数 学 年 刊 A 辑
2021, 42(3):237–258
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2021.0019

一类 4 × 4 无界算子矩阵的本征向量组的块状基性质及其在弹性力学中的应用*

乔艳芬[1] 侯国林[2] 阿拉坦仓[3]

提要 本文讨论了力学中出现的一类 4 × 4 无界 Hamilton 算子矩阵的本征向量组的块状 Schauder 基性质. 在一定的条件下，考虑了此类 Hamilton 算子矩阵的本征值问题，进而给出了其本征向量组是某个 Hilbert 空间的一组块状 Schauder 基的一个充要条件，并通过矩形薄板的自由振动和弯曲问题验证了所得结果的有效性.

关键词 本征向量组， Hamilton 算子，本征值问题，块状 Schauder 基，矩形薄板
MR (2000) 主题分类 47A75, 47A70
中图法分类 O175.3
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2021)03-0237-22

1 引 言

非自伴算子本征向量组的完备性和基性质在非自伴算子谱分析的发展中扮演着至关重要的角色. 上个世纪初期， Birkhoff[1−3] 首先开展了关于非自伴微分算子本征函数展开的相关工作. 随后， Keldyš[4−5] 在非自伴算子族的本征向量和相关向量的完备性方面做出了重要的贡献. 在那之后，许多文献报道了非自伴算子本征向量的完备性和基性质 (见 [6–11]). 在 Gohberg[12] 等人和 Tretter[13] 撰写的专著中对非自伴算子的这些结果和其他结果做了详细的论述.

无界 Hamilton 算子作为一类特殊的非自伴算子，已经被广泛地应用于物理、工程技术、应用力学以及最优控制等许多实际领域. 近年来，Hamilton 算子谱性质的研究吸引了学者们的注意力. 许多学者从不同的角度对非负 Hamilton 算子进行了研究，并重点关注了非负 Hamilton 算子在最优控制和无穷维线性系统等领域中的应用. 例如，Kurina[14] 导出了非负 Hamilton 算子有有界逆的充分条件. Langer[15] 等人证明了无穷维代数 Riccati 方程的有界解和无界解的存在性. Azizov[16] 等人得到了定义域包含极大一致正子空间

本文 2020 年 3 月 23 日收到， 2021 年 3 月 5 日收到修改稿.
[1]内蒙古大学数学科学学院，呼和浩特 010021. E-mail: yanfenqiao@mail.imu.edu.cn
[2]通信作者. 内蒙古大学数学科学学院，呼和浩特 010021. E-mail: smshgl@imu.edu.cn
[3]内蒙古师范大学数学科学学院，呼和浩特 010022. E-mail: alatanca@imu.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11861048, No. 11761029), 高等学校青年科技英才计划项目 (No. NJYT-15-B03)， 内蒙古自治区自然科学基金 (No. 2021MS01004) 和内蒙古自治区研究生科研创新计划 (No. 11200-12110201) 的资助.

的非负 Hamilton 算子的有界性. Wyss[17] 研究了线性算子的代数 Riccati 方程，并建立了相应的 Hamilton 算子矩阵的不变图子空间，进而得到了所有有界解的存在性和表达式. Tretter[18] 等人证明了算子 Riccati 方程的非负解和非正解的存在性，并给出了解的有界性和唯一性的条件. 这些显著的成果对进一步研究代数 Riccati 方程的解以及非负 Hamilton 算子的谱性质具有重要的意义.

钟万勰 [19] 为理性求解应用力学问题，将 Hamilton 算子与力学方程相结合，提出了基于 Hamilton 系统的分离变量方法，建立了弹性力学求解新体系. 之后，应用力学中大量的非自伴问题得到了解决 [20–26]. 新体系方法的数学基础是 Hamilton 算子的谱理论. 一些学者在研究 Hamilton 算子的谱结构的过程中，发现很多 Hamilton 算子的本征值均匀分布在实轴或虚轴上，并且正负成对出现 [27–28]. 基于谱的对称性和 Hamilton 算子的本征向量组的共轭辛正交性，文 [29–32] 中证明了一些 Hamilton 算子的本征向量组在 Cauchy 主值意义下的完备性. 然而，并非所有的 Hamilton 算子的本征值都是实数或纯虚数，对于具有一般本征值的 Hamilton 算子的本征向量组的完备性还有很多工作有待进行.

本文讨论了力学中出现的一类 4×4 无界 Hamilton 算子矩阵的本征向量组的块状基性质 (下面用字母 H 表示 Hamilton 算子矩阵). 首先，我们导出了 H 的本征值的表达式，并且验证了 H 的本征值的对称性. 其次，我们分析了 H 的本征值的代数指标，得到了本征值的代数指标是 1 或 2 的一些条件. 然后，我们给出了 H 的本征向量组的块状基性质的描述，证明了 H 的广义本征向量组构成 Hilbert 空间 $X\times X\times X\times X$ 中的一组块状 Schauder 基当且仅当 H 的基本本征向量组的第一分量是 Hilbert 空间 X 中的一组 Schauder 基. 应该注意的是，在讨论 H 的本征向量组的块状基性质之前，需要先给出 H 的本征值的分类，这是由于 H 的本征向量组之间的辛正交关系与 H 的本征值的分布密切相关. 最后，我们将所得结果应用于矩形薄板的自由振动和弯曲问题.

2 预备知识

在本文中， X 表示 Hilbert 空间. $\mathbb{R}$ 、 $\mathrm{i}\mathbb{R}$ 、 $\mathbb{C}$ 和 Λ 分别表示实数集、纯虚数集、复数集和可数指标集，其中 $\Lambda=\{1,2,\cdots\}$. 对于线性算子 L,$\mathcal{D}(L)$,$\mathcal{N}(L)$ 和 $\sigma_p(L)$ 分别表示 L 的定义域、零空间和点谱. 符号 $(\cdot,\cdot)$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle=(\cdot,J\cdot)$ 分别表示相应 Hilbert 空间中的内积和辛内积，其中

$$J=\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

是单位辛算子矩阵， I 是单位算子矩阵.

下面先叙述一些定义和引理.

定义 2.1 (见 [29]) 设

$$\widetilde{H}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}: \mathcal{D}(\widetilde{H})\subset X\times X\to X\times X \tag{2.1}$$

是稠定闭线性算子, 若 A 为稠定闭线性算子, B 和 C 均为自伴算子, 则称 $\widetilde{H}$ 是 Hamilton 算子.

定义 2.2 (见 [29]) 设 L 是 X 上的线性算子, λ 是 L 的本征值, 如果存在非零向量 $\psi_0\in\mathcal{D}(L)$, 使得 $L\psi_0=\lambda\psi_0$, 则称 ψ_0 是 L 的对应于 λ 的基本本征向量. 如果存在向量 $\psi_1\in\mathcal{D}(L)$, 使得

$$L\psi_1=\lambda\psi_1+\psi_0,\quad \psi_1\neq 0,$$

则称 ψ_1 是 L 的对应于 ψ_0 的一阶约当型本征向量. 一般地, 如果已经定义 L 的 $k-1$ 阶约当型本征向量 ψ_{k-1}, 那么 L 的 k 阶约当型本征向量 ψ_k 由下式给出:

$$L\psi_k=\lambda\psi_k+\psi_{k-1},\quad \psi_k\neq 0.$$

L 的基本本征向量和约当型本征向量统称为 L 的广义本征向量.

定义 2.3 (见 [31]) 对于 $\lambda\in\mathbb{C}$, 使得

$$\mathcal{N}(L-\lambda)^k=\mathcal{N}(L-\lambda)^{k+1}$$

成立的最小非负整数 k 称为 λ 的代数指标, 式中

$$\mathcal{N}(L-\lambda)^k=\{x\in\mathcal{D}(L^k)\mid (L-\lambda\mathrm{I})^k x=0\}.$$

定义 2.4 (见 [10]) (1) 如果对任意的 $x\in X$, 都存在唯一的常数序列 $\{a_m\}_{m=1}^{+\infty}$, 使得

$$x=\sum_{m=1}^{+\infty}a_m u_m,$$

则称序列 $\{u_m\}_{m=1}^{+\infty}$ 是 X 中的一组 Schauder 基.

(2) 如果对任意的 $y\in X$, 都存在常数序列 $\{c_{\pm m}\}_{m=0}^{+\infty}$ 和单调递增的整数序列 $0=p_0<p_1<\cdots$, 使得

$$y=\sum_{m=0}^{+\infty}\Big[\sum_{k=p_m}^{p_{m+1}-1}(c_k v_k+c_{-k}v_{-k})\Big],$$

则称序列 $\{v_{\pm m}\}_{m=0}^{+\infty}$ 是 X 中的一组块状 Schauder 基 (或带括号的 Schauder 基).

引理 2.1 (见 [32]) 设 λ 和 μ 为 (2.1) 定义的 Hamilton 算子 $\widetilde{H}$ 的本征值, 对应于两个本征值的基本本征向量分别为 $u_0=(x_0,\ y_0)^{\mathrm{T}}$ 和 $v_0=(p_0,\ q_0)^{\mathrm{T}}$, 并设 $u_1=(x_1,\ y_1)^{\mathrm{T}}$ 和 $v_1=(p_1,\ q_1)^{\mathrm{T}}$ 分别为 $\widetilde{H}$ 关于 $(\lambda,\ u_0)$ 和 $(\mu,\ v_0)$ 的一阶约当型本征向量. 若 $\lambda+\overline{\mu}\neq 0$, 则下列辛正交关系成立:

$$\langle u_0,v_0\rangle=(u_0,Jv_0)=0;\quad \langle u_0,v_1\rangle=(u_0,Jv_1)=0;$$

$$\langle u_1, v_0\rangle = (u_1, Jv_0) = 0; \quad \langle u_1, v_1\rangle = (u_1, Jv_1) = 0.$$

3 主要结果和证明

本文考虑 $X \times X \times X \times X$(简记为 X^4) 上的 4×4 无界 Hamilton 算子矩阵：

$$H = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 & B_2 \\ A_2 & 0 & B_2^* & 0 \\ C_1 & C_2 & 0 & -A_2^* \\ C_2^* & C_4 & -A_1^* & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

其中 A_j $(j = 1,\ 2)$ 是有界线性算子， C_1 是自伴算子， C_4 是正定算子. 下面我们始终假定 H 满足如下假设：

(a) H 有至多可数个简单的本征值且 $0 \notin \sigma_p(H)$;

(b) B_2 是可逆算子； $B_2^{-1}A_1$ 和 $(B_2^*)^{-1}A_2$ 均是自伴算子.

假设 (a) 意味着 H 的每个本征值的几何重数为 1. 由假设 (b), 有

$$A_1^*(B_2^*)^{-1} = B_2^{-1}A_1, \quad A_2^*B_2^{-1} = (B_2^*)^{-1}A_2. \tag{3.2}$$

3.1 H 的本征值和本征向量

基于上述假设，我们可以表示出 H 的本征值和本征向量.

引理 3.1 设 λ 是 (3.1) 定义的 H 的本征值， $(f^0,\ g^0,\ p^0,\ q^0)^{\mathrm T}$ 是 H 的对应于 λ 的基本本征向量，则

$$\begin{aligned} g^0 &= \lambda^2 C_4^{-1}B_2^{-1}f^0 - C_4^{-1}[C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f^0, \\ p^0 &= \lambda^3 (B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f^0 - \lambda(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}[C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f^0 - (B_2^*)^{-1}A_2f^0, \\ q^0 &= \lambda B_2^{-1}f^0 - \lambda^2 B_2^{-1}A_1C_4^{-1}B_2^{-1}f^0 + B_2^{-1}A_1C_4^{-1}[C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f^0, \end{aligned}$$

并且

$$\lambda^2 = \frac{\gamma}{2\varepsilon} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2\varepsilon}, \tag{3.3}$$

式中

$$\begin{aligned} \gamma &= ((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}[C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f^0, f^0) + ((C_2 + A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}B_2^{-1}f^0, f^0) \in \mathbb{R}, \\ \varepsilon &= ((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f^0, f^0) > 0, \\ \Delta &= [((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}[C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f^0, f^0) + ((C_2 + A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}B_2^{-1}f^0, f^0)]^2 \\ &\quad + 4((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f^0, f^0)[-(C_4^{-1}[C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f^0, [C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f^0) \\ &\quad + (C_1f^0, f^0)] \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

这里 f^0 是下列方程的非零解：

$$\lambda^4(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f^0-\lambda^2(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f^0-\lambda^2(C_2+A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}B_2^{-1}f^0$$
$$-C_1f^0+(C_2+A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f^0=0.$$

接下来，我们给出方程 (3.3) 在不同情况下的根的具体表达式.

命题 3.1　情况 I 当 $\Delta>0$ 时， (3.3) 的根可以表示为

$$\lambda_1=\sqrt{\frac{\gamma}{2\varepsilon}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\varepsilon}},\quad \lambda_2=-\sqrt{\frac{\gamma}{2\varepsilon}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\varepsilon}},\quad \lambda_3=\sqrt{\frac{\gamma}{2\varepsilon}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\varepsilon}},\quad \lambda_4=-\sqrt{\frac{\gamma}{2\varepsilon}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\varepsilon}}.$$

情况 II 当 $\Delta<0$ 时，将 (3.3) 改写成如下形式：

$$\lambda^2=\frac{\gamma}{2\varepsilon}\pm\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2\varepsilon}\quad (\mathrm{i}\ 为虚数单位).$$

(i) 当 $\Delta<0$ 且 $\gamma>0$ 时，有

$$\lambda_1=\varphi+\mathrm{i}\psi,\quad \lambda_2=-\varphi-\mathrm{i}\psi,\quad \lambda_3=\varphi-\mathrm{i}\psi,\quad \lambda_4=-\varphi+\mathrm{i}\psi,$$

其中

$$\varphi=\sqrt[4]{\Big(\frac{\gamma}{2\varepsilon}\Big)^2+\Big(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\varepsilon}\Big)^2}\cos\Big(\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{-\Delta}}{\gamma}\Big),$$
$$\psi=\sqrt[4]{\Big(\frac{\gamma}{2\varepsilon}\Big)^2+\Big(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\varepsilon}\Big)^2}\sin\Big(\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{-\Delta}}{\gamma}\Big).$$

(ii) 当 $\Delta<0$ 且 $\gamma<0$ 时，有

$$\lambda_1=-\psi+\mathrm{i}\varphi,\quad \lambda_2=\psi-\mathrm{i}\varphi,\quad \lambda_3=-\psi-\mathrm{i}\varphi,\quad \lambda_4=\psi+\mathrm{i}\varphi,$$

式中 φ 和 ψ 同上.

(iii) 当 $\Delta<0$ 且 $\gamma=0$ 时，有

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varepsilon}}(1+\mathrm{i}),\quad \lambda_2=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varepsilon}}(1+\mathrm{i}),$$
$$\lambda_3=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varepsilon}}(1-\mathrm{i}),\quad \lambda_4=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varepsilon}}(1-\mathrm{i}).$$

情况 III 当 $\Delta=0$ 时， (3.3) 的根可以表示为

$$\lambda_{1,\,3}=\sqrt{\frac{\gamma}{2\varepsilon}},\quad \lambda_{2,\,4}=-\sqrt{\frac{\gamma}{2\varepsilon}}.$$

在上面的命题中， $\lambda_2=-\lambda_1$, $\lambda_4=-\lambda_3$. 通过直接计算，我们得到

$$(\lambda_1^2+\lambda_3^2)\varepsilon=\gamma$$

和

$$(\lambda_1^2-\lambda_3^2)\varepsilon=\sqrt{\Delta}.$$

由文 [33] 可知，有限维 Hamilton 算子 (即 $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ 中的 Hamilton 矩阵) 的本征值通常按 $\{\lambda,-\lambda\}$ 的形式出现，且当本征值是实部非零的复数时，甚至会按 $\{\lambda,-\lambda,\overline{\lambda},-\overline{\lambda}\}$ 的形式出现. 命题 3.1 表明无界 Hamilton 算子 H 的本征值也具有同样的性质，这在后面证明 H 的本征向量组构成 Hilbert 空间 X^4 的一组块状 Schauder 基中扮演重要的角色.

考虑到 H 有可数多个本征值，我们用符号 μ_m，μ_{-m}，ω_m 和 $\omega_{-m}(m\in\Lambda)$ 分别取代 λ_1，λ_2，λ_3 和 λ_4，这里 $\mu_{-m}=-\mu_m$，$\omega_{-m}=-\omega_m$，并用 $(f_m^0,\ g_m^0,\ p_m^0,\ q_m^0)^{\mathrm{T}}$ 取代 $(f^0,\ g^0,\ p^0,\ q^0)^{\mathrm{T}}$. 于是，有

$$\begin{aligned}&(\mu_m^2+\omega_m^2)((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_m^0)\\ =\ &((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0,f_m^0)+((C_2+A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_m^0),\end{aligned}\tag{3.4}$$

且

$$(\mu_m^2-\omega_m^2)((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_m^0)=\sqrt{\Delta_m}.$$

在下面的讨论中，我们假定 H 也满足如下假设：

(c)

$$\begin{aligned}&((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_n^0)\\ =\ &((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0,f_n^0)\\ =\ &((C_2+A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_n^0)=0,\quad n\neq m.\end{aligned}\tag{3.5}$$

引理 3.2 设 μ_m 是 H 的本征值，$(f_m^0,\ g_m^0,\ p_m^0,\ q_m^0)^{\mathrm{T}}$ 是对应于 μ_m 的基本本征向量. 如果 $\Delta_m\neq 0$ 且 $\{f_m^0\}_{m=1}^{+\infty}$ 是 X 中的一组 Schauder 基，则 μ_{-m},ω_m 和 ω_{-m} 也是 H 的本征值，向量

$$\begin{pmatrix}-f_m^0\\ -\mu_m^2C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0+C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0\\ \mu_m^3(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0-\mu_m(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0+(B_2^*)^{-1}A_2f_m^0\\ \mu_mB_2^{-1}f_m^0+\mu_m^2B_2^{-1}A_1C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0-B_2^{-1}A_1C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0\end{pmatrix},\tag{3.6}$$

$$\begin{pmatrix}f_m^0\\ \omega_m^2C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0-C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0\\ \omega_m^3(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0-\omega_m(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0-(B_2^*)^{-1}A_2f_m^0\\ \omega_mB_2^{-1}f_m^0-\omega_m^2B_2^{-1}A_1C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0+B_2^{-1}A_1C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0\end{pmatrix}\tag{3.7}$$

和

$$\begin{pmatrix}-f_m^0\\ -\omega_m^2C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0+C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0\\ \omega_m^3(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0-\omega_m(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0+(B_2^*)^{-1}A_2f_m^0\\ \omega_mB_2^{-1}f_m^0+\omega_m^2B_2^{-1}A_1C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0-B_2^{-1}A_1C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0\end{pmatrix}\tag{3.8}$$

分别是 H 的对应于 μ_{-m},ω_m 和 ω_{-m} 的基本本征向量.

证　由引理 3.1 可知， H 的对应于本征值 μ_m 的基本本征向量为：

$$\begin{pmatrix} f_m^0 \\ \mu_m^2 C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0 - C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0 \\ \mu_m^3(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0-\mu_m(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0-(B_2^*)^{-1}A_2f_m^0 \\ \mu_m B_2^{-1}f_m^0-\mu_m^2B_2^{-1}A_1C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0+B_2^{-1}A_1C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0 \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

其中 f_m^0 是下列方程的非零解：

$$\begin{aligned}&\mu_m^4(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0-\mu_m^2(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0\\&-\mu_m^2(C_2+A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0-C_1f_m^0+(C_2+A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}[C_2^*\\&+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0=0.\end{aligned}\tag{3.10}$$

假设 (a) 表明不存在与 f_m^0 线性无关且满足 (3.10) 的向量.

由 (3.4) 和 (3.5) 易知，对任意的 $n,m\in\Lambda$，都有等式

$$\begin{aligned}&(\mu_m^2+\omega_m^2)((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_n^0)\\=&((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0,f_n^0)+((C_2+A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_n^0)\end{aligned}$$

成立.

因为 $\{f_m^0\}_{m=1}^{+\infty}$ 是 X 中的一组 Schauder 基，所以

$$\begin{aligned}&(\mu_m^2+\omega_m^2)(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0\\=&(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0+(C_2+A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0.\end{aligned}\tag{3.11}$$

结合 (3.2), (3.10) 和 (3.11) 易证引理的结论，这里不再赘述.

为叙述方便，把 H 的对应于本征值 μ_m,μ_{-m},ω_m 和 ω_{-m} 的基本本征向量分别记为 x_m^0, x_{-m}^0, y_m^0 和 y_{-m}^0, 而它们的表达式分别由 (3.9), (3.6), (3.7) 和 (3.8) 给出.

引理 3.3　设 μ_m 是 H 的本征值， x_m^0 是 H 的对应于 μ_m 的基本本征向量. 如果 $\Delta_m=0$ 且 $\{f_m^0\}_{m=1}^{+\infty}$ 是 X 中的一组 Schauder 基，则 $\mu_m=\omega_m$, 且对应于 μ_m 和 x_m^0 的一阶约当型本征向量 $x_m^1=(f_m^1,\ g_m^1,\ p_m^1,\ q_m^1)^{\mathrm{T}}$ 存在，其中

$$\begin{aligned}g_m^1&=\mu_m^2C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^1+2\mu_mC_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0-C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^1,\\p_m^1&=\mu_m^3(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^1+3\mu_m^2(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0-(B_2^*)^{-1}A_2f_m^1\\&\quad-\mu_m(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^1-(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0,\\q_m^1&=\mu_mB_2^{-1}f_m^1-\mu_m^2B_2^{-1}A_1C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^1-2\mu_mB_2^{-1}A_1C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0\\&\quad+B_2^{-1}A_1C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^1+B_2^{-1}f_m^0.\end{aligned}\tag{3.12}$$

此外 $\mu_{-m}=\omega_{-m}$ 也是 H 的本征值，且对应于 μ_{-m} 和 x_{-m}^0 的一阶约当型本征向量

$x_{-m}^1 = (f_{-m}^1,\ g_{-m}^1,\ p_{-m}^1,\ q_{-m}^1)^{\mathrm{T}}$ 也存在，其中

$$\begin{aligned} f_{-m}^1 &= f_m^1, \\ g_{-m}^1 &= \mu_m^2 C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^1 + 2\mu_m C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0 - C_4^{-1}[C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1} A_2] f_m^1, \\ p_{-m}^1 &= -\mu_m^3 (B_2^*)^{-1} C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^1 - 3\mu_m^2 (B_2^*)^{-1} C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0 - (B_2^*)^{-1} A_2 f_m^1 \\ &\quad + \mu_m (B_2^*)^{-1} C_4^{-1} [C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1} A_2] f_m^1 \\ &\quad + (B_2^*)^{-1} C_4^{-1} [C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1} A_2] f_m^0, \\ q_{-m}^1 &= -\mu_m B_2^{-1} f_m^1 - \mu_m^2 B_2^{-1} A_1 C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^1 - 2\mu_m B_2^{-1} A_1 C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0 \\ &\quad + B_2^{-1} A_1 C_4^{-1} [C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1} A_2] f_m^1 - B_2^{-1} f_m^0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

3.2 H 的本征值的代数指标

为了验证前一小节得到的 H 的广义本征向量的链长已达到最大值，研究 H 的本征值的代数指标是有帮助的，我们现在对此着手进行.

定理 3.1 (1) 若 H 满足引理 3.2 的假设，则 H 的本征值的代数指标为 1.
(2) 若 H 满足引理 3.3 的假设，则 H 的本征值的代数指标为 2.

证 由于 (1) 和 (2) 的证明完全类似，下面我们只给出 (1) 的证明. 设 $\mu_m \in \sigma_p(H)$, 且 $x_m^0 = (f_m^0,\ g_m^0,\ p_m^0,\ q_m^0)^{\mathrm{T}}$ 是 H 的对应于 μ_m 的基本本征向量. 利用反证法，假设存在向量 $x_m^1 = (f_m^1,\ g_m^1,\ p_m^1,\ q_m^1)^{\mathrm{T}}$, 使得 $Hx_m^1 = \mu_m x_m^1 + x_m^0$ 成立. 展开上式，得到

$$\begin{aligned} &\mu_m^4 (B_2^*)^{-1} C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^1 - \mu_m^2 (B_2^*)^{-1} C_4^{-1} [C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1} A_2] f_m^1 - \mu_m^2 (C_2 + A_2^* B_2^{-1} A_1) \\ &\cdot C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^1 - C_1 f_m^1 + (C_2 + A_2^* B_2^{-1} A_1) C_4^{-1} [C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1} A_2] f_m^1 + 4\mu_m^3 (B_2^*)^{-1} \\ &\cdot C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0 - 2\mu_m (B_2^*)^{-1} C_4^{-1} [C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1} A_2] f_m^0 - 2\mu_m (C_2 + A_2^* B_2^{-1} A_1) C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0 \\ = {}& 0. \end{aligned}$$

上式两端同时与 f_m^0 作内积，并结合 (3.10)，得到

$$\begin{aligned} &(f_m^1, (\overline{\mu}_m^2 - \mu_m^2)[(\overline{\mu}_m^2 + \mu_m^2)(B_2^*)^{-1} C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0 - (C_2 + A_2^* B_2^{-1} A_1) C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0 \\ &- (B_2^*)^{-1} C_4^{-1} (C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1} A_2) f_m^0]) + (2\mu_m [2\mu_m^2 (B_2^*)^{-1} C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0 \\ &- (C_2 + A_2^* B_2^{-1} A_1) C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0 - (B_2^*)^{-1} C_4^{-1} (C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1} A_2) f_m^0], f_m^0) = 0. \end{aligned}$$

由命题 3.1 可知, 若 $\Delta_m > 0$, 则 $\mu_m^2 \in \mathbb{R}$, 从而 $\overline{\mu}_m^2 - \mu_m^2 = 0$; 若 $\Delta_m < 0$, 则 $\overline{\mu}_m^2 = \omega_m^2$. 考虑到 $\{f_m^0\}_{m=1}^{+\infty}$ 是 X 中的一组 Schauder 基，并结合 (3.11), 得到

$$\begin{aligned} &(f_m^1, (\overline{\mu}_m^2 - \mu_m^2)[(\overline{\mu}_m^2 + \mu_m^2)(B_2^*)^{-1} C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0 - (C_2 + A_2^* B_2^{-1} A_1) C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0 \\ &- (B_2^*)^{-1} C_4^{-1} (C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1} A_2) f_m^0]) = 0. \end{aligned}$$

再由 (3.11), 有

$$2\mu_m(\mu_m^2-\omega_m^2)((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_m^0)=0,$$

即

$$2\mu_m\sqrt{\Delta_m}=0,$$

这显然与 $\mu_m\neq 0$ 且 $\Delta_m\neq 0$ 矛盾. 因此 μ_m 的代数指标是 1. 定理得证.

注 3.1　在引理 3.3 的假设下，我们可导出 f_m^1 是下列方程的非零解:

$$\mu_m^4(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^1-\mu_m^2(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^1-\mu_m^2(C_2+A_2^*B_2^{-1}A_1)$$
$$\cdot C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^1-C_1f_m^1+(C_2+A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^1=0.$$

将上式与 (3.10) 进行比较可知，$f_m^1=\kappa_m f_m^0$ $(m\in\Lambda)$, 其中 κ_m 是依赖于 m 的数.

在下面关于块状 Schauder 性质的讨论中，我们不妨取定 $\kappa_m=-\frac{1}{2\mu_m}$. 由引理 3.3 可知，$H$ 的对应于 μ_m 和 μ_{-m} 的一阶约当型本征向量 x_m^1 和 x_{-m}^1 分别为:

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2\mu_m}f_m^0 \\ \dfrac{3\mu_m}{2}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0+\dfrac{1}{2\mu_m}C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0 \\ \dfrac{5\mu_m^2}{2}(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0-\dfrac{1}{2}(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0+\dfrac{1}{2\mu_m}(B_2^*)^{-1}A_2f_m^0 \\ \dfrac{1}{2}B_2^{-1}f_m^0-\dfrac{3\mu_m}{2}B_2^{-1}A_1C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0-\dfrac{1}{2\mu_m}B_2^{-1}A_1C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

和

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2\mu_m}f_m^0 \\ \dfrac{3\mu_m}{2}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0+\dfrac{1}{2\mu_m}C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0 \\ -\dfrac{5\mu_m^2}{2}(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0+\dfrac{1}{2}(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0+\dfrac{1}{2\mu_m}(B_2^*)^{-1}A_2f_m^0 \\ -\dfrac{1}{2}B_2^{-1}f_m^0-\dfrac{3\mu_m}{2}B_2^{-1}A_1C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0-\dfrac{1}{2\mu_m}B_2^{-1}A_1C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0 \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

3.3 *H* 的块状基性质

本节以 γ_m, $\sqrt{\Delta_m}$ 和 0 之间的关系作为分类依据讨论 H 的本征向量组的块状 Schauder 基性质.

定理 3.2　假定 H 满足假设 (a)–(c), 且当 $n\neq m$ 时, $(B_2^{-1}A_1C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,C_4^{-1}B_2^{-1}f_n^0)=0$, $((B_2^*)^{-1}A_2f_m^0,f_n^0)=0$ 且 $(B_2^{-1}A_1C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0,C_4^{-1}B_2^{-1}f_n^0)=0$, 则 H 的广义本征向量组是 Hilbert 空间 X^4 中的一组块状 Schauder 基当且仅当函数系 $\{f_m^0\}_{m=1}^{+\infty}$ 是 Hilbert 空间 X 中的一组 Schauder 基.

证　必要性是显然的. 为了证明充分性, 我们首先对 H 的本征值 $\{\mu_m,\ \omega_m,\ \mu_{-m},\ \omega_{-m}\mid m\in\Lambda\}$ 进行分类.　H 的本征值可分为如下 4 类 (共 12 种情况):

(I) 对所有的 $m\in\Lambda$, 都有 $\Delta_m>0$. 由命题 3.1, 可知

$$\mu_m=\sqrt{\frac{\gamma_m}{2\varepsilon_m}+\frac{\sqrt{\Delta_m}}{2\varepsilon_m}},\quad \mu_{-m}=-\sqrt{\frac{\gamma_m}{2\varepsilon_m}+\frac{\sqrt{\Delta_m}}{2\varepsilon_m}},$$
$$\omega_m=\sqrt{\frac{\gamma_m}{2\varepsilon_m}-\frac{\sqrt{\Delta_m}}{2\varepsilon_m}},\quad \omega_{-m}=-\sqrt{\frac{\gamma_m}{2\varepsilon_m}-\frac{\sqrt{\Delta_m}}{2\varepsilon_m}}.$$

情况 (1) 对所有的 $m\in\Lambda$, 都有 $\Delta_m>0$ 且 $\gamma_m>\sqrt{\Delta_m}$.

此时, $\mu_m\in\mathbb{R}$, $\mu_{-m}=-\mu_m\in\mathbb{R}$, $\omega_m\in\mathbb{R}$, $\omega_{-m}=-\omega_m\in\mathbb{R}$. 于是, 对任意的 $m,\ n\in\Lambda$, 有

$$\mu_m+\overline{\mu}_n\begin{cases}\neq 0, & n\neq -m,\\ =0, & n=-m,\end{cases}\qquad \omega_m+\overline{\omega}_n\begin{cases}\neq 0, & n\neq -m,\\ =0, & n=-m,\end{cases}\qquad \mu_m+\overline{\omega}_n\neq 0.$$

情况 (2) 对所有的 $m\in\Lambda$, 都有 $\Delta_m>0$ 且 $-\sqrt{\Delta_m}<\gamma_m<\sqrt{\Delta_m}$.

此时, $\mu_m\in\mathbb{R}$, $\mu_{-m}=-\mu_m\in\mathbb{R}$, $\omega_m\in\mathrm{i}\mathbb{R}$, $\omega_{-m}=-\omega_m\in\mathrm{i}\mathbb{R}$. 于是, 对任意的 $m,\ n\in\Lambda$, 有

$$\mu_m+\overline{\mu}_n\begin{cases}\neq 0, & n\neq -m,\\ =0, & n=-m,\end{cases}\qquad \omega_m+\overline{\omega}_n\begin{cases}\neq 0, & n\neq m,\\ =0, & n=m,\end{cases}\qquad \mu_m+\overline{\omega}_n\neq 0.$$

情况 (3) 对所有的 $m\in\Lambda$, 都有 $\Delta_m>0$ 且 $\gamma_m<-\sqrt{\Delta_m}$.

此时, $\mu_m\in\mathrm{i}\mathbb{R}$, $\mu_{-m}=-\mu_m\in\mathrm{i}\mathbb{R}$, $\omega_m\in\mathrm{i}\mathbb{R}$, $\omega_{-m}=-\omega_m\in\mathrm{i}\mathbb{R}$. 于是, 对任意的 $m,\ n\in\Lambda$, 有

$$\mu_m+\overline{\mu}_n\begin{cases}\neq 0, & n\neq m,\\ =0, & n=m,\end{cases}\qquad \omega_m+\overline{\omega}_n\begin{cases}\neq 0, & n\neq m,\\ =0, & n=m,\end{cases}\qquad \mu_m+\overline{\omega}_n\neq 0.$$

情况 (4) 令 $\Lambda=\Lambda_1\cup\Lambda_2\cup\Lambda_3$, 其中 $\Lambda_1=\{m\in\Lambda\mid\Delta_m>0,\ \gamma_m>\sqrt{\Delta_m}\}$, $\Lambda_2=\{m\in\Lambda\mid\Delta_m>0,\ -\sqrt{\Delta_m}<\gamma_m<\sqrt{\Delta_m}\}$ 和 $\Lambda_3=\{m\in\Lambda\mid\Delta_m>0,\ \gamma_m<-\sqrt{\Delta_m}\}$ 中至少有两个集合非空.

(II) 对所有的 $m\in\Lambda$, 都有 $\Delta_m<0$.

情况 (5) 对所有的 $m\in\Lambda$, 都有 $\Delta_m<0$ 且 $\gamma_m>0$.

由命题 3.1, 可知

$$\mu_m=\varphi_m+\mathrm{i}\psi_m,\quad \mu_{-m}=-\varphi_m-\mathrm{i}\psi_m,\quad \omega_m=\varphi_m-\mathrm{i}\psi_m,\quad \omega_{-m}=-\varphi_m+\mathrm{i}\psi_m,$$

其中

$$\varphi_m=\sqrt[4]{\Big(\frac{\gamma_m}{2\varepsilon_m}\Big)^2+\Big(\frac{\sqrt{-\Delta_m}}{2\varepsilon_m}\Big)^2}\cos\Big(\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{-\Delta_m}}{\gamma_m}\Big),$$
$$\psi_m=\sqrt[4]{\Big(\frac{\gamma_m}{2\varepsilon_m}\Big)^2+\Big(\frac{\sqrt{-\Delta_m}}{2\varepsilon_m}\Big)^2}\sin\Big(\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{-\Delta_m}}{\gamma_m}\Big).$$

于是, 对任意的 $m,\ n\in\Lambda$, 有

$$\mu_m+\overline{\mu}_n\neq 0,\quad \omega_m+\overline{\omega}_n\neq 0,\quad \mu_m+\overline{\omega}_n\begin{cases}\neq 0, & n\neq -m,\\ =0, & n=-m,\end{cases}\qquad \omega_m+\overline{\mu}_n\begin{cases}\neq 0, & n\neq -m,\\ =0, & n=-m.\end{cases}$$

情况 (6) 对所有的 $m\in\Lambda$, 都有 $\Delta_m<0$ 且 $\gamma_m<0$.

由命题 3.1, 可知

$$\mu_m=-\psi_m+\mathrm{i}\varphi_m,\quad \mu_{-m}=\psi_m-\mathrm{i}\varphi_m,\quad \omega_m=-\psi_m-\mathrm{i}\varphi_m,\quad \omega_{-m}=\psi_m+\mathrm{i}\varphi_m,$$

这里 ψ_m 和 φ_m 同上. 于是, 对任意的 $m,\ n\in\Lambda$, 有

$$\mu_m+\overline{\mu}_n\neq 0,\quad \omega_m+\overline{\omega}_n\neq 0,\quad \mu_m+\overline{\omega}_n\begin{cases}\neq 0, & n\neq -m,\\ =0, & n=-m,\end{cases}\quad \omega_m+\overline{\mu}_n\begin{cases}\neq 0, & n\neq -m,\\ =0, & n=-m.\end{cases}$$

情况 (7) 对所有的 $m\in\Lambda$, 都有 $\Delta_m<0$ 且 $\gamma_m=0$.

由命题 3.1, 可知

$$\mu_m=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{-\Delta_m}}{\varepsilon_m}}(1+\mathrm{i}),\quad \mu_{-m}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{-\Delta_m}}{\varepsilon_m}}(1+\mathrm{i}),$$

$$\omega_m=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{-\Delta_m}}{\varepsilon_m}}(1-\mathrm{i}),\quad \omega_{-m}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{-\Delta_m}}{\varepsilon_m}}(1-\mathrm{i}).$$

于是, 对任意的 $m,\ n\in\Lambda$, 有

$$\mu_m+\overline{\mu}_n\neq 0,\quad \omega_m+\overline{\omega}_n\neq 0,\quad \mu_m+\overline{\omega}_n\begin{cases}\neq 0, & n\neq -m,\\ =0, & n=-m,\end{cases}\quad \omega_m+\overline{\mu}_n\begin{cases}\neq 0, & n\neq -m,\\ =0, & n=-m.\end{cases}$$

情况 (8) 令 $\Lambda=\Lambda_4\cup\Lambda_5\cup\Lambda_6$, 其中 $\Lambda_4=\{m\in\Lambda\mid\Delta_m<0,\ \gamma_m>0\}$, $\Lambda_5=\{m\in\Lambda\mid\Delta_m<0,\ \gamma_m<0\}$ 和 $\Lambda_6=\{m\in\Lambda\mid\Delta_m<0,\ \gamma_m=0\}$ 中至少有两个集合非空.

(III) 对所有的 $m\in\Lambda$, 都有 $\Delta_m=0$. 由命题 3.1, 可知

$$\mu_m=\omega_m=\sqrt{\frac{\gamma_m}{2\varepsilon_m}},\quad \mu_{-m}=\omega_{-m}=-\sqrt{\frac{\gamma_m}{2\varepsilon_m}}.$$

情况 (9) 对所有的 $m\in\Lambda$, 都有 $\Delta_m=0$ 且 $\gamma_m>0$.

此时, $\mu_m=\omega_m\in\mathbb{R}$, $\mu_{-m}=\omega_{-m}\in\mathbb{R}$. 于是, 对任意的 $m,\ n\in\Lambda$, 有

$$\mu_m+\overline{\mu}_n\begin{cases}\neq 0, & n\neq -m,\\ =0, & n=-m.\end{cases}$$

情况 (10) 对所有的 $m\in\Lambda$, 都有 $\Delta_m=0$ 且 $\gamma_m<0$.

此时, $\mu_m=\omega_m\in\mathrm{i}\mathbb{R}$, $\mu_{-m}=\omega_{-m}\in\mathrm{i}\mathbb{R}$. 于是, 对任意的 $m,\ n\in\Lambda$, 有

$$\mu_m+\overline{\mu}_n\begin{cases}\neq 0, & n\neq m,\\ =0, & n=m.\end{cases}$$

情况 (11) 令 $\Lambda=\Lambda_7\cup\Lambda_8$, 其中 $\Lambda_7=\{m\in\Lambda\mid\Delta_m=0,\gamma_m>0\}\neq\varnothing$ 且 $\Lambda_8=\{m\in\Lambda\mid\Delta_m=0,\ \gamma_m<0\}\neq\varnothing$.

(IV) 情况 (12) 令 $\Lambda=\Lambda_a\cup\Lambda_b\cup\Lambda_c$, 且 Λ_a, Λ_b 和 Λ_c 中至少有两个集合非空, 这里 $\Lambda_a=\Lambda_1\cup\Lambda_2\cup\Lambda_3$, 且 Λ_1, Λ_2 和 Λ_3 中至少有一个集合非空; $\Lambda_b=\Lambda_4\cup\Lambda_5\cup\Lambda_6$, 且 Λ_4, Λ_5 和 Λ_6 中至少有一个集合非空; $\Lambda_c=\Lambda_7\cup\Lambda_8$, 且 Λ_7 和 Λ_8 中至少有一个集合非空.

下面我们证明情况 (1) 和情况 (9) 的充分性, 其余情况的证明完全类似.

先证明情况 (1). 在该情况下, 对所有的 $m\in\Lambda$, 都有 $\Delta_m>0$ 且 $\gamma_m>\sqrt{\Delta_m}$.

由引理 3.3 前面一段的表述可知, H 的对应于本征值 μ_m, μ_{-m}, ω_m 和 ω_{-m} 的基本本征向量 x_m^0, x_{-m}^0, y_m^0 和 y_{-m}^0 分别由 (3.9), (3.6), (3.7) 和 (3.8) 给出. 根据引理 2.1, 以

及等式 (3.2), (3.4) 和 (3.5) 可知， H 的本征向量组满足下列共轭辛正交关系：

$$\langle x_m^0, y_n^0\rangle = (x_m^0, Jy_n^0) = 0, \quad m, n \in \Lambda;$$

$$\langle x_m^0, x_n^0\rangle = (x_m^0, Jx_n^0) = \begin{cases} 0, & n \neq -m, \\ 2\mu_m(\mu_m^2-\omega_m^2)((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0, f_m^0), & n=-m; \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\langle y_m^0, y_n^0\rangle = (y_m^0, Jy_n^0) = \begin{cases} 0, & n \neq -m, \\ -2\omega_m(\mu_m^2-\omega_m^2)((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0, f_m^0), & n=-m. \end{cases}$$

接下来只需证明对于任意的 $F=(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4)^{\mathrm{T}} \in X^4$，存在常数序列 $\{c_{\pm m}^0\}_{m=1}^{+\infty}$ 和 $\{d_{\pm m}^0\}_{m=1}^{+\infty}$, 使得

$$F = \sum_{m=1}^{+\infty}(c_m^0 x_m^0 + d_m^0 y_m^0 + c_{-m}^0 x_{-m}^0 + d_{-m}^0 y_{-m}^0). \tag{3.17}$$

根据 (3.16), 取

$$\begin{aligned} c_m^0 &= \frac{\langle F, x_{-m}^0\rangle}{\langle x_m^0, x_{-m}^0\rangle} = \frac{(F, Jx_{-m}^0)}{2\mu_m(\mu_m^2-\omega_m^2)((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0, f_m^0)}, \\ d_m^0 &= \frac{\langle F, y_{-m}^0\rangle}{\langle y_m^0, y_{-m}^0\rangle} = -\frac{(F, Jy_{-m}^0)}{2\omega_m(\mu_m^2-\omega_m^2)((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0, f_m^0)}, \\ c_{-m}^0 &= \frac{\langle F, x_m^0\rangle}{\langle x_{-m}^0, x_m^0\rangle} = -\frac{(F, Jx_m^0)}{2\mu_m(\mu_m^2-\omega_m^2)((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0, f_m^0)}, \\ d_{-m}^0 &= \frac{\langle F, y_m^0\rangle}{\langle y_{-m}^0, y_m^0\rangle} = \frac{(F, Jy_m^0)}{2\omega_m(\mu_m^2-\omega_m^2)((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0, f_m^0)}. \end{aligned}$$

结合上面 4 个等式， (3.6)–(3.9) 和 (3.11), 得到

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{+\infty}(c_m^0 x_m^0 + d_m^0 y_m^0 + c_{-m}^0 x_{-m}^0 + d_{-m}^0 y_{-m}^0) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty}\begin{pmatrix} \dfrac{(f_1, (B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)f_m^0}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0, f_m^0)} \\ \dfrac{(f_2, B_2^{-1}f_m^0)C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0, f_m^0)} + \rho_m \\ \dfrac{(f_3, f_m^0)(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0, f_m^0)} + \varsigma_m \\ \dfrac{(f_4, C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)B_2^{-1}f_m^0}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0, f_m^0)} + \phi_m \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

其中

$$\begin{aligned} \rho_m = {}& \frac{1}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0, f_m^0)}[(f_1, (C_2+A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0 \\ & -(f_1, (B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)C_4^{-1}(C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2)f_m^0], \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} \varsigma_m = {}& \frac{1}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0, f_m^0)}[(f_1, (B_2^*)^{-1}A_2f_m^0)(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0 \\ & -(f_1, (B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)(B_2^*)^{-1}A_2f_m^0 \end{aligned}$$

$$+ (f_2, B_2^{-1}A_1C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)(C_2 + A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0$$

$$- (f_2, B_2^{-1}A_1C_4^{-1}(C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2)f_m^0)(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0$$

$$+ (f_4, C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)(C_2 + A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0$$

$$- (f_4, C_4^{-1}(C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2)f_m^0)(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0], \tag{3.20}$$

$$\phi_m = \frac{1}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0, f_m^0)}[-(f_1, (C_2 + A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)B_2^{-1}A_1C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0$$

$$+ (f_1, (B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)B_2^{-1}A_1C_4^{-1}(C_2^* + A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2)f_m^0$$

$$+ (f_2, B_2^{-1}A_1C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)B_2^{-1}f_m^0 - (f_2, B_2^{-1}f_m^0)B_2^{-1}A_1C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0]. \tag{3.21}$$

另一方面, 因为 $\{f_m^0\}_{m=1}^{+\infty}$ 是 X 中的一组 Schauder 基, 并且 $C_4^{-1}B_2^{-1}$, $(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}$ 和 B_2^{-1} 有界，所以 $\{C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0\}_{m=1}^{+\infty}$, $\{(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0\}_{m=1}^{+\infty}$ 和 $\{B_2^{-1}f_m^0\}_{m=1}^{+\infty}$ 也是 X 中的一组 Schauder 基. 于是存在常数序列 $\{a_m^k\}_{m=1}^{+\infty}(k = 1, 2, 3, 4)$, 满足:

$$f_1 = \lim_{N\to+\infty}\sum_{m=1}^{N} a_m^1 f_m^0 = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m^1 f_m^0,$$

$$f_2 = \lim_{N\to+\infty}\sum_{m=1}^{N} a_m^2 C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0 = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m^2 C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,$$

$$f_3 = \lim_{N\to+\infty}\sum_{m=1}^{N} a_m^3 (B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0 = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m^3 (B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,$$

$$f_4 = \lim_{N\to+\infty}\sum_{m=1}^{N} a_m^4 B_2^{-1}f_m^0 = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m^4 B_2^{-1}f_m^0.$$

分别用 $(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0$, $B_2^{-1}f_m^0$, f_m^0 和 $C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0$ 与上面 4 个等式作内积，得到

$$a_m^1 = \frac{(f_1, (B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)}{(f_m^0, (B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)}, \quad a_m^2 = \frac{(f_2, B_2^{-1}f_m^0)}{(f_m^0, (B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)},$$

$$a_m^3 = \frac{(f_3, f_m^0)}{(f_m^0, (B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)}, \quad a_m^4 = \frac{(f_4, C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)}{(f_m^0, (B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)}.$$

进一步，得到

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} \dfrac{(f_1, (B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)f_m^0}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0, f_m^0)} \\ \dfrac{(f_2, B_2^{-1}f_m^0)C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0, f_m^0)} \\ \dfrac{(f_3, f_m^0)(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0, f_m^0)} \\ \dfrac{(f_4, C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)B_2^{-1}f_m^0}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0, f_m^0)} \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

下面只需证明

$$\rho_m=0,\quad \varsigma_m=0,\quad \phi_m=0. \tag{3.23}$$

为了验证 (3.23), 先将 $(C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2)f_1$ 和 $A_1^*(B_2^*)^{-1}f_2$ 写成如下形式:

$$(C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2)f_1=\lim_{N\to+\infty}\sum_{m=1}^{N}\frac{(f_1,(C_2+A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)B_2^{-1}f_m^0}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_m^0)},$$

$$A_1^*(B_2^*)^{-1}f_2=\lim_{N\to+\infty}\sum_{m=1}^{N}\frac{(f_2,B_2^{-1}A_1C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)B_2^{-1}f_m^0}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_m^0)}.$$

考虑到当 $n\neq m$ 时, $(B_2^{-1}A_1C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,C_4^{-1}B_2^{-1}f_n^0)=0$, $((B_2^*)^{-1}A_2f_m^0,f_n^0)=0$ 且 $(B_2^{-1}A_1C_4^{-1}[C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2]f_m^0,C_4^{-1}B_2^{-1}f_n^0)=0$, 并结合 (3.2), (3.5) 及 (3.19)–(3.21), 对任意的 $n\in\Lambda$, 有

$$\begin{aligned}(\rho_m,B_2^{-1}f_n^0)&=(f_1,(C_2+A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)\\&\quad-\frac{(f_1,(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_m^0)}(f_m^0,(C_2+A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)\\&=(f_1,(C_2+A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)-(f_1,(C_2+A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)\\&=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varsigma_m,f_n^0)&=(f_1,(B_2^*)^{-1}A_2f_m^0)-\frac{(f_1,(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_m^0)}(f_m^0,A_2^*B_2^{-1}f_m^0)\\&\quad+\frac{(f_2,B_2^{-1}A_1C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_m^0)}(B_2^{-1}f_m^0,C_4^{-1}(C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2)f_m^0)\\&\quad-(f_2,B_2^{-1}A_1C_4^{-1}(C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2)f_m^0)-(f_4,C_4^{-1}(C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2)f_m^0)\\&\quad+\frac{(f_4,C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_m^0)}(B_2^{-1}f_m^0,C_4^{-1}(C_2^*+A_1^*(B_2^*)^{-1}A_2)f_m^0)\\&=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\phi_m,C_4^{-1}B_2^{-1}f_n^0)&=-\frac{(f_1,(C_2+A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_m^0)}(B_2^{-1}f_m^0,C_4^{-1}A_1^*(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)\\&\quad+\frac{(f_1,(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_m^0)}(f_m^0,(C_2+A_2^*B_2^{-1}A_1)C_4^{-1}A_1^*(B_2^*)^{-1}\\&\quad\cdot C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)-\frac{(f_2,B_2^{-1}f_m^0)}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_m^0)}(C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,A_1^*(B_2^*)^{-1}\\&\quad\cdot C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)+(f_2,B_2^{-1}A_1C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)\\&=0.\end{aligned}$$

因此, (3.23) 成立.

观察 (3.18), (3.22) 和 (3.23), 可知

$$\sum_{m=1}^{+\infty}(c_m^0x_m^0+d_m^0y_m^0+c_{-m}^0x_{-m}^0+d_{-m}^0y_{-m}^0)$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} \dfrac{(f_1, (B_2^*)^{-1} C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0) f_m^0}{((B_2^*)^{-1} C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0, f_m^0)} \\ \dfrac{(f_2, B_2^{-1} f_m^0) C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0}{(f_m^0, (B_2^*)^{-1} C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0)} + \rho_m \\ \dfrac{(f_3, f_m^0)(B_2^*)^{-1} C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0}{((B_2^*)^{-1} C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0, f_m^0)} + \varsigma_m \\ \dfrac{(f_4, C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0) B_2^{-1} f_m^0}{((B_2^*)^{-1} C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0, f_m^0)} + \phi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = F.$$

上式表明 (3.17) 成立，结论得证.

接下来证明情况 (9). 在该情况下，对所有的 $m \in \Lambda$, 都有 $\Delta_m = 0$ 且 $\gamma_m > 0$.

由引理 3.2 和注 3.1 可知， H 的对应于 μ_m 的基本本征向量 x_m^0 和一阶约当型本征向量 x_m^1 分别由 (3.9) 和 (3.14) 给出， H 的对应于 μ_{-m} 的基本本征向量 x_{-m}^0 和一阶约当型本征向量 x_{-m}^1 分别由 (3.6) 和 (3.15) 给出.

根据引理 2.1, 方程 (3.2), (3.4), (3.5) 以及 $\mu_m = \omega_m$, 我们得到

$$\begin{aligned} &\langle x_m^0, x_n^0 \rangle = (x_m^0, J x_n^0) = 0, \quad m,\ n \in \Lambda; \\ &\langle x_m^1, x_n^1 \rangle = (x_m^1, J x_n^1) = 0, \quad m,\ n \in \Lambda; \\ &\langle x_m^0, x_n^1 \rangle = (x_m^0, J x_n^1) = \begin{cases} 0, & n \neq -m, \\ -4\mu_m^2 ((B_2^*)^{-1} C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0, f_m^0), & n = -m. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.24}$$

要证明 H 的由 $\{x_{\pm m}^0\}_{m=1}^{+\infty}$ 和 $\{x_{\pm m}^1\}_{m=1}^{+\infty}$ 组成的广义本征向量组是 Hilbert 空间 X^4 中的一组块状 Schauder 基，只需证明对于任意的

$$F = (f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4)^{\mathrm{T}} \in X^4,$$

存在常数序列 $\{c_{\pm m}^0\}_{m=1}^{+\infty}$ 和 $\{c_{\pm m}^1\}_{m=1}^{+\infty}$, 使得

$$F = \sum_{m=1}^{+\infty} (c_m^0 x_m^0 + c_m^1 x_m^1 + c_{-m}^0 x_{-m}^0 + c_{-m}^1 x_{-m}^1).$$

实际上，根据 (3.24), 取

$$\begin{aligned} c_m^0 &= \frac{\langle F, x_{-m}^1 \rangle}{\langle x_m^0, x_{-m}^1 \rangle} = -\frac{(F, J x_{-m}^1)}{4\mu_m^2 ((B_2^*)^{-1} C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0, f_m^0)}, \\ c_m^1 &= \frac{\langle F, x_{-m}^0 \rangle}{\langle x_m^1, x_{-m}^0 \rangle} = \frac{(F, J x_{-m}^0)}{4\mu_m^2 ((B_2^*)^{-1} C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0, f_m^0)}, \\ c_{-m}^0 &= \frac{\langle F, x_m^1 \rangle}{\langle x_{-m}^0, x_m^1 \rangle} = -\frac{(F, J x_m^1)}{4\mu_m^2 ((B_2^*)^{-1} C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0, f_m^0)}, \\ c_{-m}^1 &= \frac{\langle F, x_m^0 \rangle}{\langle x_{-m}^1, x_m^0 \rangle} = \frac{(F, J x_m^0)}{4\mu_m^2 ((B_2^*)^{-1} C_4^{-1} B_2^{-1} f_m^0, f_m^0)}. \end{aligned}$$

进而便可得到

$$\sum_{m=1}^{+\infty}(c_m^0x_m^0+c_m^1x_m^1+c_{-m}^0x_{-m}^0+c_{-m}^1x_{-m}^1)=\sum_{m=1}^{+\infty}\begin{pmatrix}\dfrac{(f_1,(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)f_m^0}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_m^0)}\\ \dfrac{(f_2,B_2^{-1}f_m^0)C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_m^0)}+\rho_m\\ \dfrac{(f_3,f_m^0)(B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_m^0)}+\varsigma_m\\ \dfrac{(f_4,C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0)B_2^{-1}f_m^0}{((B_2^*)^{-1}C_4^{-1}B_2^{-1}f_m^0,f_m^0)}+\phi_m\end{pmatrix},$$

式中 ρ_m,ς_m 和 ϕ_m 的表达式与情况 (1) 中得到的一样.

观察上述方程，易知证明的余下部分与情况 (1) 完全类似.

于是对任意的 $F(x)=(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4)^{\mathrm{T}}\in X^4$, 有

$$\sum_{m=1}^{+\infty}(c_m^0x_m^0+c_m^1x_m^1+c_{-m}^0x_{-m}^0+c_{-m}^1x_{-m}^1)=F,$$

故定理结论得证.

4 在辛弹性力学中的应用

本节我们给出两个例子来展示上一节结果的有效性.

例 4.1 在区域 $\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant h\}$ 内考虑矩形薄板的自由振动问题:

$$\nabla^4W(x,y)-\frac{\rho\omega^2}{D}W(x,y)=0.\tag{4.1}$$

板在边 $y=0$ 和 $y=h$ 满足下列简支边界条件:

$$W(x,y)=\frac{\partial^2W(x,y)}{\partial y^2}=0,\quad y=0,h,$$

其中 $W(x,y)$ 是板的振型函数， ρ 是板单位面积的质量， D 是抗弯刚度， ω 是固有频率.

引入弯矩函数

$$M_x=-D\Big(\frac{\partial^2W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\Big),\quad M_y=-D\Big(\frac{\partial^2W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\Big),$$

将它们进行求和，得到

$$M_x+M_y=-D(1+\nu)\nabla^2W.$$

取

$$M=\nabla^2W,\quad \frac{\partial W}{\partial x}=\tau,\quad \frac{\partial M}{\partial x}=\xi.$$

进而，得到

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial^2M}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2M}{\partial y^2}+\frac{\rho\omega^2}{D}W,\quad \frac{\partial\tau}{\partial x}=\frac{\partial^2W}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2W}{\partial y^2}+M.$$

于是 (4.1) 可转化成以下的可分 Hamilton 系统

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} W \\ M \\ \xi \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\rho\omega^2}{D} & -\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & 0 \\ -\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W \\ M \\ \xi \\ \tau \end{pmatrix}.$$

相应的 Hamilton 算子是

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\rho\omega^2}{D} & -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} & 0 & 0 \\ -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{D}(H_1) \subset X^4 \to X^4,$$

其中 $X = L^2(0,h)$, H_1 的定义域为

$$\mathcal{D}(H_1) = \left\{ \begin{pmatrix} \widetilde{W}(y) \\ \widetilde{M}(y) \\ \widetilde{\xi}(y) \\ \widetilde{\tau}(y) \end{pmatrix} \in X^4 : \begin{array}{c} \widetilde{W}(0) = \widetilde{W}(h) = \widetilde{M}(0) = \widetilde{M}(h) = 0,\ \widetilde{W}',\ \widetilde{M}' \\ \text{绝对连续},\ \widetilde{W}'',\ \widetilde{M}'' \in X \end{array} \right\}.$$

通过直接计算，得到 H_1 的本征值是

$$\mu_m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 + \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}}, \quad \mu_{-m} = -\sqrt{\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 + \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}},$$
$$\omega_m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 - \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}}, \quad \omega_{-m} = -\sqrt{\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 - \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}}.$$

H_1 的对应于本征值 $\{\mu_m,\ \omega_m,\ \mu_{-m},\ \omega_{-m} \mid m \in \Lambda_1 \cup \Lambda_2\}$ 的基本本征向量 $\{x_m^0,\ y_m^0,\ x_{-m}^0,\ y_{-m}^0 \mid m \in \Lambda_1 \cup \Lambda_2\}$ 为

$$x_m^0 = \left(\sin\frac{m\pi}{h}y,\ \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}\sin\frac{m\pi}{h}y,\ \mu_m\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}\sin\frac{m\pi}{h}y,\ \mu_m\sin\frac{m\pi}{h}y\right)^{\mathrm{T}},$$
$$y_m^0 = \left(\sin\frac{m\pi}{h}y,\ -\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}\sin\frac{m\pi}{h}y,\ -\omega_m\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}\sin\frac{m\pi}{h}y,\ \omega_m\sin\frac{m\pi}{h}y\right)^{\mathrm{T}},$$
$$x_{-m}^0 = \left(-\sin\frac{m\pi}{h}y,\ -\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}\sin\frac{m\pi}{h}y,\ \mu_m\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}\sin\frac{m\pi}{h}y,\ \mu_m\sin\frac{m\pi}{h}y\right)^{\mathrm{T}},$$
$$y_{-m}^0 = \left(-\sin\frac{m\pi}{h}y,\ \ \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}\sin\frac{m\pi}{h}y,\ -\omega_m\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}\sin\frac{m\pi}{h}y,\ \omega_m\sin\frac{m\pi}{h}y\right)^{\mathrm{T}}.$$

这里 $f_m^0 = \sin\frac{m\pi}{h}y$. 容易验证 H_1 满足定理 3.2 的所有假设. 注意到 $\{f_m^0\}_{m=1}^{+\infty}$ 是 X 中的一组 Schauder 基，于是由定理 3.2 可知， H_1 的由 $\{x_{\pm m}^0\}_{m=1}^{+\infty}$ 和 $\{y_{\pm m}^0\}_{m=1}^{+\infty}$ 组成的本征向量组是 Hilbert 空间 X^4 中的一组块状 Schauder 基.

实际上，若 $m\in\Lambda_1$, 取

$$c_m^0=\frac{(F,Jx_{-m}^0)}{2h\mu_m\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}},\quad d_m^0=\frac{(F,Jy_{-m}^0)}{-2h\omega_m\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}},\quad c_{-m}^0=\frac{(F,Jx_m^0)}{-2h\mu_m\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}},\quad d_{-m}^0=\frac{(F,Jy_m^0)}{2h\omega_m\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}};$$

若 $m\in\Lambda_2$, 取

$$c_m^0=\frac{(F,Jx_{-m}^0)}{2h\mu_m\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}},\quad d_m^0=\frac{(F,Jy_m^0)}{2h\omega_m\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}},\quad c_{-m}^0=\frac{(F,Jx_m^0)}{-2h\mu_m\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}},\quad d_{-m}^0=\frac{(F,Jy_{-m}^0)}{-2h\omega_m\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{D}}}.$$

于是，有

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{+\infty}(c_m^0x_m^0+d_m^0y_m^0+c_{-m}^0x_{-m}^0+d_{-m}^0y_{-m}^0)&=\sum_{m\in\Lambda_1\cup\Lambda_2}\begin{pmatrix}\frac{2}{h}\int_0^h f_1\sin\frac{m\pi}{h}y\mathrm{d}y\sin\frac{m\pi}{h}y\\ \frac{2}{h}\int_0^h f_2\sin\frac{m\pi}{h}y\mathrm{d}y\sin\frac{m\pi}{h}y\\ \frac{2}{h}\int_0^h f_3\sin\frac{m\pi}{h}y\mathrm{d}y\sin\frac{m\pi}{h}y\\ \frac{2}{h}\int_0^h f_4\sin\frac{m\pi}{h}y\mathrm{d}y\sin\frac{m\pi}{h}y\end{pmatrix}\\&=(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4)^{\mathrm{T}}=F.\end{aligned}$$

例 4.2 在区域 $\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant h\}$ 内考虑对边简支矩形薄板问题. 板由以下方程控制：

$$D\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)^2W(x,y)=0,\tag{4.2}$$

板在边 $y=0$ 和 $y=h$ 满足如下的简支边界条件：

$$W(x,y)=\frac{\partial^2W(x,y)}{\partial y^2}=0,\quad y=0,\ h.$$

引入弯矩函数

$$M=-D\Big(\frac{\partial^2W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\Big),$$

并令

$$\theta=\frac{\partial W}{\partial x},\quad \rho=D\Big(\frac{\partial^3W}{\partial x^3}+\frac{\partial^3W}{\partial x\partial y^2}\Big),\quad t=-M,$$

则 (4.2) 可导向以下的可分 Hamilton 系统：

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}W\\ t\\ \rho\\ \theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&-\frac{\partial^2}{\partial y^2}&0&0\\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2}&\frac{1}{D}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}W\\ t\\ \rho\\ \theta\end{pmatrix}.$$

相应的 Hamilton 算子是

$$H_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} & 0 & 0\\ -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} & \frac{1}{D} & 0 & 0\end{pmatrix}:\mathcal{D}(H_2)\subset X^4\to X^4,$$

其中 $X=L^2(0,h)$，H_2 的定义域为

$$\mathcal{D}(H_2)=\left\{\begin{pmatrix}\widetilde{W}(y)\\ \widetilde{t}(y)\\ \widetilde{\rho}(y)\\ \widetilde{\theta}(y)\end{pmatrix}\in X^4:\begin{array}{c}\widetilde{W}(0)=\widetilde{W}(h)=\widetilde{t}(0)=\widetilde{t}(h)=0,\ \widetilde{W}',\ \widetilde{t}'\\ \text{绝对连续},\ \widetilde{W}'',\ \widetilde{t}''\in X\end{array}\right\}.$$

直接计算可以得到 H_2 的本征值为 $\mu_{\pm m}=\pm\frac{m\pi}{h}$ $(m\in\Lambda)$. H_2 的对应于 μ_m 的基本本征向量 x_m^0 和一阶约当型本征向量 x_m^1 分别为

$$x_m^0=\Big(\frac{1}{\mu_m}\sin\mu_m y,\ 0,\ 0,\ \sin\mu_m y\Big)^{\mathrm{T}},$$

$$x_m^1=\Big(-\frac{1}{2\mu_m^2}\sin\mu_m y,\ 2D\sin\mu_m y,\ 2D\mu_m\sin\mu_m y,\ \frac{1}{2\mu_m}\sin\mu_m y\Big)^{\mathrm{T}}.$$

H_2 的对应于 μ_{-m} 的基本本征向量 x_{-m}^0 和一阶约当型本征向量 x_{-m}^1 分别为：

$$x_{-m}^0=\Big(-\frac{1}{\mu_m}\sin\mu_m y,\ 0,\ 0,\ \sin\mu_m y\Big)^{\mathrm{T}},$$

$$x_{-m}^1=\Big(-\frac{1}{2\mu_m^2}\sin\mu_m y,\ 2D\sin\mu_m y,\ -2D\mu_m\sin\mu_m y,\ -\frac{1}{2\mu_m}\sin\mu_m y\Big)^{\mathrm{T}}.$$

这里 $f_m^0=\frac{1}{\mu_m}\sin\mu_m y$. 不难验证 H_2 满足定理 3.2 的所有假设．因为 $\{f_m^0\}_{m=1}^{+\infty}$ 是 X 中的一组 Schauder 基，故由定理 3.2 可知， H_2 的由 $\{x_{\pm m}^0\}_{m=1}^{+\infty}$ 和 $\{x_{\pm m}^1\}_{m=1}^{+\infty}$ 组成的广义本征向量组是 Hilbert 空间 X^4 中的一组块状 Schauder 基．也就是说，存在常数序列

$$c_m^0=\frac{(F,Jx_{-m}^1)}{-2Dh},\quad c_m^1=\frac{(F,Jx_{-m}^0)}{2Dh},\quad c_{-m}^0=\frac{(F,Jx_m^1)}{-2Dh},\quad c_{-m}^1=\frac{(F,Jx_m^0)}{2Dh},$$

使得

$$\sum_{m=1}^{+\infty}(c_m^0x_m^0+c_m^1x_m^1+c_{-m}^0x_{-m}^0+c_{-m}^1x_{-m}^1)=\sum_{m\in\Lambda}\begin{pmatrix}\dfrac{2}{h}\int_0^h f_1\sin\dfrac{m\pi}{h}y\mathrm{d}y\sin\dfrac{m\pi}{h}y\\ \dfrac{2}{h}\int_0^h f_2\sin\dfrac{m\pi}{h}y\mathrm{d}y\sin\dfrac{m\pi}{h}y\\ \dfrac{2}{h}\int_0^h f_3\sin\dfrac{m\pi}{h}y\mathrm{d}y\sin\dfrac{m\pi}{h}y\\ \dfrac{2}{h}\int_0^h f_4\sin\dfrac{m\pi}{h}y\mathrm{d}y\sin\frac{m\pi}{h}y\end{pmatrix}$$

$$=(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4)^{\mathrm{T}}=F.$$

致谢　作者对匿名审稿专家的宝贵评论表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] Birkhoff G D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter [J]. *T Am Math Soc*, 1908, 9(2):219–231.

[2] Birkhoff G D. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations [J]. *T Am Math Soc*, 1908, 9(4):373–395.

[3] Birkhoff G D. Note on the expansion of the Green's function [J]. *Math Ann*, 1912, 72(2):292–294.

[4] Keldyš M V. On the characteristic values and characteristic functions of certain classes of non-self-adjoint equations [J]. *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1951, 77:11–14.

[5] Keldyš M V. The completeness of eigenfunctions of certain classes of nonselfadjoint linear operators [J]. *Uspehi Mat Nauk,* 1971, 26(4):15–41.

[6] Gomilko A, Pivovarchik V. On basis properties of a part of eigenfunctions of the problem of vibrations of a smooth inhomogeneous string damped at the midpoint [J]. *Math Nachr*, 2002, 245(1):72–93.

[7] Kravickiĭ A O. Expansion in a series of eigenfunctions of a nonself-adjoint boundary value problem [J]. *Soviet Math Dokl*, 1966, 7:1361–1365.

[8] Markus A S. A basis of root vectors of a dissipative operator [J]. *Soviet Math Dokl*, 1960, 1:599–602.

[9] Shubov M A. On the completeness of root vectors of a certain class of differential operators [J]. *Math Nachr*, 2011, 284(8–9): 1118–1147.

[10] Viziteĭ V N, Markus A S. Convergence of multiple expansions of a bundle of operators in a system of eigenvectors and adjoined vectors [J]. *Mat Sb* (*N S*), 1965, 66(108):287–320.

[11] Yakubov Y. Fold completeness of a system of root vectors of a system of unbounded polynomial operator pencils in Banach spaces, I: abstract theory [J]. *J Math Pure Appl*, 2009, 92(3):263–275.

[12] Gohberg I C, Kreĭn M G. Introduction to the theory of linear nonselfadjoint opeartors [M]. Providence: American Mathematical Society, 1969.

[13] Tretter C. Spectral theory of block operator matrices and applications [M]. London: Imperial College Press, 2008.

[14] Kurina G A. Invertibility of nonnegatively Hamiltonian operators in a Hilbert space [J]. *Differ Equ*, 2001, 37(6):880–882.

[15] Langer H, Ran A C M, Van De Rotten B A. Invariant subspaces of infinite dimensional Hamiltonians and solutions of the corresponding Riccati equations [J]. *Oper Theory Adv Appl*, 2002, 130:235–254.

[16] Azizov T Y, Dijksma A, Gridneva I V. On the boundedness of Hamiltonian operators [J]. *P Am Math Soc*, 2003, 131(2):563–576.

[17] Wyss C. Hamiltonians with Riesz bases of generalised eigenvectors and Riccati equations [J]. *Indiana U Math J*, 2011, 60(5): 1723–1766.

[18] Tretter C, Wyss C. Dichotomous Hamiltonians with unbounded entries and solutions of Riccati equations [J]. *J Evol Equ*, 2014, 14(1):121–153.

[19] 钟万勰. 弹性力学求解新体系 [M]. 大连：大连理工大学出版社， 1995.

[20] Li R, Wang P C, Yang Z K, et al. On new analytic free vibration solutions of rectangular thin cantilever plates in the symplectic space [J]. *Appl Math Model*, 2018, 53:310–318.

[21] Lim C W, Lü C F, Xiang Y, et al. On new symplectic elasticity approach for exact free vibration solutions of rectangular Kirchhoff plates [J]. *Int J Eng Sci*, 2009, 47(1):131–140.

[22] Ma Y B, Li H M, Wu W W, et al. A symplectic analytical wave propagation model for damping and steady state forced vibration of orthotropic composite plate structure [J]. *Appl Math Model*, 2017, 47:318–339.

[23] Rong D L, Fan J H, Lim C W, et al. A new analytical approach for free vibration, buckling and forced vibration of rectangular nanoplates based on nonlocal elasticity theory [J]. *Int J Struct Stab Dy*, 2018, 18(4):1850055.

[24] Yao W A, Sui Y F. Symplectic solution system for Reissner plate bending [J]. *Appl Math Mech-Engl*, 2004, 25(2):178–185.

[25] Yao W A, Zhong W X, Lim C W. Symplectic elasticity [M]. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2009.

[26] Zhang K, Deng Z C, Xu X J, et al. Homogenization of hexagonal and re-entrant hexagonal structures and wave propagation of the sandwich plates with symplectic analysis [J]. *Compos Part B-Eng*, 2017, 114(1):80–92.

[27] Chen A, Wu D Y. Completeness in the sense of Cauchy principal value of the eigenfunction systems of infinite dimensional Hamiltonian operator [J]. *Sci China Ser A*, 2009, 52(1):173–180.

[28] Hou G L, Chen A. Completeness of eigenfunction systems for off-diagonal infinite-dimensional Hamiltonian operators [J]. *Commun Theor Phys*, 2010, 53(2):237–241.

[29] Hou G L, Chen A. Symplectic eigenfunction expansion theorem for elasticity of rectangular planes with two simply-supported opposite sides [J]. *Appl Math Mech-Engl*, 2010, 31(10):1241–1250.

[30] Huang J J. Chen A, Wang H. Eigenfunction expansion method and its application to two-dimensional elasticity problems based on stress formulation [J]. *Appl Math Mech-Engl*, 2010, 31(8):1039–1048.

[31] Wang H, Chen A, Huang J J. On the completeness of eigen and root vector systems for fourth-order operator matrices and their applications [J]. *Chin Phys B*, 2011, 20(10):100202.

[32] Wang H, Chen A, Huang J J. Completeness of system of root vectors of upper triangular infinite-dimensional Hamiltonian operators appearing in elasticity theory [J]. *Appl Math Mech-Engl*, 2012, 33(3):385–398.

[33] Benner P, Faßbender H. An implicitly restarted symplectic Lanczos method for the Hamiltonian eigenvalue problem [J]. *Linear Algebra Appl*, 1997, 263(263):75–111.

Block Basis Property for Systems of Eigenvectors of a Class of 4×4 Unbounded Operator Matrices and Its Application in Elasticity

QIAO Yanfen[1] HOU Guolin[2] Alatancang[3]

[1]School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China. E-mail: yanfenqiao@mail.imu.edu.cn

[2]Corresponding author. School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China. E-mail: smshgl@imu.edu.cn

[3]Mathematics Science College, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China. E-mail: alatanca@imu.edu.cn

Abstract This paper deals with the block Schauder basis property of system of eigenvectors of a class of 4×4 unbounded Hamiltonian operator matrices appearing in mechanics. Under certain conditions, the eigenvalue problems of the Hamiltonian operator matrix are considered. Then a necessary and sufficient condition is presented for the system of eigenvectors of the Hamiltonian operator matrix to be a block Schauder basis of some Hilbert space. Moreover, the validity of the results is verified by the free vibration and bending problems of rectangular thin plates.

Keywords Eigenvector systems, Hamiltonian operator, Eigenvalue problem, Block Schauder basis, Rectangular thin plate

2000 MR Subject Classification 47A75, 47A70

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 42 No. 3, 2021
by ALLERTON PRESS, INC., USA