第10卷 第3期 数学研究与评论 Vol.10 No.3
1990年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1990

广义轮图的色多项式唯一性*

董 峰 明

(中国科学院应用数学研究所，北京)

摘要 本文证明了：当$k>0$，$n>4$为偶数时，广义轮图$\theta_{n,k}$色多项式唯一．同时，也用较简单的方法证明了：对于一个图G，其色多项式为$P_\lambda(G)=\lambda\cdots(\lambda-q+1)\cdot(\lambda-q)^{n-q}$当且仅当$G$为$n$阶$q$-树．

在本文中所考虑到的图均为无向、有限简单图．未解释的术语和概念可参见[3]和[5]．

称$G=K_1$是一阶广义树；对于$n>1$，如果在G中存在$x\in V(G)$，N_x的生成子图(记为$G[N_x]\equiv[N_x]$)是完备图，且$G-x$是n阶广义树，则称G是$n+1$阶广义树．设C是图G上的圈，$|C|>4$，如果C本身又是G的节点生成子图，则称C是G的无弦圈．如果G上不存在无弦圈，则称G是弦图．易验证：完备图和树既是广义树，也是弦图．而且从下面的引理3，可知：广义树就是连通弦图．

引理1 若$G\neq K_n$为广义树，$n=|V(G)|>3$，则G上存在不相邻二节点x、y，使得$[N_x]$、$[N_y]$均是完备图．

证明 当$n=3$时引理成立．现考虑$n>4$的情况．由定义，G上存在一节点x，使得$[N_x]=K_{\rho(x)}$，且$G-x$仍是广义树．又$G\neq K_n$，则只能$\rho(x)<n-1$．若$G-x$是完备图，则任取$y\in V(G)-N_x-\{x\}$；否则，由归纳假设，存在$x_1,x_2\in V(G)-\{x\}$，$(x_1,x_2)\bar{\in}E(G)$，使得N_{x_1}，N_{x_2}在$G-x$上的生成子图都是完备图．由于$[N_x]=K_{\rho(x)}$，不妨设$x_1\bar{\in}N_x$，则取x_1为y．即得引理． ■

引理2 设G连通，$x\in V(G)$，$\rho(x)<n-1$，G上不存在过x的无弦圈．则，对于$G-(N_x\cup\{x\})$的任一连通片H，$[N(H)\cap N_x]$是完备图．

证明 记$A(H)=N(H)\cap N_x$．假设$A(H)$上存在不相邻二节点x_1、x_2． $[H\cup\{x_1,x_2\}]$连通，记$P(x_1,x_2)$为此子图上连x_1、x_2的一条最短路．那么，$xP(x_1,x_2)x$就是过x的一个无弦圈．矛盾． ■

引理3 G为广义树当且仅当G为连通弦图．

证明 必要性．易验证，阶数较小的广义树是连通弦图．现设G是n级广义树，$n>4$．由定义，可知G上存在一节点x，使得$[N_x]$是完备图且$G-x$是广义树．由归纳假设，可知

* 1988年12月7日收到．本文是在导师刘彦佩教授指导下所做的硕士论文的一部分，在此也向云南师大的刘声烈教授在基础课方面的指导表示感谢．

$G-x$上不存在无弦圈．那么，如果G不是弦图，则G上有无弦圈，且都过x．这与$[N_x]$是完备图相矛盾．必要性成立．

充分性．易验证，阶数不大于4的连通弦图是广义树．设G是n阶连通弦图，$n\geq 5$．如果G是完备图，则G是广义树．否则，由引理2，G上存在完备分离集，设A就是．设A_0表示$G-A$的一个连通片的节点集合．那么，$[A\cup A_0]$是连通弦图．根据归纳假设，$[A\cup A_0]$是广义树．由引理1，存在$x_1\in A_0$，使得$[N_{x_1}]$是完备图．而$G-x_1$也是连通弦图，根据归纳假设，$G-x_1$是广义树，再由定义，G是广义树．充分性成立．■

[15]中已证明过引理3，但这里所用的方法与那里完全不同且比较简单．

引理 4　设S是图G的分离集，$[S]$是完备图．S_1、…、S_m，$m\geq 2$，是$G-S$的连通片的节点集合．那么，G的任一无弦圈在某一子图$[S_i\cup S]$上．

证明　假设G上某一无弦圈C上有两节点x_1、x_2分别属于S_i、S_j，$1\leq i<j\leq m$，x_1，x_2把C分成两条路$P_1(x_1,x_2)$和$P_2(x_1,x_2)$．$P_1(x_1,x_2)$、$P_2(x_1,x_2)$上必定分别存在节点y_1,y_2，y_1、$y_2\in S$，且$y_1\neq y_2$．因C是无弦圈，所以$(y_1,y_2)\bar{\in} E$．这与S是完备分离集相矛盾．■

引理 5　设图G和H满足$P_\lambda(G)=P_\lambda(H)$，则有下列性质：

D_1．$|V(G)|=|V(H)|$，　$|E(G)|=|E(H)|$．

D_2．$|\Delta(G)|=|\Delta(H)|$，其中$\Delta(G)$表示G的三角形的集合．

D_3．$\chi_i(G)=\chi(H)$，G与H的着色唯一性相同．

D_4．G与H的连通片数相同，连通块数也相同．

证明　D_1、D_3、D_4都容易证明．这里只证D_2．设$P_\lambda(G)=\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}\lambda$．根据[3]中定理16，有$a_2=N_{(n-2,2)}-N_{(n-2,3)}$，其中，$N_{(n-2,2)}=C_{a_1}^2=\frac{1}{2}a_1(a_1-1)$，$N_{(n-2,3)}=|\Delta(G)|$．所以，$|\Delta(G)|=\frac{1}{2}a_1(a_1-1)-a_2$．由$P_\lambda(G)=P_\lambda(H)$，就导出$|\Delta(G)|=|\Delta(H)|$．■

引理 6　设A_1、A_2、…、A_m是$G=(V,E)$的独立集，两两不交，且$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m=V$，并满足下列条件：

E_1．$\forall i,j$：$1\leq i<j\leq m$，$G_{i,j}\equiv[A_i\cup A_j]$为树．

E_2．若$m\geq 3$，$\forall i,j$：$1\leq i<j\leq m$，$\forall x\in V-A_i-A_j$，$[N_x\cap(A_i\cup A_j)]$连通．

则G是弦图．

证明　当$m=2$时，易见引理成立．设$m<k$ $(k\geq 3)$时引理成立．现在设$m=k$．那么，对任意i，$1\leq i\leq m$，$G-A_i$是弦图．如果G上存在无弦圈，则对于每一无弦圈C，有$V(C)\cap A_i\neq\varnothing$，$i=1,\cdots,m$．记

$$\mathscr{C}=\{C\,|\,C\text{是}G\text{上无弦圈}\},$$

$$\mathscr{C}_1=\{C_1\,|\,C_1\in\mathscr{C}，\text{且}\,|V(C_1)\cap A_m|=\min_{C\in\mathscr{C}}|V(C)\cap A_m|=P_0\},$$

$$\mathscr{C}_0=\{C_0\,|\,C_0\in\mathscr{C}_1，\text{且}\,|C_0|=\min_{C_1\in\mathscr{C}_1}|C_1|=P_1\}.$$

现假设$\mathscr{C}\neq\varnothing$，那么$\mathscr{C}_1\neq\varnothing$，$\mathscr{C}_0\neq\varnothing$．

1．首先证明：对任意$C_0\in\mathscr{C}_0$，有$|C_0|\geq 5$．否则，存在$C_0\in\mathscr{C}_0$，$|C|=4$．设C_0为$xy_1y_2y_3x$，其中$x\in V(C)\cap A_m$．如图1．

$n+1$阶q-树．E．G．Whitehead，Jr．在［8］中证明了结论：$P_\lambda(G)=\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda-2)^{n-2}$当且仅当$G$为2-树，并提出猜想：$P_\lambda(G)=\lambda\cdot\cdots\cdot(\lambda-q+1)(\lambda-q)^{n-q}$当且仅当$G$为$n$阶$q$-树，$n\geq q\geq 2$．后来，Chongyun Chao在［4］中证明了该猜想成立．这里我们用一种新的较简单的方法来证明这个猜想．

定理1 $q\geq 2$是整数，$n\geq q$，G为n阶q-树当且仅当$P_\lambda(G)=\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot\cdots\cdot(\lambda-q+1)\cdot\cdot(\lambda-q)^{n-q}$．

证明 必要性由定义可直接得到．

充分性．若$n=q$，有$G\cong K_q$．设$n<k$ $(k\geq q+1)$时充分性成立．现在设$n=k$．由引理5,可知G有下面两个性质：

E_1．$|V(G)|=n$，$|E(G)|=nq-\frac{1}{2}q(q+1)$，$|\Delta(G)|=\frac{1}{2}q\cdot(q-1)\cdot(3n-2q-2)$．

E_2．G是$q+1$-着色唯一图．

G的$q+1$-着色把$V(G)$分成$q+1$个子集A_1、…、A_{q+1}，记$|A_i|=m_i, i=1,\cdots,q+1$．由于$G$着色唯一，那么$G_{i,j}=〔A_i\cup A_j〕$连通，$1\leq i<j\leq q+1$.可断定$G_{i,j}$ $(1\leq i<j\leq q+1)$均为树，否则，有

$$\begin{aligned}|E(G)|&=\sum_{1\leq i<j\leq q+1}|E(G_{i,j})|>\sum_{1\leq i<j\leq q+1}(m_i+m_j-1)\\&=q(m_1+\cdots+m_{q+1})-C_{q+1}^2=nq-\frac{1}{2}q(q+1).\end{aligned}$$

与性质E_1矛盾．其次，可断定：对于任意i,j：$1\leq i<j\leq q+1$,和任意$x\in V(G)-A_i-A_j$，$〔N_x\cap(A_i\cup A_j)〕$连通．否则，有

$$\begin{aligned}|\Delta(G)|&<\frac{1}{3}\sum_{1\leq i<j\leq q+1}\ \sum_{\substack{1\leq l\leq q+1\\ l\neq i,j}}\ \sum_{x\in A_l}(\rho_{i,j}(x)-1)\\&=\frac{1}{3}\Big[2(q-1)\Big(nq-\frac{1}{2}q(q+1)\Big)-n\cdot\frac{q(q+1)}{2}\Big]\\&=\frac{1}{6}q(q-1)(3n-2q-2).\end{aligned}$$

其中$\rho_{i,j}(x)$表示$〔\{x\}\cup A_i\cup A_j〕$上节点x的次．上式与性质E_1矛盾．

根据引理6,知G是弦图．而G连通，根据引理3,知G是广义树，存在$x\in V(G)$，使得$〔N_x〕$是完备图．设$|N_x|=m$．那么，$P_\lambda(G)=(\lambda-m)\cdot P_\lambda(G-x)$．由已知$P_\lambda(G)=\lambda\cdot\cdots\cdot(\lambda-q+1)(\lambda-q)^{n-q}$，并根据图的色多项式性质，有$m=q$．再由归纳假设，知$G-x$是$n-1$阶$q$-树．因此$G$是$n$阶$q$树．．■

引理7 设$k\geq 3$，A_1、…、A_k是G的独立集，两两不交，且$A_1\cup\cdots\cup A_k=V(G)$，并满足下列条件：

F_1．$\forall i,j$：$1\leq i<j\leq k$，$G_{i,j}=〔A_i\cup A_j〕$连通．$G_{1,2}$上有且只有一个圈C^*，而别的子图$G_{i,j}$ $((i,j)\neq(1,2))$均为树．

F_2．对于任意i,j，$1\leq i<j\leq k$,和$x\in V(G)-A_i-A_j$，$〔N_x\cap(A_i\cup A_j)〕$连通．

F_3．对于任意i，$3\leq i\leq k$，存在$x_i'\in A_i$，x_i'与C^*上各节点相邻．

则，G上有且只有一个无弦圈，就是C^*．

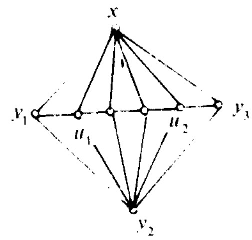

图 1

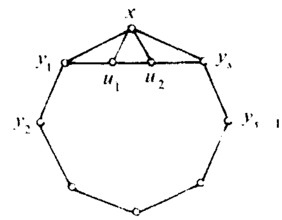

图 2

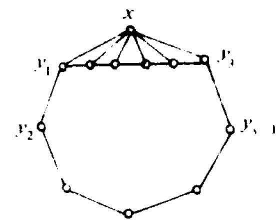

图 3

1.1. y_1、y_3不会同属某集A_i，$1\leqslant i\leqslant m-1$，否则，必存在 $j, j\in\{1,\cdots,m-1\}-\{i\}$，使得 $y_2\in A_j$. 由 E$_1$，$y_1y_2y_3$是$G_{i,j}$上连y_1、y_3的唯一路，再由 E$_2$，有$(x,y_2)\in E$. 这与C是无弦圈相矛盾.

1.2. 由1.1，可不妨设 $y_1\in A_1$，$y_3\in A_2$. 由 E$_1$，可设 $y_1u_1\cdots u_ty_3$是$G_{1,2}$上连y_1、y_3的唯一路，$t\geqslant 2$是偶数. 再由 E$_2$，可知x、y_2与u_1、$\cdots$、u_t都相邻. 这样，得到无弦圈$xy_1y_2u_tx$，记为C'. 易验证 $C'\in\mathscr{C}_0$. 由1.1，导出矛盾.

2. 设 $C_0\in\mathscr{C}_0$，$x\in V(C_0)\cap A_m$ C_0-x是路 $y_1y_2\cdots y_s$，其中 $s\geqslant 4$.

2.1. 设存在 i,j，$1\leqslant i<j\leqslant m-1$，$y_1\in A_i$，$y_s\in A_j$. 由 E$_1$，可知$G_{i,j}$上存在连$y_1$、$y_s$的唯一路 $y_1u_1u_2\cdots u_ty_s$，$t\geqslant 2$是偶数. 由E$_2$，可知 x 与u_1、$\cdots$、u_t都相邻. 故u_1、$\cdots$、u_t都不在C_0上.

2.1.1. 设$t=2$. 如图2. 可证 u_1与y_3、$\cdots$、y_{s-1}都不相邻. 否则，存在 s_1，$3\leqslant s_1\leqslant s-1$，使得$xu_1y_{s_1}\cdots y_sx$是一无弦圈，记为$C$. 而 $|V(C)\cap A_m|\leqslant P_0$，$|C|<P_1$，与 $\mathscr{C}_1$，$\mathscr{C}_0$ 的假设矛盾. 同法可证，u_2与y_2、$\cdots$、y_{s-2}都不相邻. 那么，$[\{u_1,u_2,y_1,\cdots,y_s\}]$上存在无弦圈. 设$C'$就是. 但$|V(C')\cap A_m|<P_0$，与 $\mathscr{C}_1$的假设矛盾.

2.1.2. 由2.1.1，便知$t\geqslant 4$. 如图3. 若存在t'，$2\leqslant t'\leqslant t-1$，使得$u_{t'}$与$y_2$、$\cdots$、$y_{s-1}$中某些节点相邻，那么，存在 s_2、s_3，$2\leqslant s_2\leqslant s_3\leqslant s-1$. 使得

$$C'':xy_1\cdots y_{s_2}u_{t'}x,\ C''':xu_{t'}y_{s_3}\cdots y_sx,$$

是二无弦圈. 然而，$|V(C'')\cap A_m|\leqslant P_0$，$|V(C''')\cap A_m|\leqslant P_0$，$|C'''|<P_1$ 或 $|C''|<P_1$，这与$\mathscr{C}_1$、$\mathscr{C}_0$的假设矛盾. 那么$[\{u_1\cdots,u_t,y_1,\cdots,y_s\}]$上存在无弦圈，记$C^{(4)}$就是. 但$|V(C^{(4)})\cap A_m|<P_0$，与 $\mathscr{C}_1$的假设矛盾.

2.2. 由2.1，可知存在i，$1\leqslant i\leqslant m-1$，使得 y_1、$y_s\in A_i$. 不妨设 $i=1$. 由条件 E$_1$，可知$G_{1,2}$上存在连y_1、y_s的唯一路，记为 $y_1u_1\cdots u_ty_s$，$t\geqslant 1$为奇数. 由 E$_2$，可知 x 与u_1、$\cdots$、u_t均相邻，所以，u_1、$\cdots$、u_t均不在C_0上.

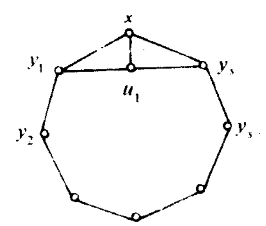

图 4

2.2.1. 设 $t=1$. 如图4. $u_1\in A_2$. 因 $V(C_0)\cap A_2\neq\varnothing$. 所以$u_1$与$C_0$上某些节点不相邻. 那么，$[\{u_1,y_1,\cdots,y_s\}]$上存在无弦圈，设 C^*就是. 但 $|V(C^*)\cap A_m|<P_0$，与 $\mathscr{C}_1$的假设矛盾.

2.2.2. 由2.2.1，有$t\geqslant 3$. 用类似2.1.2的方法可导出矛盾.

因此，C_0不存在，$\mathscr{C}_0=\varnothing$，$\mathscr{C}=\varnothing$. 说明$G$是弦图. ■

设 $q\geqslant 2$ 是整数，最低阶的 q-树是K_q. 对于图G，如果存在 $x\in V(G)$，使得$[N_x]\cong K_q$，且 $G-x$ 是 n 阶 q-树，$n\geqslant q$，则称G为

证明 假设

$$\mathscr{C}=\{C|C\text{是}G\text{上无弦圈}, C\neq C^*\}\neq\varnothing.$$

根据引理6, 对于任意 $C\in\mathscr{C}$, 有 $V(C)\cap A_i\neq\varnothing$, $i=1,2$. 若存在 j, $3<j<k$, 和 $C\in\mathscr{C}$, 使得 $V(C)\cap A_j=\varnothing$, 则以 $G-A_j$ 代替 G. 因此, 可设: 对于任意 $C\in\mathscr{C}$, 有 $V(C)\cap A_i\neq\varnothing$, $i=1,\cdots,k$. 现在设

$$\mathscr{C}'=\{C'|C'\in\mathscr{C}, \text{且} |V(C')\cap A_1|=\min_{C\in\mathscr{C}}|V(C)\cap A_1|=P_1\},$$

$$\mathscr{C}''=\{C''|C''\in\mathscr{C}', \text{且} |C''|=\min_{C'\in\mathscr{C}'}|C'|=P_2\}.$$

于是 $\mathscr{C}'\neq\varnothing$, $\mathscr{C}''\neq\varnothing$. 对于任意 $C\in\mathscr{C}$和 $x\in V(C)\cap A_1$, 设 x 在C上相邻二节点是 w_1, w_2.对应于 $w_1\in A_i$, $w_2\in A_j$ (不妨设 $2<i<j<k$), 或 $w_1, w_2\in A_i$ ($3<i<k$), 或 w_1、$w_2\in A_2$, $P_x(C)$ 分别表示$G_{i,j}$上或$G_{2,i}$上, 或$G_{2,3}$上连 w_1、w_2的唯一路的长度. 记 $P(C)=\min\limits_{x\in V(C)\cap A_1}P_x(C)$,

$P_0=\min\limits_{C''\in\mathscr{C}''}P(C'')$, $\mathscr{C}_0=\{C_0|C_0\in\mathscr{C}'', \text{且} P(C_0)=P_0\}$. 显然 $\mathscr{C}_0\neq\varnothing$.

1. 可证对任意 $C\in\mathscr{C}$, 有 $|C|>5$.否则, 设 $x\in V(C)\cap A_1$, $C-x$是路$y_1y_2y_3$, 如图5.

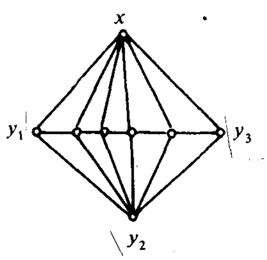

图 5

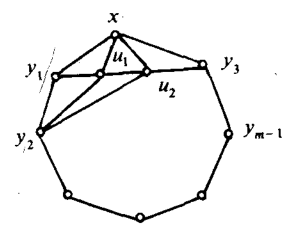

图 6

如果存在i, $2<i<k$, y_1、$y_3\in A_i$, 则必有 $y_2\in A_j$, $2<j<k$, $j\neq i$. 再由条件 F_1、F_2, 有$(x, y_2)\in E$. 矛盾. 现设 $y_1\in A_i$, $y_3\in A_j$, $2<i<j<k$, $G_{i,j}$上连 y_1、y_3 的唯一路是 $y_1u_1\cdots u_ty_3$, $t>2$ 是偶数. 由条件F_2, x、y_2与u_1、$\cdots$、u_t都相邻. 得到两个无弦圈: $xy_1y_2u_tx$和$xy_3y_2u_1x$. 其中之一必不是C^*, 与前面的结论相矛盾.

2. 可证对于任意 $C_0\in\mathscr{C}_0$, 和$x\in V(C_0)\cap A_1$, 若 $P_x(C_0)=P_0$, 那么 x 在C_0上的二邻点同属某集 A_i, $2<i<j<k$. 由F_1, $G_{i,j}$上存在连 y_1、y_m的唯一路 $y_1u_1\cdots u_ty_m$, 其中 $t=P_0-1$ 为偶数. 由 F_2, x 与$u_1,\cdots,u_t$均相邻, 那么u_1、$\cdots$、u_t都不在C_0上.

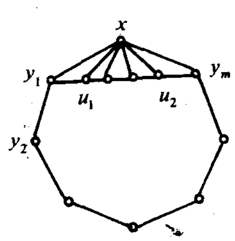

图 7

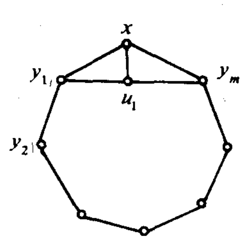

图 8

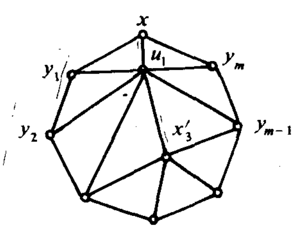

图 9

2.1. 设 $t=2$. 如图6. $u_1 \in A_j$, $u_2 \in A_i$. 可以肯定 u_1 不与 y_3、…、y_{m-1} 中任一节点相邻，不然，$[\{x, u_1, y_3, \cdots, y_m\}]$ 上存在 $C_1 \in \mathscr{C}$，但 $|V(C_1) \cap A_1| < P_1$，$|C_1| < P_2$，与 $\mathscr{C}'$、$\mathscr{C}''$ 的假设矛盾. 其次，可断定 $(u_1, y_2) \in E$. 否则，$[\{u_1, u_2, y_1, \cdots, y_m\}]$ 上存在 $C_2 \in \mathscr{C}$，但 $|V(C_2) \cap A_1| < P_1$，与 $\mathscr{C}'$ 的假设矛盾. 同法可证 $(y_2, u_2) \in E$. 由1, 必有 $i=2$. 设 C_3 表示圈：$xu_1y_2\cdots y_mx$，则 $C_3 \in \mathscr{C}''$，且 $P_x(C_3) < P_0$，与 P_0 的假设矛盾.

2.2. 由2.1, 有 $t \geqslant 4$. 首先，可证：对任意 t'，$2 \leqslant t' \leqslant t-1$, $u_{t'}$ 与 y_2、…、y_{m-1} 都不相邻. 否则，存在 s_2、s_3，$2 \leqslant s_2 \leqslant s_3 \leqslant m-1$，使得

$$C_4: \quad xy_1\cdots y_{s_2}u_{t'}x,$$
$$C_5: \quad xu_{t'}y_{s_3}\cdots y_mx$$

都是无弦圈. 那么，必有 $s_2 = s_3 = 2$. 否则，由于 $|V(C_5) \cap A_1| \leqslant P_1$. $|C_5| < P_2$，以及 $C_5 \in \mathscr{C}$，导出矛盾. 由1, 有 $i=2$. 于是，$C_5 \in \mathscr{C}''$. 但 $P_x(C_5) < P_0$，矛盾. 这样，$[\{u_1, \cdots, u_t, y_1, \cdots, y_m\}]$ 上存在 $C_6 \in \mathscr{C}$，但 $|V(C_6) \cap A_1| < P_1$，与 $\mathscr{C}'$ 的假设矛盾.

因此，2的结论成立.

3. 设 $C_0 \in \mathscr{C}_0$，$x \in V(C_0) \cap A_1$. 且 $P_x(C_0) = P_0$，$C_0 - x$ 为路 $y_1, \cdots, y_m$，$m \geqslant 4$. 由2, 有 y_1、$y_m \in A_i$，$i \geqslant 2$.

3.1. 若 $i=2$. 设 $G_{2,3}$ 上连 y_1、y_m 的唯一路是 $y_1u_1\cdots u_ty_m$，$t = P_0 - 1$ 是奇数. 由 F_1、F_2. x 与 u_1、…、u_t 均相邻，所以 u_1、…、u_t 都不在 C_0 上. 设 $t=1$, 见图8, 由于 $u_1 \in A_3$，和 $V(C_0) \cap A_3 \neq \varnothing$，那么 $[\{u_1, y_1, \cdots, y_m\}]$ 上存在 $C_1 \in \mathscr{C}$，但 $|V(C_1) \cap A_1| < P_1$，与 $\mathscr{C}'$ 的假设矛盾. 而当 $t \geqslant 3$ 时，用类似于2.2 的方法可导出矛盾.

3.2. 由3.1, 有 $i \geqslant 3$. 设 $G_{2,i}$ 上连 y_1、y_m 的唯一路为 $y_1u_1\cdots u_ty_m$，$t = P_0 - 1$ 为奇数. x 与 $u_1, \cdots, u_t$ 都相邻，那么，u_1、…、u_t 都不在 C_0 上. 设 $t=1$, 如图9, 有 $u_1 \in A_2$，$V(C_0) \cap A_2 \neq \varnothing$. 若 $[\{u_1, y_1, \cdots, y_m\}]$ 上存在 $C \in \mathscr{C}$，则因 $|V(C) \cap A_1| < P_1$，导致矛盾. 那么，存在 s_1，s_2，$1 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant m$，$s_1 < s_2 - 1$，$u_1$ 与 $y_{s_1+1}, \cdots, y_{s_2-1}$ 均不相邻，而与 C_0 上别的节点均不相邻. 而且，圈 $u_1y_{s_1}y_{s_1+1}\cdots y_{s_2}u_1$ 就是 C^*. 由条件 F_3，存在 $x_3' \in A_3$，x_3' 与 C^* 上各节点相邻. 因 $V(C_0) \cap A_3 \neq \varnothing$，所以 $[\{x, y_1, \cdots, y_{s_1}, x_3', y_{s_2}, \cdots, y_m\}]$ 上存在 $C_1 \in \mathscr{C}$. 由于 $V(C_1) \cap A_2 = \varnothing$. 导出矛盾. 当 $t \geqslant 3$ 时，用类似2.2.的方法可导出矛盾.

因此，$\mathscr{C}_0 = \varnothing$，$\mathscr{C} = \varnothing$. 引理成立. ■

对于 $n \geqslant 4$, $k \geqslant 1$, $\theta_{n,k}$ 表示图 $K_k \mp C_n$. 其中 K_k 和 C_n 分别表示 k 阶完备图和 n 阶圈. $\theta_{n,1}$ 就是轮图 w_{n+1}，我们称 $\theta_{n,k}$ 为广义轮图，$n \geqslant 4$，$k \geqslant 1$. Shaoju Xu 等人在[1]中证明了当 $n \geqslant 4$ 为偶数时，轮 w_{n+1} 色多项式唯一. 下面我们推广了这一结论.

定理2 对于 $k \geqslant 1$, $n \geqslant 4$ 是偶数，$\theta_{n,k}$ 色多项式唯一.

证明 设图 G 满足

$$P_\lambda(G) = P_\lambda(\theta_{n,k}) = \lambda\cdot\cdots\cdot(\lambda-k+1)\cdot[(\lambda-k+1)^n + \cdots + (-1)^n(\lambda-k-1)].$$

根据引理5, G 有如下性质：

H_1. $|V(G)| = n+k$，$|E(G)| = C_k^2 + nk + n$，$|\Delta(G)| = C_k^3 + nk + n\cdot C_k^2$.

H_2. G 是 $k+2$－着色唯一图.

H_3. $(\lambda-i)^2 \nmid P_\lambda(G)$，$i = 0, \cdots, k+1$，$(\lambda-k-2) \mid P_\lambda(G)$.

G 的节点 $k+2$—着色把 $V(G)$ 分成 $k+2$ 个子集，记为 A_1、…、A_{k+2}. 设 $|A_i| = m_i$，$i=1$,

$\cdots, k+2$. 由H_2. $[A_i \cup A_j]$连通, $1 \leqslant i < j \leqslant k+2$.

1. 因为对于任意i, j: $1 \leqslant i < j \leqslant k+2$, 有$|E(G_{i,j})| \geqslant m_i + m_j - 1$, 所以

$$|E(G)| = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k+2} |E(G_{i,j})| \geqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k+2} (m_i + m_j - 1)$$
$$= (k+1)(m_1 + \cdots + m_{k+2}) - C_{k+2}^2 = C_k^2 + nk + k - 1.$$

因此, 存在i_0、j_0, $1 \leqslant i_0 < j_0 \leqslant k+2$, $[A_{i_0} \cup A_{j_0}]$上有且只有一个圈C^*, 当然是无弦圈, 而别的子图$[A_i \cup A_j]$ ($(i,j) \neq (i_0, j_0)$)均为树. 不妨设$i_0 = 1, j_0 = 2$.

2. 证明: 对于任意i, $3 \leqslant i \leqslant k$, A_i中存在唯一一个节点x_i', 使得x_i'与C^*上各节点相邻. 首先可证: $A_3 \cup \cdots \cup A_{k+2}$中至少有$k$个节点均与$C^*$上各节点相邻. 否则, 设只有$l$个这样的点, $0 \leqslant l < k$, 那么,

$$|\Delta(G)| \leqslant \frac{1}{3}[l + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k+2} \sum_{\substack{m \in \{1, \cdots, k+2\} \\ m \neq i, j}} \sum_{x \in A_m} (\rho_{i,j}(x) - 1)]$$
$$= \frac{1}{3}[l + 2k(\frac{k(k-1)}{2} + nk + n) - \frac{k(k+1)}{2} \cdot (n+k)]$$
$$= \frac{1}{3}(l-k) + C_k^3 + n \cdot k + n \cdot C_k^2 < C_k^3 + nk + nC_k^2.$$

其中, $\rho_{i,j}(x)$表示$[\{x\} \cup A_i \cup A_j]$上节点$x$的次. 上式与$H_1$矛盾. 其次, 对于任意$i$, $3 \leqslant i \leqslant k+2$, A_i中至多有一个节点与C^*上各点相邻. 不然, $G_{1,i}$, $G_{2,i}$上都有无弦圈, 与1的结论矛盾.

3. 由2的结论及证明过程可知, 对于任意i, j: $1 \leqslant i < j \leqslant k+2$, 和任意$x \in V(G) - A_i - A_j$, $[N_x \cap (A_i \cup A_j)]$连通.

4. 若存在i, j, $3 \leqslant i < j \leqslant k+2$, $(x_i', x_j') \bar{\in} E(G)$, 记$L_{i,j}$表示$[A_i \cup A_j]$上连$x_i'$和$x_j'$的唯一路, $L_{i,j}$上有节点$z \in A_i$, $z \neq x_i'$. 由1和3的结论, 我们知C^*上每一点与z相邻,这与z的结论矛盾. 所以, $[\{x_3', \cdots, x_{k+2}'\}]$是完备图.

5. 由前面已得到的结论, 并根据引理7, G上只有一个无弦圈, 就是C^*.

6. 对任意$x \in V(G) - V(C^*)$, 有$d(x) = n + k - 1$. 否则, 根据引理2, G上有完备分离集, 设A就是, $G - A$的连通片的节点集合分别为$V_1, \cdots$、V_q. 由引理4, C^*在某子图$[V_i \cup A]$上, 而别的子图$[V_j \cup A]$, $j \neq i$, 均是弦图. 不妨设$i = 1$. 由于$[V_2 \cup A]$连通, 据据引理3知$[V_2 \cup A]$是广义树. 根据引理1, 存在节点$y \in V_2$, 使得$[N_y]$是完备图. 设$|N_y| = m$, 那么, $P_\lambda(G) = (\lambda - m) \cdot P_\lambda(G - y)$. 由性质$H_3$, 有$1 \leqslant m \leqslant k+1$. 因$y \in V(G) - V(C^*) - \{x_3', \cdots, x_{k+2}'\}$, 所以$\chi(G - y) = k + 2$. 故$(\lambda - m) | P_\lambda(G - y)$. 这导出$(\lambda - m)^2 | P_\lambda(G)$, 与$H_3$矛盾.

7. 设$|C^*| = n'$, 那么, $G \cong \theta_{n', n+k-n'}$, $\chi_{(G)} = n + k + 2 - n'$. 故$n = n'$, $G \cong \theta_{n,k}$. ■

参 考 文 献

[1] S.J.Xu and N.Z.Li, Discrete Mathematics 51(1984), 207—212.

[2] C.Y. Chao and E.G. Whitehead, Jr., Lecture Netes in Math. 642 (Springer, Berlin, 1978) pp. 121—131.

[3] R. C. Read, J. Combin. Theory 4 (1968), 52—71.
[4] C. Y. Chao, N. Z. Li and S. J. Xu, Journal of Graph Theory, Vol. 10 (1986), 129—136.
[5] 刘彦佩，图论与算法，中国科学院应用数学研究所，1981.
[6] Baatrice. Discrete Mathematics, 23 (1978), 313—316.
[7] G. L. Chia, Journal of Graph Theory, Vol. 10 (1986), 541—543.
[8] E. G. Whitehead, Jr., Journal of Graph Theory, Vol. 9 (1985), 279—284.
[9] Beatrice Loerinc and E. G. Whitehead, Jr., Journal of Combinatorial Theory, Series B. 31, 54—61 (1981).
[10] C. Y. Chao and L. C. Zhao, Discrete Mathematics, 45 (1983), 127—128.
[11] E. G. Whitehead Jr. and L. C. Zhao, J. Graph 8 (1984), 371—377.
[12] C. Y. Chao and E. G. Whitehead Jr., Discrete Math. 27 (1978), 171—177.
[13] Fanica Gavril, Journal of Combinatorial Theory (B) 16, 47—56 (1974).
[14] G. A. Dirac, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 25 (1961), 71—76.
[15] D. J. Rose, Journal of Mathematics Analysis and Applications, 32, 597—609, (1970).

On the Uniqueness of Chromatic polynomial of Generalized Wheel Graph

Dong Fengming

(Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

In this paper it is proved that the generalized wheel graph $\theta_{n,k}$ is chromatically unique if $k \geqslant 0$ and $n \geqslant 4$ is even. Meainwhile, it is also proved that for a graph G

$$P_\lambda(G) = \lambda \cdots (\lambda - q + 1)(\lambda - q)^{n-q}$$

if and only if G is a q-tree on n vertices.