in \mathrm{Irr}(G'')$ 并且对任意的 $\lambda\in \mathrm{Irr}(G'/G'')$, $\beta\lambda\in \mathrm{Irr}(G')$. 因此 G' 至少有 p^n 个维数相同的非线性不可约特征标. 又因为 $|G:G'|=p^n-1$ 与 p 互素, 所以 G 在 $\{\beta\lambda|,\lambda\in \mathrm{Irr}(G'/G'')\}$ 上的共轭作用至少有两个轨道, 从而至少有两个 p'-维不可约特征标不在 $\mathrm{Irr}_1(G/G'',p')$ 中. 因此 $|\mathrm{Irr}_1(G,p')|\geqslant 3$, 得到矛盾. 从而 $G''=G'$.

第三步 得到矛盾.

选取 G 的一个正规子群 M 满足 $M<G'$ 且 G'/M 为 G 的主因子. 由第二步知, $G'/M=S_1\times S_2\times\cdots\times S_t$, 其中 $S_i\cong S$ 为非交换单群. 如果 S 为零散单群、交错群或定

义特征非 p 的 Lie 型单群, 根据引理 2.3, 引理 2.4, 引理 2.5 知, 存在 p'-维不可约特征标 $\chi \in \mathrm{Irr}(G'/M)$, 并且可以扩充至 $\beta \in \mathrm{Irr}(G/M)$. 从而 $|G:G'|=2$ 且 $\beta\lambda \in \mathrm{Irr}_1(G,p')$, 其中 $1 \neq \lambda \in \mathrm{Irr}(G/G')$. 由引理 3.2 知, 存在不可约特征标 $\gamma \in \mathrm{Irr}_1(G'/M,p')$ 满足 $\gamma(1) \neq \chi(1)$. 选取 τ 为 γ^G 的一个不可约成分, 则 τ, β 和 $\beta\lambda$ 互不相同. 从而 $|\mathrm{Irr}_1(G,p')|>2$, 得到矛盾. 下面我们假设 S 为定义特征为 p 的 Lie 型单群. 由引理 3.1 知, 存在 3 个维数不同的特征标 $\chi_1,\chi_2,\chi_3 \in \mathrm{Irr}_1(G',p')$. 取 θ_i 为 χ_i^G 的一个不可约成分, 易知 $\theta_i \in \mathrm{Irr}_1(G,p')$ 互不相同. 从而 $|\mathrm{Irr}_1(G,p')|>2$, 得到矛盾. 因此 G 为完备群.

若 N 为 G 的一个极大正规子群, 则 G/N 为非交换单群且根据 Kazarin 和 Berkovich 的结果知 $|\mathrm{Irr}_1(G/N,p')|=2$. 由定理 1.1 和引理 2.7 知, $p=3$, $G/N \cong \mathrm{PSL}_2(q)$, 其中 $q=5$ 或 7, 并且 N 为一个有正规 3-补的可解群.

定理 1.2 的证明　当 $p=2$ 时, 由文 [6] 中 Malle 和 Späth 的结果可知 McKay 猜想成立. 当 p 为奇素数时, 取 N 为 G 的一个极大正规子群, 由定理 4.1 可知, N 可解且 $G/N \cong \mathrm{PSL}_2(q)$, $q=5$ 或 7. 根据 [1] 中的定理 A 可得, 定理 1.2 成立.

定理 1.3 的证明　设 N 为 G 的一个极大正规子群. 由定理 4.1 知, $p=3$, $G/N \cong \mathrm{PSL}_2(q)$, 其中 $q=5$ 或 7 并且 N 为有正规 3-补的可解群.

第一步　对任意非平凡的线性特征标 $1 \neq \lambda \in \mathrm{Irr}(N)$, $3 \mid |G:I_G(\lambda)|$.

否则, 假设 $3 \nmid |G:I_G(\lambda)|$. 根据 Clifford 理论, 可设 $\lambda^{I_G(\lambda)}=e_1\beta_1+\cdots+e_k\beta_k$, 其中 β_i 为 $I_G(\lambda)$ 的不可约特征标, 则 $\beta_i(1)=e_i$ 且 $|I_G(\lambda):N|=\sum e_i^2$. 因为 $3 \nmid |G:I_G(\lambda)|$ 且 λ^G 的每个不可约成分的维数均被 3 整除, 所以 $3 \mid \beta_i(1)$, 从而 $9 \mid |G:N|$, 这与 $9 \nmid |\mathrm{PSL}_2(5)|$ 和 $9 \nmid |\mathrm{PSL}_2(7)|$ 矛盾.

第二步　N 是一个 $3'$-群.

设 M 为 N 的正规 3-补, 下面证明 $M=N$. 否则可设 $M<N$ 并且选取子群 $L \trianglelefteq G$ 满足 N/L 时 G/L 的一个极小正规子群且 N/L 为初等交换 3-群. 接下来我们考虑 G/N 的一个 Sylow3- 子群在 N/L 上的作用. 根据 Brauer 的置换定理 (可参考文 [10] 中的定理 6.32), N/L 中不动的不可约特征标的个数与 N/L 中不动点的个数相等. 由第一步可得, N/L 中不动点的个数为 1, 即 $|N/L| \equiv 1 \bmod 3$, 这与 N/L 是一个 3-群矛盾. 因此 $N=M$.

第三步　N 是一个幂零子群.

考虑 G 的 Sylow 3- 子群 K 在 N 上的互素作用. 令 t 为 K 的生成元. 由第一步可知 N 有一个 3 阶的无不动点的自同构 t . 根据 Thompson 的经典结论 (见文 [26] 中第五章的定理 8.14) 可知, N 是一个幂零群.

第四步　结论.

情况 1　$G/N \cong \mathrm{PSL}_2(7)$.

下面我们证明 $N=1$, 否则可设 $N>1$ 是 G 的一个极小正规子群, 然后得到矛盾. 此时 N 为初等交换 q-子群, $q \neq 3$. 我们可以将 N 看做 G/N 的一个定义在有限域 F_q 上的不可约模. 取 t 为 $\mathrm{PSL}_2(7)$ 中的 3 阶元. 根据第一步和 Brauer 的置换定理可知, $C_N(t)=1$. 但是根据文 [27] 可知, 对于 $\mathrm{PSL}_2(7)$ 的任意不可约模 V, $C_V(t)>1$. 例如, 当 $q=2$ 时,

$|N|=2^3$ 且 N 为第一种类型的 3-维不可约模, 此时 t 在模 N 上的作用为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 即如果 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 为一组基, 则 $t.v_1 = v_2, t.v_2 = v_3, t.v_3 = v_1$. 容易验证 t 可以固定非平凡的元素 $(v, v, v)(v \neq 0)$. 类似地, 对于 $\mathrm{PSL}_2(7)$ 的每一个不可约模 V, 均满足 $C_V(t) > 1$. 得到矛盾, 从而 $N = 1$ 且 $G \cong \mathrm{PSL}_2(7)$.

情况 2 $G/N \cong \mathrm{PSL}_2(5)$.

选取 G 的一个正规子群 $L \leqslant N$, 满足 N/L 是 G/L 的极小正规子群. 与情况 1 类似, N/L 看做 G/N 的一个定义在有限域 F_q 上的不可约模. 取 t 为 $\mathrm{PSL}_2(5)$ 中的 3 阶元. 根据第一步和 Brauer 的置换定理可知, $C_N(t) = 1$. 根据文 [27], 当 $q = 2$, $|N/L| = 2^4$ 且 N/L 为第二种类型的 4-不可约模时, t 在模 N/L 上的作用为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 容易验证此时 $C_{N/L}(t) = 1$, 并且对于 $\mathrm{PSL}_2(5)$ 的其余不可约模 V, 都有 $C_V(t) > 1$. 根据第三步的结果可知, N 是一个 2-群.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵的修改意见.

参 考 文 献

[1] Isaacs I M, Malle M, Navarro G. A reduction theorem of the McKay conjecture [J]. *Inven Math*, 2007, 170:33–101.

[2] Cabanes M, Späth B. Equivariant character correspndences and inductive McKay condition for type A [J]. *J Reine Angew Math*, 2017, 728:153–194.

[3] Malle G. The inductive McKay condition for simple grous not of Lie type [J]. *Comm Algebra*, 2008, 36:455–463.

[4] Späth B. Inductive McKay condition in defining characteristic [J]. *Bull Lon Math Soc*, 2012, 44:426–438.

[5] Malle G. Local-global conjectures in the representation theory of finite groups [C]//Representation theory-current trends and perspectives, Zürich: EMS Publishing House, 2017:519–539.

[6] Malle G, Späth B. Characters of odd degree [J]. *Annals of Mathematics*, 2016, 184:869–908.

[7] Berkovich Y, Zhmud E. Characters of finite groups, Part 2 [M]. Providence, Rhode Island: Amer Math Society Providence, 1999.

[8] Kazarin L, Berkovich Y. On Thompson's theorem [J]. *J Algebra*, 1999, 220:574–590.

[9] James G, Kerber A. The representation theory of the symmetric group [M]. New York: Cambridge University Press, 2009.

[10] Isaacs I M. Character theory of finite groups [M]. New York: Academic Press, 1976.

[11] Bianchi M, Chillag D, Lewis M L, et al. Character degree graphs that are complete graphs [J]. *Proc Amer Math Soc*, 2007, 135(3):671–676.

[12] Schmid P. Rational matrix groups of a special type [J]. *Linear Algebra Appl*, 1985, 71:289–293.

[13] Schmid P. Extending the Steinberg representation [J]. *J Algebra*. 1992, 150:254–256.

[14] Carter R W. Finite groups of Lie type: conjugacy classes and complex characters [M]. New York: Wiley, 1985.

[15] Berkovich Y. Finite groups with few nonlinear irreducible characters [J]. *Izvestija Severo-Kavkazskogo Tzentra Vyschei Schkoly, Estestvennie Nauki*, 1987, 1:8–13 (in Russian).

[16] Seitz G. Finite groups having only one irreducible representation of degree greater than one [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1968, 19:459–461.

[17] Isaacs I M, Knutson G. Irreducible character degrees and normal subgroups [J]. *J Algebra*, 1998, 199:302–320.

[18] Dornhoff L. Group representation theory, Part A: ordinary representation theory [M]. New York: Marcel Dekker, 1971.

[19] Simpson W A, Frame J S. The character tables of $SL(3,q)$, $SU(3,q)$, $PSL(3,q)$, $\mathrm{PSU}(3,q^2)$ [J]. *Can J Math*, 1973, 25:486–494.

[20] White D L. Degree graphs of simple linear and unitary groups [J]. *Comm Algebra*, 2006, 34:2907–2921.

[21] Lübeck F. http://www.math.rwth-aachen.de/Frank.Luebeck/chev/DegMult/index.html.

[22] Srinivasan B. The characters of the finite symplectic group $Sp(4,q)$ [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1968, 131:488–525.

[23] Carter R W. Centralizers of semisimple elements in the finite classical groups [J]. *Proc Lon Math Soc*, 1981, 42(3):1–41.

[24] Deriziotis D I, Michler G O. Character table and blocks of finite simple Triality groups ${}^3D_4(q)$ [J]. *Tran Amer Math Soc*, 1987, 303:39–70.

[25] Conway J H, Curtis R T, Norton S P, et al. Atlas of finite groups [M]. Oxford: Oxford University Press, 1984.

[26] Huppert B. Endliche gruppen part 1 [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1967.

[27] http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/.

Nonsolvable Groups with Two Nonlinear Irreducible Characters of p'-Degrees

LIU Yang[1] LU Ziqun[2] ZHANG Jiping[3]

[1]Corresponding author. School of Mathematical Science, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China. E-mail: liuyang@math.pku.edu.cn

[2]Department of Mathematical Science, Tsinghua University, Beijing 100084, China. E-mail: zlu@tsinghua.edu.cn

[3]BICMR, Peking University, Beijing 100871, China. E-mail: jzhang@pku.edu.cn

Abstract McKay conjecture is an important problem in representation theory of finite groups. In this paper, the authors consider nonsolvable group with two p'-degree characters and prove the conjecture holds for such group. Furthermore, they show that if G is a nonsolvable group such that $|\mathrm{Irr}_1(G, p')| = 2$ for odd prime p, then $p = 3$, and $G \cong \mathrm{PSL}_2(7)$ or there exists a normal 2-subgroup N such that $G/N \cong \mathrm{PSL}_2(5)$.

Keywords McKay conjecture, Character degrees, Nonsolvable groups

2000 MR Subject Classification 20C15, 20C33

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 41 No. 1, 2020

by ALLERTON PRESS, INC., USA