数 学 年 刊
2015, 36A(1):69–80
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2015.0008

Clifford Möbius 变换与 Hypergenic 函数*

谢永红[1] 张晓飞[2] 王丽丽[3]

提要 首先, 在实 Clifford 代数空间 $Cl_{n+1,0}(\mathbb{R})$ 中给出了与 Clifford Möbius 变换相关的一些定理. 其次, 证明了 hypergenic 函数与 Clifford Möbius 变换的复合可以得到一个加权的 hypergenic 函数.

关键词 Hypergenic 函数, Möbius 变换, 实 Clifford 分析
MR (2000) 主题分类 30B30, 31B10
中图法分类 O177.4
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2015)01-0069-12

1 引 言

Clifford 代数是 Clifford[1] 建立的可结合不可交换的代数. 它在物理上有很多应用 [2]. 1982 年, Brackx 等 [3] 建立了 Clifford 分析的理论基础. Clifford 分析已经被应用到很多的数学分支 [4–5]. Eriksson[6–8], 黄沙 [9], 乔玉英 [10], 谢永红和杨贺菊等 [11–14] 在 Clifford 分析中做了大量工作. Ahlfors[15–16] 和 Waterman[17] 在不同于本文的 Clifford 代数空间中研究了 Clifford Möbius 变换. 2003 年, Hertrich-Jeromin[18] 对于 Möbius 微分几何进行了研究. 2009 年, Eriksson 和 Orelma [7] 给出 hypergenic 函数的 Cauchy 积分公式. 2010 年, Eriksson 和 Orelma [8] 研究了 hypergenic 函数的局部性质以及积分表示. 2013 年与 2014 年, 谢永红和杨贺菊 [12–14] 研究了与 k-hypergenic 函数相关的一些问题.

在以上工作的基础上, 本文首先在实 Clifford 代数空间 $Cl_{n+1,0}(\mathbb{R})$ 中给出了与 Clifford Möbius 变换相关的一些定理. 其次, 证明了 hypergenic 函数与 Clifford Möbius 变换的复合可以得到一个加权的 hypergenic 函数. 本文推广了文 [6, 15] 的一些结果.

2 预备知识

设 $Cl_{n+1,0}(\mathbb{R})$ 是 2^{n+1} 维实 Clifford 代数空间, 其单位元是 $e_\emptyset = 1$ ($\emptyset$ 指空集), 其基是 $e_0, e_1, \cdots, e_n; e_0e_1, \cdots, e_{n-1}e_n; \cdots; e_0e_1\cdots e_n$. 对于任何整数 i, j $(0 \leqslant i, j \leqslant n)$, 规定 $e_ie_j = -e_je_i$ $(i \neq j)$ 且 $e_j^2 = +1$. 任意的元素 $a \in Cl_{n+1,0}(\mathbb{R})$ 可以表示为 $a = \sum\limits_A a_Ae_A$, 其中 $a_A \in \mathbb{R}$, $e_A = e_{\alpha_1}\cdots e_{\alpha_h}$, $A = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_h\}$ $(0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_h \leqslant n)$ 或 $A = \emptyset$. 若

本文 2013 年 12 月 16 日收到, 2014 年 10 月 17 日收到修改稿.
[1]河北师范大学数学与信息科学学院, 石家庄 050024. E-mail: xyh1973@126.com
[2]平顶山学院数学与信息科学学院, 河南 平顶山 467000. E-mail: zhxfei2013@163.com
[3]石家庄军械工程学院应用数学研究所, 石家庄 050003. E-mail: wang.lyly@foxmail.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11301136, No. 11401159, No. 11101139, No. 11401162), 河北省自然科学基金 (No. A2014205069, No. A2015205012), 浙江省自然科学基金 (No. LY14A010017) 和河北师范大学博士基金项目 (No. L2015B04, No. L2015B03) 的资助.

$a=a_\emptyset+\sum\limits_{A^*}a_{A^*}e_{A^*}$, 其中 $A^*\subseteq A$ 且 $A^*\neq\emptyset$, 则分别称 $a_\emptyset$ 和 $\sum\limits_{A^*}a_{A^*}e_{A^*}$ 为 a 的实部和虚部. $a_\emptyset$ 和 $\sum\limits_{A^*}a_{A^*}e_{A^*}$ 分别记为 $\mathrm{Re}\,a$ 和 $\mathrm{Im}\,a$. 若 $a=\sum\limits_{A}a_Ae_A, b=\sum\limits_{B}b_Be_B\in Cl_{n+1,0}(\mathbb{R})$, 定义 $\sum\limits_{A}a_Ab_A$ 为 a 与 b 的内积, 记作 (a,b). 称 $x=x_0e_0+x_1e_1+\cdots+x_ne_n$ 为 $Cl_{n+1,0}(\mathbb{R})$ 中的向量. $Cl_{n+1,0}(\mathbb{R})$ 中所有向量构成的集合记作 $\mathbb{V}^{n+1}$. 我们认为 $\mathbb{V}^{n+1}$ 等同于欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$. 记 $\mathbb{V}^{n+1}\cup\{\infty\}$ 为 $\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$. 对于任意的 $x,\,y\in\mathbb{V}^{n+1}$, 易证

$$|xy|=|x||y|, \tag{2.1}$$

$$(x,y)=\frac{1}{2}(xy+yx), \tag{2.2}$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 是内积.

对于任意的 $a\in Cl_{n+1,0}(\mathbb{R})$, 定义 $\overline{a}$ 与 a' 如下 [7]:

$$\overline{a}=\sum_A(-1)^{\frac{|A|(|A|+1)}{2}}a_Ae_A,\quad a'=\sum_A a_Ae'_A,$$

其中 $|A|$ 是 A 中的元素个数, $e'_A=(-1)^{|A|}e_A$. 易知 $\overline{e}_j=(e_j)'=-e_j$ $(j=0,1,\cdots,n)$. 对于任意的 $x\in\mathbb{V}^{n+1}$, 有 $\overline{x}=x'=-x$, $|x|^2=x^2=x'\overline{x}=\overline{x}x'$, 且当 $x\neq0$ 时有 $x^{-1}=\frac{x}{|x|^2}$. $\mathbb{V}^{n+1}$ 中所有非零向量的有限乘积都是可逆的, 它们构成了乘法群 Γ_{n+1}, 称之为 Clifford 群. 对于任意的 $a,b\in Cl_{n+1,0}(\mathbb{R})$, 有

$$(ab)'=a'b',\quad (a,b)=\mathrm{Re}(a'\overline{b})=\mathrm{Re}(\overline{a}b'),\quad |a|^2=\mathrm{Re}(a'\overline{a})=\mathrm{Re}(\overline{a}b').$$

设 $Cl_{n,0}(\mathbb{R})$ 是 2^n 维实 Clifford 代数空间, 其单位元是 $e_\emptyset=1$, 其基是 $e_1,\cdots,e_n;e_1e_2,\cdots,e_{n-1}e_n;\cdots;e_1e_2\cdots e_n$. 称 $x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$ 是 $Cl_{n,0}(\mathbb{R})$ 中的向量. $Cl_{n,0}(\mathbb{R})$ 中所有向量构成的集合记作 $\mathbb{V}^n$. 我们认为 $\mathbb{V}^n$ 等同于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$. 记 $\mathbb{V}^n\cup\{\infty\}$ 为 $\overline{\mathbb{V}^n}$. $\mathbb{V}^n$ 所有非零向量的有限乘积都是可逆的, 它们构成了乘法群 Γ_n.

类似于文 [7], 任意元素 $a\in Cl_{n+1,0}(\mathbb{R})$ 可唯一分解为 $a=b+e_0c$, 其中 $b,\,c\in Cl_{n,0}(\mathbb{R})$. 定义映射 P_0: $Cl_{n+1,0}(\mathbb{R})\to Cl_{n,0}(\mathbb{R})$ 与 Q_0: $Cl_{n+1,0}(\mathbb{R})\to Cl_{n,0}(\mathbb{R})$, 使得 $P_0a=b$ 且 $Q_0a=c$, 其中 $b,\,c$ 分别称为 a 的 P_0 部和 Q_0 部. $(P_0a)',(Q_0a)'$ 分别记为 P'_0a,Q'_0a.

引理 2.1 [7] 对于任意的 $a\in Cl_{n,0}(\mathbb{R})$, 有 $e_0a=a'e_0$.

引理 2.2 [7] 对于任意的 $a,b\in Cl_{n+1,0}(\mathbb{R})$, 有

$$\begin{aligned}&P_0(ab)=(P_0a)(P_0b)+(Q'_0a)(Q_0b),\\&Q_0(ab)=(P'_0a)(Q_0b)+(Q_0a)(P_0b)=a'(Q_0b)+(Q_0a)b.\end{aligned}$$

在本文中设 Ω 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的非空开子集. 定义在 Ω 上取值于 $Cl_{n+1,0}(\mathbb{R})$ 中的函数 f 可记为 $f(x)=\sum\limits_A f_A(x)e_A$, 其中 f_A 是实值函数. 函数 $f(x)=\sum\limits_A f_A(x)e_A$ 在 Ω 上是连续的当且仅当 f 的每个分量 f_A 在 Ω 上是连续的. 设 $C^r(\Omega,Cl_{n+1,0}(\mathbb{R}))=\big\{f\mid f:\Omega\to Cl_{n+1,0}(\mathbb{R}),\,f(x)=\sum\limits_A f_A(x)e_A$, 其中 f_A 在 Ω 上 r 次连续可微, $r\in\mathbb{N}^*\big\}$.

对于任意的 $f\in C^1(\Omega, Cl_{n+1,0}(\mathbb{R}))$, 引入 Dirac 算子如下 [7]:

$$Df=\sum_{j=0}^{n} e_j\frac{\partial f}{\partial x_j}=\sum_{j=0}^{n} e_j\sum_{A}\frac{\partial f_A}{\partial x_j}e_A,\quad fD=\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}e_j=\sum_{j=0}^{n}\sum_{A}\frac{\partial f_A}{\partial x_j}e_Ae_j,$$
$$\overline{D}f=\sum_{j=0}^{n}\overline{e}_j\frac{\partial f}{\partial x_j},\quad f\overline{D}=\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\overline{e}_j.$$

从而可得 $\overline{D}f=-Df$, $f\overline{D}=-fD$.

对于任意的 $f\in C^2(\Omega, Cl_{n+1,0}(\mathbb{R}))$, 有

$$D^2f=\overline{D}^2f=fD^2=f\overline{D}^2=\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}=\Delta f,$$

其中 $\Delta=\sum\limits_{j=0}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ 是 Laplace 算子.

引理 2.3 [14]　若 $f,g\in C^1(\Omega, Cl_{n+1,0}(\mathbb{R}))$, 则

$$D[fg]=[Df]g+\sum_{j=0}^{n}e_jf\frac{\partial g}{\partial x_j},\quad \overline{D}[fg]=[\overline{D}f]g+\sum_{j=0}^{n}\overline{e}_jf\frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

在本文中设 Ω_1 是 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{(x_0,x_1,\cdots,x_n)\mid x_0=0, x_i\in\mathbb{R}\ (i=1,2,\cdots,n)\}$ 中的非空开子集. 对于任意的 $f\in C^1(\Omega_1, Cl_{n+1,0}(\mathbb{R}))$, 引入左、右双曲型 Dirac 算子及其共轭算子如下 [7]:

$$Hf=Df-\frac{n-1}{x_0}Q_0f,\quad \overline{H}f=-Hf,$$
$$fH=fD-\frac{n-1}{x_0}Q_0'f,\quad f\overline{H}=-fH.$$

定义 2.1 [7]　若 $f\in C^1(\Omega, Cl_{n+1,0}(\mathbb{R}))$ 在 Ω 上满足 $Df=0$, 则称 f 为 Ω 上的左单演函数，简称为 Ω 上的单演函数. 类似可定义 f 为 Ω 上的右单演函数.

定义 2.2 [7]　若 $f\in C^1(\Omega_1, Cl_{n+1,0}(\mathbb{R}))$ 在 Ω_1 上满足 $Hf=0$, 则称 f 为 Ω_1 上的左 hypergenic 函数, 简称为 Ω_1 上的 hypergenic 函数. 类似可定义 f 为 Ω_1 上的右 hypergenic 函数.

命题 2.1　对于任意的 $a,b\in\Gamma_n$, 有

$$|a|^2=a'\overline{a}=\overline{a}a',\quad |ab|=|a||b|.$$

证　我们不妨假设 $a=a^1a^2\cdots a^m$, 其中 $m\in N^*$ 且 $a^i\in\mathbb{V}^n\setminus\{0\}\ (i=1,2,\cdots,m)$. 则 $a'\overline{a}=(a^1)'(a^2)'\cdots(a^m)'\overline{a^m}\cdots\overline{a^2}\,\overline{a^1}=|a^1|^2|a^2|^2\cdots|a^m|^2>0$. 因为 $|a|^2=\mathrm{Re}(a'\overline{a})$, 所以 $|a|^2=a'\overline{a}$. 类似可证 $|a|^2=\overline{a}a'$. 因此

$$|ab|^2=\mathrm{Re}((ab)'\overline{ab})=\mathrm{Re}(a'b'\overline{b}\overline{a})=|b|^2\mathrm{Re}(a'\overline{a})=|a|^2|b|^2,$$

故 $|ab|=|a||b|$.

命题 2.2 对于任意的 $a\in\Gamma_n$, $x\in\mathbb{V}^n$, 有

$$ax\overline{a}\in\mathbb{V}^n,\quad ax(a')^{-1}\in\mathbb{V}^n.$$

证 对于任意的 $x,y\in\mathbb{V}^n$, 由 (2.2) 得 $yx\overline{y}=2(x,y)\overline{y}+x|y|^2$. 因此 $yx\overline{y}\in\mathbb{V}^n$. 设 $a=a^1a^2\cdots a^m$, 其中 $m\in N^*$ 且 $a^i\in\mathbb{V}^n\backslash\{0\}\ (i=1,2,\cdots,m)$, 则 $ax\overline{a}=a^1a^2\cdots a^mx\overline{a^m}\cdots\overline{a^2}\ \overline{a^1}$. 重复上述过程得 $ax\overline{a}\in\mathbb{V}^n$. 由命题 2.1 得 $ax(a')^{-1}\in\mathbb{V}^n$.

接下来给出在本文中起着重要作用的一个命题.

命题 2.3 对于任意的 $a,b\in\Gamma_n$, 有

$$ab^{-1}\in\mathbb{V}^n\Leftrightarrow\overline{b}a\in\mathbb{V}^n\Leftrightarrow\overline{a}b\in\mathbb{V}^n.$$

证 若 $ab^{-1}\in\mathbb{V}^n$, 由命题 2.2 得 $\overline{b}a=\overline{b}ab^{-1}b\in\mathbb{V}^n$. 反之，若 $\overline{b}a\in\mathbb{V}^n$, 再由命题 2.2 得 $a'\overline{b}=a'\overline{b}aa^{-1}\in\mathbb{V}^n$. 由命题 2.1 得 $a'(b')^{-1}\in\mathbb{V}^n$. 因此 $ab^{-1}\in\mathbb{V}^n$.

$\overline{b}a\in\mathbb{V}^n\Leftrightarrow\overline{a}b\in\mathbb{V}^n$ 显然成立.

3 Clifford Möbius 变换

类似于文 [15], 我们考虑矩阵 $g=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$, 其中 $a,b,c,d\in\Gamma_n\cup\{0\}$. 若 g 依照规则 $g(x)=(ax+b)(cx+d)^{-1}$ 作用在向量 x 上，则称矩阵 g 诱导了映射 $g(x)$. 为方便起见，用字母 g 既表示矩阵又表示映射.

定义 3.1 我们称矩阵 $g=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ 属于集合 $GL(\Gamma_n)$, 若满足下面条件:

(i) $a,b,c,d\in\Gamma_n\cup\{0\}$;

(ii) $\lambda(g)=a\overline{d}+b\overline{c}\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$;

(iii) $a\overline{b},c\overline{d},\overline{c}a,\overline{d}b\in\mathbb{V}^n$.

定理 3.1 若矩阵 $g=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$, 其中 $a,b,c,d\in\Gamma_n\cup\{0\}$, 则 g 分别诱导了从 $\overline{\mathbb{V}^n}$ 到 $\overline{\mathbb{V}^n}$ 和从 $\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$ 到 $\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$ 的双射当且仅当 $g\in GL(\Gamma_n)$.

证 首先证明: 若 g 分别诱导了从 $\overline{\mathbb{V}^n}$ 到 $\overline{\mathbb{V}^n}$ 和从 $\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$ 到 $\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$ 的双射, 则 $g\in GL(\Gamma_n)$.

(1) 由 $g(x)=(ax+b)(cx+d)^{-1}$ 的存在性知 $cx+d=0$ 或 $cx+d$ 是可逆的, 并且 $ax+b$ 和 $cx+d$ 不能同时为 0. 因为 g 诱导了从 $\overline{\mathbb{V}^n}$ 到 $\overline{\mathbb{V}^n}$ 的双射，所以 $g(0)=bd^{-1}$, $g(\infty)=ac^{-1}$, $g^{-1}(0)=-a^{-1}b$, $g^{-1}(\infty)=-c^{-1}d\in\overline{\mathbb{V}^n}$.

若 $a,b,c,d\in\Gamma_n$, 由命题 2.3 知 $a\overline{b},c\overline{d},\overline{c}a,\overline{d}b\in\mathbb{V}^n$.

若 $a=0$, 则 $a\overline{b}=\overline{c}a=0\in\mathbb{V}^n$ 且 $b\neq0,c\neq0$. 若此时 $d=0$, 则 $c\overline{d}=\overline{d}b=0\in\mathbb{V}^n$; 若此时 $d\neq0$, 则由命题 2.3 知 $c\overline{d},\overline{d}b\in\mathbb{V}^n$. 因此当 $a=0$ 时， $a\overline{b},c\overline{d},\overline{c}a,\overline{d}b\in\mathbb{V}^n$. 类似可证其它情形.

因此定义 3.1 中条件 (iii) 成立.

(2) 易证

$$\begin{aligned} y=g(x) &\Leftrightarrow ycx+yd=ax+b \\ &\Leftrightarrow x\overline{c}y-\overline{d}y=-x\overline{a}+\overline{b} \\ &\Leftrightarrow x=(\overline{d}y+\overline{b})(\overline{c}y+\overline{a})^{-1}=h(y), \end{aligned}$$

其中 $h=\left(\begin{smallmatrix}\overline{d} & \overline{b}\\ \overline{c} & \overline{a}\end{smallmatrix}\right)$. 因为矩阵 g 分别诱导了从 $\overline{\mathbb{V}^n}$ 到 $\overline{\mathbb{V}^n}$ 和从 $\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$ 到 $\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$ 的双射，所以矩阵 h 也分别诱导了从 $\overline{\mathbb{V}^n}$ 到 $\overline{\mathbb{V}^n}$ 和从 $\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$ 到 $\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$ 的双射.

(3) 若 $g_1=\left(\begin{smallmatrix}a^1 & b^1\\ c^1 & d^1\end{smallmatrix}\right)$, $g_2=\left(\begin{smallmatrix}a^2 & b^2\\ c^2 & d^2\end{smallmatrix}\right)$, 则

$$\begin{aligned} (g_2\circ g_1)(x) &= g_2((a^1x+b^1)(c^1x+d^1)^{-1}) \\ &= (a^2(a^1x+b^1)(c^1x+d^1)^{-1}+b^2)(c^2(a^1x+b^1)(c^1x+d^1)^{-1}+d^2)^{-1} \\ &= (a^2(a^1x+b^1)+b^2(c^1x+d^1))(c^2(a^1x+b^1)+d^2(c^1x+d^1))^{-1} \\ &= ((a^2a^1+b^2c^1)x+(a^2b^1+b^2d^1))((c^2a^1+d^2c^1)x+(c^2b^1+d^2d^1))^{-1} \\ &= (g_2g_1)(x), \end{aligned}$$

即矩阵的乘积诱导了映射的复合.

(4) 证明：矩阵 g 诱导了从 $\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$ 到 $\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$ 的恒等映射 $\Leftrightarrow a=d\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 且 $b=c=0$.

若矩阵 g 诱导了从 $\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$ 到 $\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$ 的恒等映射，则 $g(x)=x\Leftrightarrow ax+b=x(cx+d)$, 其中 $x\in\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$. 令 $x=0$ 和 $x=\infty$, 则 $b=0$ 和 $c=0$. 对于 $x\in\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$, 有 $ax=xd$, 于是 $ae_0=e_0d$, 故 $a=d'$. 设 $a=\sum\limits_{A}a_Ae_A$, 其中 $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_h\}$ 或 $A=\emptyset$, 整数 α_l $(l=1,2,\cdots,h)$ 满足 $0\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_h\leqslant n$ 且 $a_A\in\mathbb{R}$, 则有 $ax=xa'$, 于是 $ae_l=e_la'\,(l=0,1,\cdots,n)$, 故 $e_Ae_{\alpha_1}=e_{\alpha_1}e'_A$, 所以只能是 $A=\emptyset$, 故 $a=d\in\mathbb{R}$. 因为 a,b,c,d 不能同时为 0, 所以 $a=d\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

反之，结论显然成立.

(5) 由 (1)–(2) 知

$$gh=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{d} & \overline{b}\\ \overline{c} & \overline{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\overline{d}+b\overline{c} & a\overline{b}+b\overline{a}\\ c\overline{d}+d\overline{c} & c\overline{b}+d\overline{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda(g) & 0\\ 0 & \overline{\lambda(g)}\end{pmatrix},$$

$$hg=\begin{pmatrix}\overline{d} & \overline{b}\\ \overline{c} & \overline{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{d}a+\overline{b}c & \overline{d}b+\overline{b}d\\ \overline{c}a+\overline{a}c & \overline{c}b+\overline{a}d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda(h) & 0\\ 0 & \overline{\lambda(h)}\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda(g)=a\overline{d}+b\overline{c},\ \lambda(h)=\overline{d}a+\overline{b}c$.

由 (2) 和 (4) 知 $\lambda(g)=\lambda(h)\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 即定义 3.1 中的条件 (ii) 成立.

故 $g\in GL(\Gamma_n)$.

接下来证明：若 $g\in GL(\Gamma_n)$, 则 g 分别诱导了从 $\overline{\mathbb{V}^n}$ 到 $\overline{\mathbb{V}^n}$ 和从 $\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$ 到 $\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$ 的双射.

情形 1 若 $c=0$, 则 $g(x)=axd^{-1}+bd^{-1}$. 由命题 2.3 知 $bd^{-1}\in\mathbb{V}^n$. 因为 $axd^{-1}=ax(a')^{-1}a'd^{-1}$ 且 $\lambda(g)=a\overline{d}\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, 若 $x\in\mathbb{V}^n$, 则由命题 2.3 知 $axd^{-1}\in\mathbb{V}^n$; 若 $x=\infty$, 则 $g(x)=\infty$. 因此，若 $x\in\overline{\mathbb{V}^n}$, 则 $g(x)\in\overline{\mathbb{V}^n}$. 类似地，可证下述结论：若 $x\in\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$, 则

$g(x)\in\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$; 若 $x\in\overline{\mathbb{V}^{n}}$, 则 $h(x)\in\overline{\mathbb{V}^{n}}$, 故 $g^{-1}(x)\in\overline{\mathbb{V}^{n}}$; 若 $x\in\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$, 则 $h(x)\in\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$, 故 $g^{-1}(x)\in\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$. 又因为 $g(x),g^{-1}(x)$ 都是单射，所以 g 分别诱导了从 $\overline{\mathbb{V}^{n}}$ 到 $\overline{\mathbb{V}^{n}}$ 和从 $\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$ 到 $\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$ 的双射.

情形 2 (1) 若 $c\neq 0$, 证明 $g(x)=(ax+b)(cx+d)^{-1}$ 定义良好.

若 $ax+b=cx+d=0$, 则 $x=-c^{-1}d=\overline{d}\,\overline{(c^{-1})}$, $ax+b=a\overline{d}\,\overline{(c^{-1})}+b=0$, 故 $a\overline{d}+b\overline{c}=0$. 这与定义 3.1 中的条件 (ii) 矛盾，故 $g(x)$ 定义良好.

(2) 若矩阵 $g\in GL(\Gamma_n)$, 证明矩阵 $g^{-1}\in GL(\Gamma_n)$.

因为 $gh=hg=\lambda(g)I=\lambda(h)I$, 其中 I 是单位矩阵， $\lambda(g)=a\overline{d}+b\overline{c}\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, 所以 $g^{-1}=\frac{h}{\lambda(g)}$, 故 $\lambda(g^{-1})=\frac{\overline{d}a+\overline{b}c}{(\lambda(g))^2}=\frac{\lambda(h)}{(\lambda(g))^2}=\frac{1}{\lambda(g)}\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. 由定义 3.1 中的条件 (i) 和 (iii) 知 $\frac{\overline{d}}{\lambda(g)},\frac{\overline{b}}{\lambda(g)},\frac{\overline{c}}{\lambda(g)},\frac{\overline{a}}{\lambda(g)}\in\Gamma_n\cup\{0\}$ 且 $\frac{\overline{d}b}{(\lambda(g))^2},\frac{\overline{c}a}{(\lambda(g))^2},\frac{c\overline{d}}{(\lambda(g))^2},\frac{a\overline{b}}{(\lambda(g))^2}\in\mathbb{V}^n$, 故

$g^{-1}\in GL(\Gamma_n)$.

(3) 若 $x\in\overline{\mathbb{V}^{n}}$, 证明 $g(x)\in\overline{\mathbb{V}^{n}}$.

易证

$$(-y\overline{c}+\overline{d})(ax+b)+(-y\overline{a}+\overline{b})(cx+d)=(\overline{d}a+\overline{b}c)(x-y),$$

因为 $\lambda(g)=\lambda(h)\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, 所以

$$g(x)+(-y\overline{c}+\overline{d})^{-1}(-y\overline{a}+\overline{b})=\lambda(g)(-y\overline{c}+\overline{d})^{-1}(x-y)(cx+d)^{-1},$$

即

$$g(x)+\overline{g(y)}=\lambda(g)(-y\overline{c}+\overline{d})^{-1}(x-y)(cx+d)^{-1}.$$

在上式中令 $y=0$, 则 $g(x)+\overline{g(0)}=\lambda(g)(\overline{d})^{-1}x(cx+d)^{-1}$.

若 $g(x)+\overline{g(0)}=0$, 由命题 2.3 知 $g(0)=bd^{-1}\in\mathbb{V}^n$, 故 $g(x)\in\overline{\mathbb{V}^{n}}$.

若 $g(x)+\overline{g(0)}\neq 0$, 则

$$(g(x)-bd^{-1})^{-1}=(\lambda(g))^{-1}(cx+d)x^{-1}\overline{d}=(\lambda(g))^{-1}(c\overline{d}+dx^{-1}\overline{d}),$$

由命题 2.2–2.3 知 $g(x)\in\overline{\mathbb{V}^{n}}$.

类似地，可证：若 $x\in\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$, 则 $g(x)\in\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$.

(4) 若 $x\in\overline{\mathbb{V}^{n}}$, 证明 $g^{-1}(x)\in\overline{\mathbb{V}^{n}}$.

易证

$$(-yc+a)(\overline{d}x+\overline{b})+(-yd+b)(\overline{c}x+\overline{a})=\lambda(g)(x-y),$$

故

$$h(x)+\overline{h(y)}=\lambda(g)(-yc+a)^{-1}(x-y)(\overline{c}x+\overline{a})^{-1}.$$

在上式中令 $y=0$, 则 $h(x)+\overline{h(0)}=\lambda(g)a^{-1}x(\overline{c}x+\overline{a})^{-1}$.

若 $h(x)+\overline{h(0)}=0$, 由命题 2.3 知 $h(0)=-a^{-1}b\in\overline{\mathbb{V}^{n}}$, 故 $h(x)\in\overline{\mathbb{V}^{n}}$.

若 $h(x)+\overline{h(0)}\neq 0$, 则

$$(h(x)+a^{-1}b)^{-1}=(\lambda(g))^{-1}(\overline{c}x+\overline{a})x^{-1}a=(\lambda(g))^{-1}(\overline{c}a+\overline{a}x^{-1}a),$$

由命题 2.2–2.3 知 $h(x) \in \overline{\mathbb{V}^n}$, 即 $g^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda(g)} h(x) \in \overline{\mathbb{V}^n}$.

同理可证：若 $x \in \overline{\mathbb{V}^{n+1}}$, 则 $g^{-1}(x) \in \overline{\mathbb{V}^{n+1}}$.

(5) 因为 $gg^{-1} = g^{-1}g = I$, 其中 I 是单位矩阵，所以 g 分别诱导了从 $\overline{\mathbb{V}^n}$ 到 $\overline{\mathbb{V}^n}$ 和从 $\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$ 到 $\overline{\mathbb{V}^{n+1}}$ 的双射.

定理 3.2　集合 $GL(\Gamma_n)$ 在乘法运算下构成群，称之为 Clifford Möbius 变换群.

证　显然有单位矩阵 $I \in GL(\Gamma_n)$. 在定理 3.1 中已经证明：若 $g \in GL(\Gamma_n)$, 则 $g^{-1} \in GL(\Gamma_n)$.

下面证明：若 $g_1 = \begin{pmatrix} a^1 & b^1 \\ c^1 & d^1 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix} \in GL(\Gamma_n)$, 则

$$g_1 g_2 = \begin{pmatrix} a^1a^2 + b^1c^2 & a^1b^2 + b^1d^2 \\ c^1a^2 + d^1c^2 & c^1b^2 + d^1d^2 \end{pmatrix} \in GL(\Gamma_n).$$

若 a^1 或 c^2 中有一个是 0, 易知 $a^1a^2 + b^1c^2 \in \Gamma_n \cup \{0\}$; 若 $a^1 \neq 0$ 且 $c^2 \neq 0$, 则 $a^1a^2 + b^1c^2 = a^1(a^2(c^2)^{-1} + (a^1)^{-1}b^1)c^2 \in \Gamma_n \cup \{0\}$. 类似可以证明 $a^1b^2 + b^1d^2$, $c^1a^2 + d^1c^2$, $c^1b^2 + d^1d^2 \in \Gamma_n \cup \{0\}$.

由定义 3.1 中的条件 (ii), 知

$$\begin{aligned} &(a^1a^2 + b^1c^2)\overline{(c^1b^2 + d^1d^2)} + (a^1b^2 + b^1d^2)\overline{(c^1a^2 + d^1c^2)} \\ &= (a^1a^2 + b^1c^2)(\overline{b^2}\,\overline{c^1} + \overline{d^2}\,\overline{d^1}) + (a^1b^2 + b^1d^2)(\overline{a^2}\,\overline{c^1} + \overline{c^2}\,\overline{d^1}) \\ &= (a^2\overline{d^2} + b^2\overline{c^2})(a^1\overline{d^1} + b^1\overline{c^1}) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

由命题 2.3 和定理 3.1 的证明，知

$$\begin{aligned} \overline{(a^1a^2 + b^1c^2)^{-1}(a^1b^2 + b^1d^2)} &= (\overline{d^2}\,\overline{b^1}(\overline{a^1})^{-1} + \overline{b^2})(\overline{c^2}\,\overline{b^1}(\overline{a^1})^{-1} + \overline{a^2})^{-1} \\ &= \lambda(g_2)g_2^{-1}(\overline{b^1}(\overline{a^1})^{-1}) \in \overline{\mathbb{V}^n}, \\ \overline{(c^1a^2 + d^1c^2)^{-1}(c^1b^2 + d^1d^2)} &= (\overline{d^2}\,\overline{d^1}(\overline{c^1})^{-1} + \overline{b^2})(\overline{c^2}\,\overline{d^1}(\overline{c^1})^{-1} + \overline{a^2})^{-1} \\ &= \lambda(g_2)g_2^{-1}(\overline{d^1}(\overline{c^1})^{-1}) \in \overline{\mathbb{V}^n}, \\ (a^1a^2 + b^1c^2)(c^1a^2 + d^1c^2)^{-1} &= (a^1a^2(c^2)^{-1} + b^1)(c^1a^2(c^2)^{-1} + d^1)^{-1} \\ &= g_1(a^2(c^2)^{-1}) \in \overline{\mathbb{V}^n}, \\ (a^1b^2 + b^1d^2)(c^1b^2 + d^1d^2)^{-1} &= (a^1b^2(d^2)^{-1} + b^1)(c^1b^2(d^2)^{-1} + d^1)^{-1} \\ &= g_1(b^2(d^2)^{-1}) \in \overline{\mathbb{V}^n}. \end{aligned}$$

若 $a^1a^2 + b^1c^2 = 0$, 则显然有 $(a^1a^2 + b^1c^2)\overline{(a^1b^2 + b^1d^2)} \in \mathbb{V}^n$; 若 $a^1a^2 + b^1c^2 \neq 0$, 则由命题 2.3 知 $(a^1a^2 + b^1c^2)\overline{(a^1b^2 + b^1d^2)} \in \mathbb{V}^n$.

类似地，可证

$$(c^1a^2 + d^1c^2)\overline{(c^1b^2 + d^1d^2)},\ \overline{(c^1a^2 + d^1c^2)}(a^1a^2 + b^1c^2),\ \overline{(c^1b^2 + d^1d^2)}(a^1b^2 + b^1d^2) \in \mathbb{V}^n.$$

因此 $g_1g_2 \in GL(\Gamma_n)$.

若矩阵 $g_i (i = 1, 2, 3) \in GL(\Gamma_n)$, 易知 $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3) \in GL(\Gamma_n)$.

因此 $GL(\Gamma_n)$ 在乘法运算下构成了群.

当矩阵 $g \in GL(\Gamma_n)$ 时，记 $\lambda(g) = \lambda(h) = a\overline{d} + b\overline{c} = \overline{d}a + \overline{b}c$ 为 λ.

定理 3.3 设矩阵 $g \in GL(\Gamma_n)$.

(1) 若 $c = 0$, 则 $g(x) = \frac{1}{\lambda}ax\overline{a} + bd^{-1}$;

(2) 若 $c \neq 0$, 则 $g(x) = ac^{-1} + \lambda(\overline{c})^{-1}(x + c^{-1}d)^{-1}c^{-1}$.

证 (1) 若 $c = 0$, 则 $\lambda = a\overline{d} = d\overline{a} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 即 $d^{-1} = \frac{\overline{a}}{\lambda}$, 故 $g(x) = \frac{1}{\lambda}ax\overline{a} + bd^{-1}$.

(2) 若 $c \neq 0$, 则 $\lambda(\overline{c})^{-1} = (a\overline{d} + b\overline{c})(\overline{c})^{-1} = a\overline{(c^{-1}d)} + b = b - ac^{-1}d$. 因此

$$\begin{aligned} g(x) &= (ax + b)(cx + d)^{-1} \\ &= (ac^{-1}(cx + d) + b - ac^{-1}d)(cx + d)^{-1} \\ &= ac^{-1} + (b - ac^{-1}d)(cx + d)^{-1} \\ &= ac^{-1} + \lambda(\overline{c})^{-1}(x + c^{-1}d)^{-1}c^{-1}. \end{aligned}$$

4 Hypergenic 函数与 Clifford Möbius 变换的复合

定理 4.1 设 $\Omega_2 = \{\alpha x \mid x \in \Omega_1\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ 是一个非零常数.

(1) 若 $f \in C^1(\Omega_2, Cl_{n+1,0}(\mathbb{R}))$, 则

$$H(f(\alpha x)) = \alpha(Hf)(\alpha x). \tag{4.1}$$

(2) 若 $f \in C^1(\Omega_2, Cl_{n+1,0}(\mathbb{R}))$ 是 Ω_2 上的 hypergenic 函数，则 $f(\alpha x)$ 是 Ω_1 上的 hypergenic 函数.

证 (1) 由导数的链式法可得 $D(f(\alpha x)) = \alpha(Df)(\alpha x)$, $Q_0(\alpha x) = \alpha x_0$. 因此

$$\begin{aligned} H(f(\alpha x)) &= D(f(\alpha x)) - \frac{n-1}{x_0}Q_0(f(\alpha x)) \\ &= \alpha\Big[(Df)(\alpha x) - \frac{n-1}{\alpha x_0}Q_0(f(\alpha x))\Big] \\ &= \alpha(Hf)(\alpha x). \end{aligned}$$

(2) 由等式 (4.1) 可知结论成立.

定理 4.2 设 $\Omega_3 = \{ax\overline{a} \mid x \in \Omega_1\}$, 其中 $a \in \Gamma_n$.

(1) 若 $f \in C^1(\Omega_3, Cl_{n+1,0}(\mathbb{R}))$, 则

$$D[\overline{a}f(ax\overline{a})] = |a|^2(\overline{a})'(Df)(ax\overline{a}), \tag{4.2}$$

$$H[\overline{a}f(ax\overline{a})] = |a|^2(\overline{a})'(Hf)(ax\overline{a}). \tag{4.3}$$

(2) 若 $f \in C^1(\Omega_3, Cl_{n+1,0}(\mathbb{R}))$ 是 Ω_3 上的 hypergenic 函数，则 $\overline{a}f(ax\overline{a})$ 是 Ω_1 上的 hypergenic 函数.

证 (1) 不失一般性，设 $a = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$. 令 $a_0 = 0$. 由等式 (2.2), 易证

$$ax\overline{a} = 2(a, x)\overline{a} + |a|^2x, \tag{4.4}$$

$$e_i\overline{a}e_i = -2a_ie_i - \overline{a}. \tag{4.5}$$

由导数的链式法则，以及 (4.4)–(4.5), 可得

$$\begin{aligned}
D[\overline{a}f(ax\overline{a})] &= \sum_{j=0}^{n} e_j\overline{a}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(ax\overline{a})(-2a_ja_i + |a|^2\delta_{ji})\\
&= -\sum_{j=0}^{n} e_j\overline{a}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(ax\overline{a})2a_ja_i + \sum_{i=0}^{n} e_i\overline{a}e_i|a|^2e_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(ax\overline{a})\\
&= \sum_{i=0}^{n} 2a_ie_i|a|^2e_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(ax\overline{a}) + \sum_{i=0}^{n}(-2a_ie_i - \overline{a})|a|^2e_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(ax\overline{a})\\
&= |a|^2(\overline{a})'(Df)(ax\overline{a}).
\end{aligned}$$

再由引理 2.2, 可得

$$\begin{aligned}
Q_0[\overline{a}f(ax\overline{a})] &= (\overline{a})'Q_0(f(ax\overline{a})),\\
Q_0(ax\overline{a}) &= |a|^2x_0.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
H[\overline{a}f(ax\overline{a})] &= |a|^2(\overline{a})'\Big[(Df)(ax\overline{a}) - \frac{n-1}{x_0|a|^2}Q_0(f(ax\overline{a}))\Big]\\
&= |a|^2(\overline{a})'(Hf)(ax\overline{a}).
\end{aligned}$$

(2) 由等式 (4.3) 可知结论成立.

定理 4.3 设 $\Omega_4 = \{x^{-1} \mid x \in \Omega_1\}$.

(1) 若 $f \in C^1(\Omega_4, Cl_{n+1,0}(\mathbb{R}))$, 则

$$D[x^{-1}f(x^{-1})] = \frac{(n-1)f(x^{-1})}{|x|^2} - \frac{x}{|x|^4}(Df)(x^{-1}), \tag{4.6}$$

$$H[x^{-1}f(x^{-1})] = -\frac{x}{|x|^4}(Hf)(x^{-1}). \tag{4.7}$$

(2) 若 $f \in C^1(\Omega_4, Cl_{n+1,0}(\mathbb{R}))$ 是 Ω_4 上的 hypergenic 函数，则 $x^{-1}f(x^{-1})$ 是 Ω_1 上的 hypergenic 函数.

证　由引理 2.3, 导数的链式法则和 $xe_jx = 2(x,e_j)x - |x|^2e_j\ (j = 0,1,\cdots,n)$, 可得

$$\begin{aligned}
D[x^{-1}f(x^{-1})] &= (Dx^{-1})f(x^{-1}) + \sum_{i=0}^{n} e_ix^{-1}\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^{-1})\Big(\frac{-2x_ix_j}{|x|^4} + \frac{\delta_{ij}}{|x|^2}\Big)\\
&= \frac{n-1}{|x|^2}f(x^{-1}) + \sum_{i=0}^{n} e_ix_ix^{-1}\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^{-1})\frac{-2x_j}{|x|^4} + \sum_{j=0}^{n} e_j\frac{x^{-1}}{|x|^2}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^{-1})\\
&= \frac{n-1}{|x|^2}f(x^{-1}) + \sum_{j=0}^{n}(-2x_jx + e_j|x|^2)\frac{x^{-1}}{|x|^4}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^{-1})\\
&= \frac{n-1}{|x|^2}f(x^{-1}) - \sum_{j=0}^{n} xe_jx\frac{x^{-1}}{|x|^4}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^{-1})\\
&= \frac{n-1}{|x|^2}f(x^{-1}) - \frac{x}{|x|^4}(Df)(x^{-1}).
\end{aligned}$$

再由引理 2.2, 可得

$$\begin{aligned} Q_0[x^{-1}f(x^{-1})] &= (x^{-1})'Q_0(f(x^{-1})) + (Q_0(x^{-1}))f(x^{-1}) \\ &= -\frac{x}{|x|^2}Q_0(f(x^{-1})) + \frac{x_0}{|x|^2}f(x^{-1}), \\ Q_0(x^{-1}) &= \frac{x_0}{|x|^2}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &H[x^{-1}f(x^{-1})] \\ =& \frac{n-1}{|x|^2}f(x^{-1}) - \frac{x}{|x|^4}(Df)(x^{-1}) - \frac{n-1}{x_0}\Big[-\frac{x}{|x|^2}Q_0(f(x^{-1})) + \frac{x_0}{|x|^2}f(x^{-1})\Big] \\ =& -\frac{x}{|x|^4}(Hf)(x^{-1}). \end{aligned}$$

(2) 由 (4.7) 可知结论成立.

定理 4.4 若 $g(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1}$, 其中 $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL(\Gamma_n)$, $-c^{-1}d \notin \Omega_1$, $f \in C^1(g(\Omega_1), Cl_{n+1,0}(\mathbb{R}))$ 是 $g(\Omega_1)$ 的 hypergenic 函数, 则 $F(x) = (cx+d)^{-1}f(g(x))$ 是 Ω_1 上的 hypergenic 函数.

证 (1) 若 $c = 0$, 由定理 3.3 得 $g(x) = \frac{1}{\lambda}ax\overline{a} + bd^{-1}$. 令 $g_1(x) = ax\overline{a}$, $g_2(x) = \frac{1}{\lambda}x$, $g_3(x) = x + bd^{-1}$, 则 $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1$.

因为 f 是 $g(\Omega_1)$ 的 hypergenic 函数且 $H(f(x+\beta)) = (Hf)(x+\beta)$, 其中 $\beta \in \Gamma_n \cup \{0\}$ 是常数, 所以 $f \circ g_3$ 是 $g_2(g_1(\Omega_1))$ 上的 hypergenic 函数. 由定理 4.1 知 $f \circ g_3 \circ g_2$ 是 $g_1(\Omega_1)$ 上的 hypergenic 函数. 由定理 4.2 知 $\overline{a}f \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1$ 是 Ω_1 上的 hypergenic 函数. 又因为 $\lambda = a\overline{d} = d\overline{a} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 所以 $d^{-1} = \frac{\overline{a}}{\lambda}$, 故 $\lambda d^{-1} f \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1$ 是 Ω_1 上的 hypergenic 函数. 因此 $F(x) = d^{-1}f(g(x))$ 是 Ω_1 上的 hypergenic 函数.

(2) 若 $c \neq 0$, 由定理 3.3 可得 $g(x) = ac^{-1} + \lambda(\overline{c})^{-1}(x + c^{-1}d)^{-1}c^{-1}$. 令 $g_1(x) = x + c^{-1}d$, $g_2(x) = x^{-1}$, $g_3(x) = (\overline{c})^{-1}xc^{-1}$, $g_4(x) = \lambda x$, $g_5(x) = x + ac^{-1}$, 则 $g = g_5 \circ g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1$.

因为 f 是 $g(\Omega_1)$ 上的 hypergenic 函数, 所以 $f \circ g_5$ 是 $g_4(g_3(g_2(g_1(\Omega_1))))$ 上的 hypergenic 函数. 由定理 4.1 知, $f \circ g_5 \circ g_4$ 是 $g_3(g_2(g_1(\Omega_1)))$ 上的 hypergenic 函数. 由定理 4.2 知 $c^{-1}f \circ g_5 \circ g_4 \circ g_3$ 是 $g_2(g_1(\Omega_1))$ 上的 hypergenic 函数. 由定理 4.3 知 $x^{-1}c^{-1}f \circ g_5 \circ g_4 \circ g_3 \circ g_2$ 是 $g_1(\Omega_1)$ 上的 hypergenic 函数. 因此 $(x + c^{-1}d)^{-1}c^{-1}f \circ g_5 \circ g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1$ 是 Ω_1 上的 hypergenic 函数, 即 $F(x) = (cx+d)^{-1}f(g(x))$ 是 Ω_1 上的 hypergenic 函数.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵建议.

参 考 文 献

[1] Clifford W K. Applications of Grassman's extensive algebra [J]. *Amer J Math*, 1878, 1(4):350–358.

[2] Dirac P A M. The quantum theory of the electron [J]. *Proc Roy Soc A*, 1928, 117(778):610–624.

[3] Brackx F, Delanghe R, Sommen F. Clifford analysis [M]. Boston: Pitman Books Limits, 1982.

[4] Gilbert G, Murray M A. Clifford algebra and Dirac operators in harmonic analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[5] Ryan J. Intrinsic Dirac operators in C^n [J]. *Advances in Mathematics*, 1996, 118(1):99–133.

[6] Eriksson S L, Leutwiler H. Hypermonogenic functions and Möbius transformations [J]. *Advances in Applied Clifford algebras*, 2001, 11(2):67–76.

[7] Eriksson S L, Orelma H. Hyperbolic function theory in the Clifford algebra $Cl_{n+1,0}$ [J]. *Advances in Applied Clifford Algebra*, 2009, 19(2):283–301.

[8] Eriksson S L, Orelma H. Topics on hyperbolic function theory in geometric algebra with a positive signature [J]. *Computational Methods and Function Theory*, 2010, 10(1):249–263.

[9] Huang S, Qiao Y Y, Wen G C. Real and complex Clifford analysis [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

[10] Qiao Y Y, Bernstein S, Eriksson S L, Ryan J. Function theory for Laplace and Dirac-Hodge operators in hyperbolic space [J]. *Journal D'analyse Mathematique*, 2006, 98(1):43–64.

[11] Xie Y H, Yang H J, Qiao Y Y. Complex k-hypermonogenic functions in complex Clifford analysis [J]. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2013, 58(10):1467–1479.

[12] Xie Y H. Boundary properties of hypergenic-Cauchy type integrals in real Clifford analysis [J]. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2014, 59(5):599–615.

[13] 谢永红. Clifford 分析中对偶的 k-hypergenic 函数 [J]. 数学年刊, 2014, 35A(2):235–246.

[14] 谢永红，杨贺菊. 复 Clifford 分析中的复 k-hypergenic 函数 [J]. 数学年刊, 2013, 34A(2):211–222.

[15] Ahlfors L V. Möbius transformations and Clifford numbers, differential geometry and complex analysis [M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1985, 65–73.

[16] Ahlfors L V. Möbius transformations in expressed through 2×2 matrices of Clifford numbers [J]. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 1986, 5(2–4):215–224.

[17] Waterman P L. Möbius transformations in several dimensions [J]. *Advances in Mathematics*, 1993, 101(1): 87–113.

[18] Hertrich-Jeromin U. Introduction to Möbius differential geometry [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

Clifford Möbius Transformations and Hypergenic Functions

XIE Yonghong[1] ZHANG Xiaofei[2] WANG Lili[3]

[1]College of Mathematics and Information Science, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, China. E-mail: xyh1973@126.com
[2]College of Mathematics and Information Science, Pingdingshan University, Pingdingshan 467000, Henan, China. E-mail: zhxfei2013@163.com
[3]Institute of Applied Mathematics, Shijiazhuang Mechanical Engineering College, Shijiazhuang 050003, China. E-mail: wang.lyly@foxmail.com

Abstract First, some theorems related to Clifford Möbius transformations in the real Clifford algebra space $Cl_{n+1,0}(\mathbb{R})$ are given. Then, it is proved that the compositions of hypergenic functions with Clifford Möbius transformations lead to hypergenic functions with weight.

Keywords Hypergenic function, Möbius transformation, Real Clifford analysis
2000 MR Subject Classification 30B30, 31B10

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 36 No. 1, 2015
by ALLERTON PRESS, INC., USA