数学年刊 A 辑
2021, 42(1):115–124
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2021.0010

涉及分担函数与分担值的正规定则*

曾翠萍 [1] 邓炳茂 [2] 方明亮 [3]

提要 研究了涉及分担函数的正规定则, 证明了: 设 $\mathcal{F}$ 为定义在区域 D 内的一族亚纯函数, n,k 是两个正整数, 满足 $n \geqslant k+3$. 如果对于 $\mathcal{F}$ 中任意一个函数 f, $(f^n)^{(k)}-z$ 至多有一个不同的零点, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规. 此结论说明在 $(f^n)^{(k)}$ 具有不动点的情形下, 1990 年杨乐在 Notre Dame 大学举行的学术会议上提出的断言仍然成立.

关键词 亚纯函数, 正规族, 分担函数, 分担值
MR (2000) 主题分类 30D45, 30D35
中图法分类 O174.52
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2021)01-0115-10

1 引言与结果

本文采用通常 Nevanlinna 理论中的记号, 如 $m(r,f)$, $N(r,f)$, $\overline{N}(r,f)$, $T(r,f)$ 等. 设 D 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个区域, $\mathcal{F}$ 为 D 内的亚纯函数族. $\mathcal{F}$ 在 D 内正规是指: $\mathcal{F}$ 中的任一函数列 $\{f_n\}$ 都存在子列 $\{f_{n_j}\}$ 在 D 内按球面距离内闭一致收敛到一个亚纯函数或 ∞. $\mathcal{F}$ 在点 z_0 处正规是指: 在点 z_0 的一个邻域内正规 (见文 [1–3]). 在亚纯函数正规族理论中, 寻找新的正规定则是一个重要的问题.

1989 年, Schwick[4] 证明了下面的定理.

定理 A 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚 (全) 纯函数, n,k 是两个正整数, $n \geqslant k+3(n \geqslant k+1)$, 且 $a \neq 0$ 是一个有穷复数. 如果对于 $\mathcal{F}$ 中任意函数 f, 有 $(f^n)^{(k)} \neq a$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

Wang 和 Fang[5] 改进了上述结果, 证明了下面的定理.

定理 B 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, n,k 是两个正整数, 满足 $n \geqslant k+1$, 且 $a \neq 0$ 是一个有穷复数. 如果对于 $\mathcal{F}$ 中任意函数 f, 有 $(f^n)^{(k)} \neq a$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

利用分担值, Li 和 Gu[6] 证明了下面的定理.

定理 C 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, n,k 是两个正整数, 满足 $n \geqslant k+2$, 且 $a \neq 0$ 是一个有穷复数. 如果对于 $\mathcal{F}$ 中任意两个函数 f 与 g, $(f^n)^{(k)}$ 和 $(g^n)^{(k)}$ 分担 a, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规, 并且 $n \geqslant k+2$ 是最佳的.

本文 2017 年 9 月 10 日收到, 2018 年 3 月 22 日收到修改稿.
[1]广东金融学院应用数学系, 广州 510521. E-mail: ytxzcp@163.com
[2]通信作者. 广东金融学院应用数学系, 广州 510521. E-mail: dbmao2012@163.com
[3]华南农业大学应用数学研究所, 广州 510642. E-mail: mlfang@scau.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11901119) 和广东省普通高校特色创新类项目 (No. 2019KTSCX111) 的资助.

1990 年, Yang[7] 断言如下结果成立: 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内一族亚纯函数, n,k 是两个正整数, 满足 $n\geqslant k+3$. 若对于 $\mathcal{F}$ 中任意函数 f, 有 $(f^n)^{(k)}\neq z$, $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

文 [8–9] 肯定地回答了上述问题, 证明了下面的定理.

定理 D 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, n,k 是两个正整数满足 $n\geqslant k+3$. 若对于 $\mathcal{F}$ 中任意函数 f, 有 $(f^n)^{(k)}\neq z$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

最近, 邱玲 [10] 等人考虑了分担函数的情形, 证明了下面的定理.

定理 E 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, $n(\geqslant 1),k(\geqslant 1),m(\geqslant 0)$ 是 3 个整数, 满足 $n\geqslant k+2m+2$, $p(z)$ 是区域 D 内零点重数为 m 的全纯函数. 如果函数族 $\mathcal{F}$ 中任意两个函数 f,g, 满足 $(f^n)^{(k)}$ 和 $(g^n)^{(k)}$ 分担 $p(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

从定理 E 的证明可以看出, 文 [10] 的证明需要添加条件: m 被 n 整除. 因为证明中构造了辅助函数 $G_j(z)=\frac{f_j(z)}{z^{m/n}}$. 本文去掉了条件 "$m$ 被 n 整除" 并改进了上述结果, 证明了下面的定理.

定理 1.1 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, $h(z)$ 是区域 D 内零点重数至多为 m 的全纯函数, $n\geqslant 1,k\geqslant 1,m\geqslant 0$ 是 3 个整数, 满足当 $k\geqslant m$ 时, $n\geqslant k+m+2$, 当 $k<m$ 时, $n\geqslant k+m+3$. 如果对于 $\mathcal{F}$ 中任意两个函数 f 与 g, $(f^n)^{(k)}$ 和 $(g^n)^{(k)}$IM 分担 $h(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

事实上, 我们证明了如下更一般的结果.

定理 1.2 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, $h(z)$ 是区域 D 内零点重数至多为 m 的全纯函数, $n\geqslant 1,k\geqslant 1,m\geqslant 0$ 是 3 个整数, 满足当 $k\geqslant m$ 时, $n\geqslant k+m+2$, 当 $k<m$ 时, $n\geqslant k+m+3$. 如果对于 $\mathcal{F}$ 中任意一个函数 f, $(f^n)^{(k)}-h(z)$ 至多有一个不同的零点, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

由定理 1.2 即得下面的定理.

推理 1.1 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, n,k 是两个正整数, 满足 $n\geqslant k+3$. 如果对于 $\mathcal{F}$ 中任意一个函数 f, $(f^n)^{(k)}-z$ 至多有一个不同的零点, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

于是在 $(f^n)^{(k)}$ 具有不动点的情形下 Yang[7] 的断言成立.

文 [11–12] 证明了下面的定理.

定理 F 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数, $n\geqslant 2$ 是一个正整数, $a\neq 0,b$ 是两个有穷复数. 若对于每一个 $f\in\mathcal{F}$, f 的零点重级均 $\geqslant 2$, 且 $f+a(f')^n\neq b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

在文 [13–15] 中研究了将定理 F 中的一阶导数换成 k 阶导数的情形. Wang[15] 证明了下面的定理.

定理 G 设 n,k 是两个正整数, 满足 $n\geqslant k+1$, $a(\neq 0),b$ 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数, 且满足:

(1) 对于每个 $f\in\mathcal{F}$, f 的零点重级至少是 $k+2$, 极点重级至少是 2;

(2) 对于每个 $f\in\mathcal{F}$, $f^{(k)}(z)$ 的零点不是 $f(z)$ 的 b 值点;

(3) 对于 $\mathcal{F}$ 中的任意两个函数 f 和 g, $f+a(f^{(k)})^n$ 与 $g+a(g^{(k)})^n$ 在 D 内分担 b, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

文 [15] 中举例说明定理 G 的条件 "f 的零点重级至少是 $k+2$" 是最佳的. 本文指出此条件并不是最佳的, 并改进了定理 G: 将 f 的零点重级 "至少是 $k+2$" 改进为 "至少是 $k+1$", 并去掉极点的限制条件; 将 "$n \geqslant k+1$" 改进为 "$n \geqslant 2$". 我们证明了下面的定理.

定理 1.3 设 n, k 是两个正整数, 满足 $n \geqslant 2$, $a(\neq 0), b$ 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数, 且满足:

(1) 对于每个 $f \in \mathcal{F}$, f 的零点重级至少是 $k+1$;

(2) 对于每个 $f \in \mathcal{F}$, $f^{(k)}(z)$ 的零点不是 $f(z)$ 的 b 值点;

(3) 对于 $\mathcal{F}$ 中的任意两个函数 f 和 g, $f + a(f^{(k)})^n$ 与 $g + a(g^{(k)})^n$ 在 D 内分担 b,

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

例 1.1 设 $D = \{z : |z| < 1\}$, n, k 是两个正整数, $\mathcal{F} = \{f_j(z)\}$, 其中 $f_j(z) = jz^k$, $z \in D$, $j = 1, 2, \cdots$. 显然, 对于任意 $f_j \in \mathcal{F}$, $f_j + (f_j^{(k)})^n \neq 0$. 但是 $\mathcal{F}$ 在 D 内不正规. 于是定理 1.3 中的条件 "f 的零点重级至少是 $k+1$" 是最好的.

例 1.2 设 $D = \{z : |z| < 1\}$, n, k 是两个正整数, $\mathcal{F} = \{f_j(z)\}$, 其中 $f_j(z) = \mathrm{e}^{jz}$, $z \in D$, $j = 1, 2, \cdots$. 显然, 对于任意 $f_j \in \mathcal{F}$, $f_j + f_j^{(k)} \neq 0$. 但是 $\mathcal{F}$ 在 D 内不正规. 于是 $n \geqslant 2$ 是最好的.

2 引　理

引理 2.1 (见 [16–17]) 设 $\mathcal{F}$ 是单位圆盘 Δ 上一族亚纯函数, 其中函数的零点重数至少为 k. 若 $\mathcal{F}$ 在 Δ 内不正规, 则对 $0 \leqslant \alpha < k$, 存在

(1) 单位圆盘内点列 z_n, $z_n \to 0$;

(2) 整数列 ρ_n, $\rho_n \to 0$;

(3) 函数列 $f_n \in \mathcal{F}$,

使得 $\rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n \xi)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球面距离内闭一致收敛到一个非常数亚纯函数 $g(\xi)$, 且其零点重数至少 k.

引理 2.2 (见 [7]) 设 $f \neq 0$ 为超越亚纯函数, $n(\geqslant 2)$ 为整数, $a(\neq 0)$ 为有穷复数, 则 $f + a(f^{(k)})^n$ 有无穷多个零点.

由文 [18] 引理 5 可得以下结果.

引理 2.3 设 $f \neq 0$ 是一个有理函数, $n \geqslant 2$, k 为正整数, $a(\neq 0)$ 为有穷复数, 则 $f + a(f^{(k)})^n$ 至少有 $nk+1$ 个不同的零点.

引理 2.4 (见 [5]) 设 $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 + \frac{q(z)}{p(z)}$, $a_0, \cdots, a_n$ 是常数, $a_n \neq 0$, $q(z)$, $p(z)$ 是两个互素的多项式, 且 $\deg q < \deg p$, k 是正整数, 若 $f^{(k)} \neq 1$, 则有

(1) $n = k$, 且 $n! a_n = 1$;

(2) $f(z) = \frac{1}{k!} z^k + \cdots + a_1 z + a_0 + \frac{1}{(az+b)^m}$;

(3) 若 $f(z)$ 的零点重级均 $\geqslant k+1$, 则结论 (2) 式中 $m = 1$, 且 $f(z) = \frac{(cz+d)^{k+1}}{az+b}$, 其中 a, b, c, d 是常数, $a \neq 0, c \neq 0$.

引理 2.5 (见 [5]) 设 $k, n \geqslant k+1$ 是两个正整数, f 是一个超越亚纯函数, 则 $(f^n)^{(k)}$ 取每一个非零有穷复数无穷多次.

引理 2.6 (见 [6]) 设 $k, n \geqslant k+2$ 是两个正整数, $a \neq 0$ 是有穷复数, f 是一个非常数有理函数, 则 $(f^n)^{(k)} - a$ 至少有两个不同的零点.

引理 2.7 设 f 是非常数亚纯函数, $p(z)$ 是 m 次多项式, n, k, m 是 3 个正整数, 满足当 $k \geqslant m$, 时 $n \geqslant k+m+2$, 当 $k < m$ 时, $n \geqslant k+m+3$, 则 $(f^n)^{(k)} - p(z)$ 至少有两个不同的零点.

证 由于

$$\frac{1}{f^n} = \frac{(f^n)^{(k)}}{pf^n} - \frac{p(f^n)^{(k+1)} - p'(f^n)^{(k)}}{pf^n} \cdot \frac{(f^n)^{(k)} - p}{p(f^n)^{(k+1)} - p'(f^n)^{(k)}},$$

则

$$\begin{aligned}
m\Big(r, \frac{1}{f^n}\Big) &\leqslant m\Big(r, \frac{(f^n)^{(k)} - p}{p(f^n)^{(k+1)} - p'(f^n)^{(k)}}\Big) + S(r, f) \\
&\leqslant T\Big(r, \frac{p(f^n)^{(k+1)} - p'(f^n)^{(k)}}{(f^n)^{(k)} - p}\Big) - N\Big(r, \frac{(f^n)^{(k)} - p}{p(f^n)^{(k+1)} - p'(f^n)^{(k)}}\Big) + S(r, f) \\
&\leqslant m\Big(r, \frac{p[\frac{(f^n)^{(k)}}{p} - 1]'}{\frac{(f^n)^{(k)}}{p} - 1}\Big) + N\Big(r, \frac{p(f^n)^{(k+1)} - p'(f^n)^{(k)}}{(f^n)^{(k)} - p}\Big) \\
&\quad - N\Big(r, \frac{(f^n)^{(k)} - p}{p(f^n)^{(k+1)} - p'(f^n)^{(k)}}\Big) + S(r, f) \\
&\leqslant m \log r + N\Big(r, p(f^n)^{(k+1)} - p'(f^n)^{(k)}\Big) + N\Big(r, \frac{1}{(f^n)^{(k)} - p}\Big) - N(r, (f^n)^{(k)} - p) \\
&\quad - N\Big(r, \frac{1}{p(f^n)^{(k+1)} - p'(f^n)^{(k)}}\Big) + S(r, f) \\
&\leqslant m \log r + \overline{N}(r, f) + N\Big(r, \frac{1}{(f^n)^{(k)} - p}\Big) - N\Big(r, \frac{1}{p(f^n)^{(k+1)} - p'(f^n)^{(k)}}\Big) + S(r, f).
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
nT(r, f) &\leqslant N\Big(r, \frac{1}{f^n}\Big) + \overline{N}(r, f) + N\Big(r, \frac{1}{(f^n)^{(k)} - p}\Big) - N\Big(r, \frac{1}{p(f^n)^{(k+1)} - p'(f^n)^{(k)}}\Big) \\
&\quad + m \log r + S(r, f) \\
&\leqslant \overline{N}(r, f) + (k+1)\overline{N}\Big(r, \frac{1}{f}\Big) + \overline{N}\Big(r, \frac{1}{(f^n)^{(k)} - p}\Big) + m \log r + S(r, f). \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

下面证明当 n, k, m 满足引理条件时, $(f^n)^{(k)} - p$ 至少有两个不同的零点. 假设 $(f^n)^{(k)} - p$ 至多有一个不同的零点, 下面分 3 种情况讨论.

情况 1 f 是一个超越亚纯函数. 由于 $\log r = o(T(r, f))$(见文 [3]), 于是由 (2.1) 知当 $n \geqslant k+m+2$ 时有 $T(r, f) = S(r, f)$, 矛盾.

情况 2 f 是一个多项式, 则 $N(r, f) = 0$, 由 (2.1) 知当 $n \geqslant k+m+3$ 时, 有 $T(r, f) = O(1)$, 矛盾. 当 $n = k+m+2$ 时, $T(r, f) \leqslant \log r + O(1)$, 则 f 为一次多项式. 设 $f = A(z-\alpha)$, 则 $(f^n)^{(k)} = A'(z-\alpha)^{n-k}$. 若 $(f^n)^{(k)} - p$ 至多有一个不同的零点, 可设 $(f^n)^{(k)} - p = C(z-\xi_0)^l$, 其中 $l \geqslant 0$. 由 $n = k+m+2$ 易知 $l = m+2$, 那么 $(f^n)^{(k+m+1)} = C'(z-\xi_0)$. 即 $z = \xi_0$ 是 $(f^n)^{(k+m+1)}$ 的唯一零点, 从而也是 $(f^n)^{(k+m)}$ 的零点. 由 $(f^n)^{(k+m)} - (p(\xi))^{(m)} = C''(z-\xi_0)^2$ 得 $p^{(m)}(\xi_0) = 0$, 矛盾. 故当 $n \geqslant k+m+2$ 时, $(f^n)^{(k)} - p$ 至少有两个不同的

零点.

情况 3 f 是一个非多项式有理函数.

若 $f\neq 0$, 则由 (2.1) 式知当 $n\geqslant m+3$ 时有 $T(r,f)=S(r,f)$, 矛盾. 故当 $n\geqslant k+m+2$ 时, $(f^n)^{(k)}-p$ 至少有两个不同的零点.

若 f 有零点, 由 (2.1) 式知当 $n\geqslant k+m+4$ 时有 $T(r,f)=S(r,f)$, 矛盾. 故当 $n\geqslant k+m+4$ 时, $(f^n)^{(k)}-p$ 至少有两个不同的零点. 下面只需讨论 $n=k+m+3$ 和 $n=k+m+2$ 两种情况.

当 $n=k+m+3$ 时, 由 (2.1) 式有 $T(r,f)\leqslant \log r+S(r,f)$. 可知 f 是一次非多项式有理函数, 又因 f 有零点, 故可设 $f=A\frac{z-\alpha}{z-\beta}$, 其中 $\alpha\neq\beta$, 则

$$(f^n)^{(k)}=(f^{k+m+3})^{(k)}=\frac{(z-\alpha)^{m+3}g_1(z)}{(z-\beta)^{2k+m+3}},$$
$$(f^n)^{(k+m+1)}=\frac{(z-\alpha)^2g_2(z)}{(z-\beta)^{2k+2m+4}}. \tag{2.2}$$

其中 $g_1(z),g_2(z)$ 是多项式, 且 $\deg(g_1)<k,\ \deg(g_2)<k+m+1$.

若 $(f^n)^{(k)}-p$ 至多有一个不同的零点, 记为 ξ_0, 显然互异于 α. 设

$$(f^n)^{(k)}-p(z)=\frac{D(z-\xi_0)^l}{(z-\beta)^{2k+m+3}}\quad (l\geqslant 0). \tag{2.3}$$

比较两边次数易知 $l=2k+2m+3$. 对 (2.3) 两边求 $m+1$ 阶导数, 得

$$(f^n)^{(k+m+1)}=\frac{(z-\xi_0)^{l-m-1}q(z)}{(z-\beta)^{2k+2m+4}}. \tag{2.4}$$

其中 $q(z)$ 是多项式, 且 $\deg(q)<m+1$. 比较 (2.2) 式和 (2.4) 式知 $l<k+2m+2$, 这与 $l=2k+2m+3$ 矛盾. 故当 $n=k+m+3$ 时, $(f^n)^{(k)}-p$ 至少有两个不同的零点.

当 $n=k+m+2$ 时, 由 (2.1) 式有 $T(r,f)\leqslant 2\log r+S(r,f)$. 可知 f 是一个至多二次的非多项式有理函数. 若 f 是一个一次非多项式有理函数, 又因 f 有零点, 可设 $f=A\frac{z-\alpha}{z-\beta}$. 用类似于 $n=k+m+3$ 时的讨论方法可推知 $(f^n)^{(k)}-p$ 至少有两个不同的零点. 若 f 是一个二次非多项式有理函数, 则 f 为以下 8 种形式之一:

(1) $f=A\dfrac{z-\alpha}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)}$;　(2) $f=A\dfrac{z-\alpha}{(z-\beta)^2}$;　(3) $f=A\dfrac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}{z-\beta}$;

(4) $f=A\dfrac{(z-\alpha)^2}{z-\beta}$;　(5) $f=A\dfrac{(z-\alpha)^2}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)}$;　(6) $f=A\dfrac{(z-\alpha)^2}{(z-\beta)^2}$;

(7) $f=A\dfrac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}{(z-\beta)^2}$;　(8) $f=A\dfrac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)}$.

若 $(f^n)^{(k)}-p$ 至多有一个不同的零点, 由 (2.1) 式, 对于形式 (1), (2) 和 (4)–(6), 有 $(k+m)\log r\leqslant O(1)$, 对于形式 (3) 和 (7), 有 $m\log r\leqslant O(1)$, 均矛盾. 下面讨论形式 (8). 由 (8) 式, 有

$$f^n=f^{k+m+2}=A_1\frac{(z-\alpha_1)^{k+m+2}(z-\alpha_2)^{k+m+2}}{(z-\beta_1)^{k+m+2}(z-\beta_2)^{k+m+2}}.$$
$$(f^n)^{(k)}=\frac{(z-\alpha_1)^{m+2}(z-\alpha_2)^{m+2}g_1(z)}{(z-\beta_1)^{2k+m+2}(z-\beta_2)^{2k+m+2}},$$
$$(f^n)^{(k+m+1)}=\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)g_2(z)}{(z-\beta_1)^{2k+2m+3}(z-\beta_2)^{2k+2m+3}}, \tag{2.5}$$

其中 $g_1(z), g_2(z)$ 是多项式, 且 $\deg(g_1) < 3k, \deg(g_2) < 3(k+m+1)$.

若 $(f^n)^{(k)} - p$ 至多有一个不同的零点, 记为 ξ_0, 显然互异于 α_1, α_2. 设

$$(f^n)^{(k)} - p(z) = \frac{D(z-\xi_0)^l}{(z-\beta_1)^{2k+m+2}(z-\beta_2)^{2k+m+2}}, \tag{2.6}$$

比较两边次数可知 $l = 4k+3m+4$. 又

$$(f^n)^{(k+m+1)} = \frac{D(z-\xi_0)^{l-m-1}q(z)}{(z-\beta_1)^{2k+2m+3}(z-\beta_2)^{2k+2m+3}}, \tag{2.7}$$

其中 $q(z)$ 是多项式, 且 $\deg(q) < 2(m+1)$.

比较 (2.5) 式和 (2.7) 式, 有 $l-m-1 \leqslant \deg(g_2) < 3(k+m+1)$, 结合 $l = 4k+3m+4$ 有 $k-m<0$, 这与 $k \geqslant m$ 矛盾. 故当 $n = k+m+2, k \geqslant m$ 时, $(f^n)^{(k)} - p$ 至少有两个不同的零点.

综上所述, 若 $k \geqslant m$, 则当 $n \geqslant k+m+2$ 时, $(f^n)^{(k)} - p$ 至少有两个不同的零点. 若 $k < m$, 则当 $n \geqslant k+m+3$ 时, $(f^n)^{(k)} - p$ 至少有两个不同的零点. 引理 2.7 得证.

引理 2.8 设 $k, n \geqslant k+2$ 是两个正整数, $\{f_j\}$ 是区域 D 内亚纯函数列, $\{h_j\}$ 是区域 D 内全纯函数列, 且满足 $h_j(z) \Rightarrow h(z)$, 其中 $h(z) \neq 0$ 是全纯函数. 若 $(f_j^n)^{(k)} - h_j(z)$ 在 D 内至多有一个不同的零点, 则 $\{f_j\}$ 在 D 内正规.

证 假设 $\{f_j\}$ 在 D 内不正规, 则存在 $z_0 \in D$, 使得 $\{f_j\}$ 在 z_0 处不正规, 于是由引理 2.1 知, 存在点列 $z_j \to z_0, \rho_j \to 0$ 及 $\{f_j\}$ 的子列, 不妨仍记为 $\{f_j\}$, 使得 $g_j(\xi) = \rho_j^{-\frac{k}{n}} f_j(z_j + \rho_j \xi)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 内按球面距离内闭一致收敛到一个非常数亚纯函数 $g(\xi)$, 且级至多为 2.

在去掉 g 的极点的区域内, 有

$$(g^n)^{(k)}(\xi) - h(z_0) = \lim_{r\to\infty}[(g_j^n)^{(k)}(\xi) - h_j(z_j+\rho_j\xi)] = \lim_{r\to\infty}[(f_j^n)^{(k)}(z_j+\rho_j\xi) - h_j(z_j+\rho_j\xi)].$$

由于 $n > k$, 显然 $(g^n)^{(k)} - h(z_0) \not\equiv 0$.

断言: $(g^n)^{(k)} - h(z_0)$ 至多有一个不同的零点. 否则, 假设 ξ_1, ξ_2 是 $(g^n)^{(k)} - h(z_0)$ 的两个不同的零点, 则可选取足够小的 δ, 使得两邻域 $D_1 = \{\xi : |\xi - \xi_1| < \delta\}$ 和 $D_2 = \{\xi : |\xi - \xi_2| < \delta\}$ 没有公共点, 且 $(g^n)^{(k)} - h(z_0)$ 在 $D_1 \bigcup D_2$ 内除 ξ_1, ξ_2 外没有其他零点. 由 Hurwitz 定理, 存在 $\xi_{1,j} \to \xi_1$, $\xi_{2,j} \to \xi_2$, 当 j 充分大时, 有

$$(f_j^n)^{(k)}(z_j+\rho_j\xi_{1,j}) - h_j(z_j+\rho_j\xi_{1,j}) = 0,$$

$$(f_j^n)^{(k)}(z_j+\rho_j\xi_{2,j}) - h_j(z_j+\rho_j\xi_{2,j}) = 0.$$

由于 $(f_j^n)^{(k)} - h_j$ 在 D 内至多有一个不同的零点, 从而有 $z_j + \rho_j\xi_{1,j} = z_j + \rho_j\xi_{2,j}$, 这与 $D_1 \bigcap D_2 = \varnothing$ 矛盾. 故 $(g^n)^{(k)} - h(z_0)$ 至多有一个不同的零点. 这与引理 2.5 和引理 2.6 矛盾. 于是 $\{f_j\}$ 在 D 内正规. 引理 2.8 得证.

3 定理证明

3.1 定理 1.2 的证明

由引理 2.8 可知, 只需证明 $\mathcal{F}$ 在 $h(z)$ 的零点 z_0 处正规即可. 不妨设 $z_0 = 0, h(z) = z^t b(z)$, 其中 t 为整数, 满足 $1 \leqslant t \leqslant m$, 且 $b(0) = 1$. 假设 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规, 由引理 2.1, 存

在 $\mathcal{F}$ 的子列 $\{f_j\}$ 及点列 $z_j \to 0, \rho_j \to 0$, 使得 $g_j(\xi) = \rho_j^{-\frac{k+t}{n}} f_j(z_j + \rho_j \xi)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 内按球面距离内闭一致收敛到一个非常数亚纯函数 $g(\xi)$.

下面分两种情况考虑.

情况 1 $\frac{z_j}{\rho_j} \to \infty$. 设 $F_j(\xi) = z_j^{-\frac{k+t}{n}} f_j(z_j + z_j\xi)$. 于是有

$$(F_j^n)^{(k)}(\xi) - (1+\xi)^t b(z_j + z_j\xi) = \frac{(f_j^n)^{(k)}(z_j + z_j\xi) - h(z_j + z_j\xi)}{z_j^t}.$$

由于 $(f^n)^{(k)} - h(z)$ 在 D 内至多有一个不同的零点, 类似前面引理 2.8 的讨论可知, 当 j 充分大时, $(F_j^n)^{(k)}(\xi) - (1+\xi)^t b(z_j + z_j\xi)$ 在 Δ 内至多有一个不同的零点. 由引理 2.8 可知 $\{F_j\}$ 在 Δ 内正规. 故存在 $\{F_j\}$ 的子列, 仍记为 $\{F_j\}$, 在 Δ 内内闭一致收敛到一个亚纯函数 $F(\xi)$ 或 ∞.

若 $F(0) \neq 0$, 则对于任意的 $\xi \in \mathbb{C}/\{g^{-1}(\infty)\}$, 有

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \lim_{j\to\infty} \frac{f_j(z_j + \rho_j\xi)}{\rho_j^{\frac{k+t}{n}}} \\ &= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{z_j}{\rho_j}\right)^{\frac{k+t}{n}} \frac{f_j(z_j + \rho_j\xi)}{z_j^{\frac{k+t}{n}}} \\ &= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{z_j}{\rho_j}\right)^{\frac{k+t}{n}} F\left(\frac{\rho_j}{z_j}\xi\right) = \infty. \end{aligned}$$

因此 $g(\xi) \equiv \infty$, 这与 g 为非常数亚纯函数矛盾.

若 $F(0) = 0$, 则 $(F^n)^{(k+m+1)}(0) \neq \infty$. 由于 $m - t + 1 > 0$, 则对于任意的 $\xi \in \mathbb{C}/\{g^{-1}(\infty)\}$, 有

$$\begin{aligned} (g^n)^{(k+m+1)}(\xi) &= \lim_{j\to\infty} (g_j^n)^{(k+m+1)}(\xi) \\ &= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{\rho_j}{z_j}\right)^{m-t+1} (z_j)^{m-t+1} (f_j^n)^{(k+m+1)}(z_j + \rho_j\xi) \\ &= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{\rho_j}{z_j}\right)^{m-t+1} (F_j^n)^{(k+m+1)}\left(\frac{\rho_j}{z_j}\xi\right) = 0. \end{aligned}$$

因此 $(g^n)^{(k+m+1)}(\xi) \equiv 0$, 则 g^n 至多为 $k+m$ 次多项式, 但 $n \geqslant k+m+2$, 矛盾.

情况 2 $\frac{z_j}{\rho_j} \to \alpha$. 则

$$(g_j^n)^{(k)}(\xi) - (\frac{z_j}{\rho_j} + \xi)^t b(z_j + \rho_j\xi) = \frac{(f_j^n)^{(k)}(z_j + \rho_j\xi) - h(z_j + \rho_j\xi)}{\rho_j^t}.$$

在复平面内除掉 g 的极点的区域内收敛到 $(g^n)^{(k)}(\xi) - (\xi+\alpha)^t$. 由于 $(f_j^n)^{(k)} - h$ 至多有一个不同的零点, 所以当 j 充分大时, $(g_j^n)^{(k)}(\xi) - (\frac{z_j}{\rho_j} + \xi)^t b(z_j + \rho_j\xi)$ 也至多有一个不同的零点. 根据 Hurwitz 定理, $(g^n)^{(k)}(\xi) - (\xi+\alpha)^t$ 至多有一个不同的零点. 这与引理 2.7 矛盾.

综上所述, $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规. 于是 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规. 定理 1.2 得证.

3.2 定理 1.1 的证明

任取 $z_0 \in D$, 下面证明 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规. 取 $f \in \mathcal{F}$, 下面分两种情况考虑.

情况 1.1 $(f^n)^{(k)}(z_0) \neq h(z_0)$, 则存在 z_0 的邻域 $D_\delta = \{z : |z - z_0| < \delta\}$, 使得在 D_δ 内有 $(f^n)^{(k)}(z) \neq h(z)$. 由分担条件可知, 对于每一个 $g \in \mathcal{F}$, 在 D_δ 内有 $(g^n)^{(k)}(z) \neq h(z)$. 由定理 1.2 知 $\mathcal{F}$ 在 D_δ 内正规, 从而在点 z_0 处正规.

情况 1.2 $(f^n)^{(k)}(z_0) = h(z_0)$, 则存在 z_0 的去心邻域 $D_\delta^0 = \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$, 使得在 D_δ^0 内有 $(f^n)^{(k)}(z) \neq h(z)$. 由分担条件可知, 对于每一个 $g \in \mathcal{F}$, 在 D_δ^0 内有 $(g^n)^{(k)}(z) \neq h(z)$, 且 $(g^n)^{(k)}(z_0) = h(z_0)$, 即 $(g^n)^{(k)} - h(z)$ 在 D_δ 内仅有一个零点. 由定理 1.2 知 $\mathcal{F}$ 在 D_δ 内正规, 从而在点 z_0 处正规.

所以 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规, 于是 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规. 定理 1.1 得证.

3.3 定理 1.3 的证明

分 $b = 0$ 和 $b \neq 0$ 两种情况分别讨论.

情况 1 $b = 0$. 由定理条件 (1) 和 (2) 可知, 对任意 $f \in \mathcal{F}$, 有 $f \neq 0$. 任取 $z_0 \in D$, 只需证明 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规即可. 取 $f \in \mathcal{F}$, 则有 $f(z_0) + a(f^{(k)}(z_0))^n = 0$ 或 $f(z_0) + a(f^{(k)}(z_0))^n \neq 0$. 故存在 $\delta > 0$, 使得在 $D_\delta = \{z : |z - z_0| < \delta\}$ 内, $f + a(f^{(k)})^n$ 至多有一个不同的零点. 由分担条件可知, 对于每一个 $g \in \mathcal{F}$, $g + a(g^{(k)})^n$ 在 D_δ 内也至多有一个不同的零点.

断言: $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规. 否则, 假设 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规, 由引理 2.1, 存在 $\mathcal{F}$ 的子列 $\{f_j\}$ 及点列 $z_j \to z_0, \rho_j \to 0$, 使得 $g_j(\xi) = \rho_j^{-\frac{nk}{n-1}} f_j(z_j + \rho_j \xi)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 内按球面距离内闭一致收敛到一个非常数亚纯函数 $g(\xi)$, 且 $g \neq 0$.

易见

$$g_j + a(g_j^{(k)})^n = \rho_j^{-\frac{nk}{n-1}}(f_j + a(f_j^{(k)})^n),$$

在去掉 g 的极点的区域内内闭一致收敛到 $g + a(g^{(k)})^n$.

断言: $g + a(g^{(k)})^n$ 至多有一个不同的零点. 否则, 假设 ξ_1, ξ_2 是 $g + a(g^{(k)})^n$ 的两个不同的零点, 则可选取足够小的 δ', 使得两邻域 $D_1 = \{\xi : |\xi - \xi_1| < \delta'\}$ 和 $D_2 = \{\xi : |\xi - \xi_2| < \delta'\}$ 没有公共点, 且 $g + a(g^{(k)})^n$ 在 $D_1 \bigcup D_2$ 内除 ξ_1, ξ_2 外没有其他零点. 由 Hurwitz 定理, 存在 $\xi_{1,j} \to \xi_1, \xi_{2,j} \to \xi_2$, 当 j 充分大时, 有

$$f_j(z_j + \rho_j \xi_{1,j}) + a(f_j^{(k)}(z_j + \rho_j \xi_{1,j}))^n = 0,$$

$$f_j(z_j + \rho_j \xi_{2,j}) + a(f_j^{(k)}(z_j + \rho_j \xi_{2,j}))^n = 0.$$

但 $f_j + a(f_j^{(k)})^n$ 在 z_0 的邻域内至多有一个不同的零点, 从而有 $z_j + \rho_j \xi_{1,j} = z_j + \rho_j \xi_{2,j}$, 这与 $D_1 \bigcap D_2 = \varnothing$ 矛盾. 故 $g + a(g^{(k)})^n$ 至多有一个不同的零点. 这与引理 2.2 和引理 2.3 矛盾. 所以, $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规.

情况 2 $b \neq 0$. 同样任取 $z_0 \in D$, 只需证明 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规即可. 取 $f \in \mathcal{F}$, 则有 $f(z_0) + a(f^{(k)}(z_0))^n = b$ 或 $f(z_0) + a(f^{(k)}(z_0))^n \neq b$. 故存在 $\delta > 0$, 使得在 $D_\delta = \{z : |z - z_0| < \delta\}$ 内, $f + a(f^{(k)})^n - b$ 至多有一个不同的零点. 由分担条件可知, 对于每一个 $g \in \mathcal{F}$, $g + a(g^{(k)})^n - b$ 在 D_δ 内也至多有一个不同的零点.

断言: $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规. 否则, 假设 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规, 由引理 2.1, 存在 $\mathcal{F}$ 的子列 $\{f_j\}$ 及点列 $z_j \to z_0, \rho_j \to 0$, 使得 $g_j(\xi) = \rho_j^{-k} f_j(z_j + \rho_j \xi)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 内按球面距离内闭一致收敛到一个非常数亚纯函数 $g(\xi)$, 且 $g(\xi)$ 的零点重数至少为 $k + 1$.

注意到

$$\rho_j^k g_j(\xi) + a(g_j^{(k)})^n - b = f_j(z_j + \rho_j \xi) + a(f_j^{(k)}(z_j + \rho_j \xi))^n - b,$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 上去掉 g 的极点的区域内内闭一致收敛于 $a(g^{(k)})^n-b$. 类似情况 1 的讨论可知, $a(g^{(k)})^n-b$ 至多有一个不同的零点. 下面证明这是不可能的. 由于 $n\geqslant 2$, 故方程 $z^n=\frac{b}{a}$ 至少有两个不同的根, 设为 c_1,c_2. 不妨设 $g^{(k)}\neq c_1$, $g^{(k)}=c_2$ 至多有一个不同的零点. 若 g 是超越亚纯函数, 由 Nevanlinna 第二基本定理, 有

$$\begin{aligned}T(r,g^{(k)})&\leqslant \overline{N}(r,g^{(k)})+\overline{N}\Big(r,\frac{1}{g^{(k)}-c_1}\Big)+\overline{N}\Big(r,\frac{1}{g^{(k)}-c_2}\Big)+S(r,g^{(k)})\\&\leqslant \frac{1}{k+1}N(r,g^{(k)})+S(r,g^{(k)}).\end{aligned}$$

因 $k\geqslant 1$, 于是得 $T(r,g^{(k)})=S(r,g^{(k)})$, 矛盾. 若 g 为有理函数, 因 $g^{(k)}\neq c_1$, 且 g 的零点重数至少为 $k+1$, 根据引理 2.4, 可设 $g^{(k)}(\xi)=c_1+\frac{A}{(z-a)^{k+1}}$, 其中 $A\neq 0$, a 是常数. 显然, $\frac{A}{(z-a)^{k+1}}=c_2-c_1$ 有 $k+1$ 个不同的零点. 这与 $g^{(k)}=c_2$ 至多有一个不同的零点矛盾. 因此, $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规.

综上所述, $\mathcal{F}$ 在 D 内正规. 定理 1.3 得证.

致谢 作者感谢审稿人给出的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] Yang L. Value distribution theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[2] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[3] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[4] Schwick W. Normality criteria for families of meromorphic functions [J]. *J Analyse Math*, 1989, 52:241–289.

[5] Wang Y F, Fang M L. Picard values and normal families of meromorphic functions with multiple zeros [J]. *Acta Math Sinica (NS)*, 1998, 14(1):17–26.

[6] Li Y T, Gu Y X. On normal families of meromorphic functions [J]. *J Math Anal Appl*, 2009, 354:421–425.

[7] Yang L. Some recent results and problems in the theory of value-distribution [J]. *Proceedings Symposium on Value Distribution Theory in Several Complex Variables*, (*Notre Dame*, *IN*), 1990:157–171.

[8] Pang X C, Yang D G. Zalcman, L. Normal families of meromorphic functions whose derivatives omit a function [J]. *Comput Methods Funct Theory*, 2002, 2(1):257–265.

[9] Xu Y. Normality and exceptional functions of derivatives [J]. *J Aust Math Soc*, 2004, 76(3):403–413.

[10] 邱玲, 玄祖兴, 李睿婕. 亚纯函数涉及分担函数的正规定则 [J]. 数学进展, 2016, 45(3):371–378.

[11] Ye Y S. A picard type theorem and Bloch law [J]. *Chinese Ann Math*, 1994, 15B(1):75–80.

[12] 方明亮, Zalcman L. 关于 $f+a(f')^n$ 的值分布 [J]. 中国科学 A 辑, 2008, 38(3):279–285.

[13] Xu Y, Wu F Q, Liao L W. Picard values and normal families of meromorphic functions [J]. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect*, 2009, 139(5): 1091–1099.

[14] Lei C L, Fang M L, Zeng C P. Some normality criteria of meromorphic functions [J]. *Acta Math Sci*, 2013, 33B(6):1667–1674.

[15] Wang Y M. The normality of meromorphic functions with multiple zeros and poles concerning sharing values [J]. *Kyungpook Math J*, 2015, 55:641–652.

[16] Pang X C, Zalcman L. Normal families and shared values [J]. *Bull London Math Soc*, 2000, 32:325–331.

[17] Zalcman L. Normal families: new perspectives [J]. *Bull Amer Math Soc*, 1998, 35:215–230.

[18] Chen J F. Normality criteria for families of zero-free meromorphic functions [J]. *Ann Polon Math*, 2015, 115(1):89–98.

Normal Criterion Concerning Shared Functions and Shared Values

ZENG Cuiping[1] DENG Bingmao[2] FANG Mingliang[3]

[1]Department of Applied Mathematics, Guangdong University Of Finance, Guangzhou 510521, China. E-mail: ytxzcp@163.com

[2]Corresponding author. Department of Applied Mathematics, Guangdong University Of Finance, Guangzhou 510521, China. E-mail: dbmao2012@163.com

[3]Institute of Applied Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China. E-mail: mlfang@scau.edu.cn

Abstract The authors study normal criterion concerning share functions and share values and prove: Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in D, and let k, n be two positive integers with $n \geqslant k+3$. For each $f \in \mathcal{F}$, $(f^n)^{(k)} - z$ has at most one zero, then $\mathcal{F}$ is normal in D. It means that the claim made by Yang at the academic conference in University of Notre Dame in 1990 is still valid when $(f^n)^{(k)}$ has fixed point.

Keywords Meromorphic functions, Normal families, Shared functions, Shared values

2000 MR Subject Classification 30D45, 30D35