第17卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 17 No. 4
1997年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1997

对称几乎可约矩阵的两个指数集*

李 毓 祁
(海南省通什市人民银行, 通什572200)

摘　要　本文完全确定出 $n(>2)$ 阶对称非本原几乎可约布尔矩阵的幂敛指数集和最大密度指数集

关键词　几乎可约, 幂敛指数, 最大密度指数, 极小强连通有向图
分类号　AMS(1991) 15A36, 05C50/CCL O151.21

1 引　言

设 $\mathbf{B}=\{0,1\}$是由两个元所成的布尔代数, 具有布尔加法: $a+b=\max\{a,b\}$, 和布尔乘法: $a\cdot b=\min\{a,b\}$, $a,b\in\mathbf{B}$, 这里在 $\mathbf{B}$ 中约定序: $0<1$. 定义在 $\mathbf{B}$ 上的矩阵称为布尔矩阵.

$n(>1)$阶布尔矩阵A 称为是可约的, 如果有 n 阶置换矩阵 P, 使得

$$PAP^T=\begin{pmatrix} B & 0 \\ D & C \end{pmatrix},$$

这里 P^T 是 P 的转置, 右上块是 $r\times(n-r)$阶零矩阵, $0<r<n$, B, C 是非空方阵. 不是可约的方阵称为不可约.

设 $\mathbf{B}_n$ 是 n 阶布尔矩阵的集合. $A\in\mathbf{B}_n$ 称为几乎可约, 如果A 是不可约的, 但若把A 的任意一个非零元素(即1)改为零, 则A 为可约.

对于任意的$A\in\mathbf{B}_n$, A 的幂序列$A, A^2, A^3, \cdots$显然构成 $\mathbf{B}_n$ 的一个有限子半群$\langle A\rangle$. 因此, 存在一个最小正整数 $k=k(A)$使得$A^k=A^{k+t}$对于某个整数 $t>0$成立. 同时存在一个最小正整数 $p=p(A)$使得$A^k=A^{k+p}$成立. 称正整数 $k=k(A)$为A 的幂敛指数, 而称正整数 $p=p(A)$为A 的周期. 记周期是 p 的 n 阶不可约布尔矩阵之集合为 $\mathbb{B}_{n,p}$.

设A 是 n 阶布尔矩阵, 在幂序列$A, A^2, A^3, \cdots$中, 各次幂A^j 中1的个数的最大值称为A 的最大密度, 记为 $\mu(A)=\max\limits_m|A^m|$, 这里用$|M|$表示布尔矩阵$M$ 中1的个数. A 的最大密度指数定义为: $h(A)=\min\{m\in\mathbf{Z}^+\mid |A^m|=\mu(A)\}$, 这里 $\mathbf{Z}^+$ 为正整数集.

熟知, 任一个 n 阶布尔矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$可以自然地对应一个 n 阶有向图$D(A)$(称为A 的伴随有向图), 其顶点集为$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, 而从顶点 v_i 到顶点 v_j 有一条弧当且仅当 $a_{ij}\neq0$. 反之, 若D 是任意一个 n 阶有向图(允许有环但不允许有重复弧), 取$A=A(D)$为D 的邻接矩阵, 则D 就是A 的伴随有向图. 因此, 在 $\mathbf{B}_n$ 和以$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$为顶点集的 n 阶有向图的集合

* 1995年2月23日收到. 1996年12月22日收到修改稿.

之间存在一一对应关系 A 是不可约布尔矩阵的充分必要条件是其伴随有向图 $D(A)$ 是强连通的 若 A 是 n 阶不可约布尔矩阵, 则 A 的周期 $p(A)$ 等于 A 的伴随有向图 $D(A)$ 中所有有向圈的圈长的最大公约数

有向图 $D(A)$ 称为极小强连通的, 如果 $D(A)$ 本身是强连通, 但任意去掉 $D(A)$ 的一条弧后就不再是强连通的 显然, A 是几乎可约布尔矩阵的充分必要条件是其伴随有向图 $D(A)$ 是极小强连通的

用 SNB_n 表示 $n(>2)$ 阶对称非本原几乎可约布尔矩阵之集合. 若 $A\in SNB_n(n>2)$, 则 A 的伴随有向图 $D(A)$ 是极小强连通二部图, 且 $D(A)$ 是对称有向图[1]. 从而 $D(A)$ 中仅有偶圈而无奇圈, 其最小圈长 $s=2$, 周期 $p(A)=2$ 因此, 集合 $SNB_n(n>2)$ 与二部图的一个特殊类——对称极小强连通二部图的集合之间存在一一对应关系 故可用图论的技巧来确定出 SNB_n 的幂敛指数集: $NK_n=\{k(A)\mid A\in SNB_n(n>2)\}$ 和最大密度指数集: $NH_n=\{h(A)\mid A\in SNB_n(n>2)\}$.

2 $\mathbf{SNB_n}$ 的幂敛指数集

对于 $A\in \mathbb{B}_n$, $1\le i,j\le n$, 记 $D(A)$ 中从顶点 v_i 到顶点 v_j 的所有途径的长之集为:

$$W_A(i,j)=\{l\in \mathbf{Z}^+\mid D(A)\text{ 中从 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 有长为 } l \text{ 的途径}\}$$

并记 $(A^l)_{ij}$ 为布尔矩阵 A^l 的 (i,j) 位置上元素之值

定义2 1 设 $A\in \mathbb{B}_{n,p}$, $1\le i,j\le n$, 局部幂敛指数 $k_A(i,j)$ 是最小整数 $k>0$ 使得 $(A^{l+p})_{ij}=(A^l)_{ij}$ (或者 $l+p\in W_A(i,j)\Leftrightarrow l\in W_A(i,j)$) 对于所有整数 $l\ge k$ 成立

显然 $k(A)=\max\limits_{1\le i,j\le n} k_A(i,j)$.

定义2 2 设 $A\in \mathbb{B}_{n,p}$, $1\le i,j\le n$, 局部量 $m_A(i,j)$ 是最小整数 $m>0$ 使得 $(A^{m+ap})_{ij}=1$ (或者 $m+ap\in W_A(i,j)$) 对于所有整数 $a\ge 0$ 成立

引理2 1[2] 若 $A\in \mathbb{B}_{n,p}$, $1\le i,j\le n$, 则 $k_A(i,j)=m_A(i,j)-p(A)+1$.

记 $d(i,j)$ 表示强连通有向图 $D(A)$ 中从顶点 v_i 到顶点 v_j 的最短路长 并记 $d(D(A))$ 为有向图 $D(A)$ 的直径 显然 $d(D(A))=\max\limits_{1\le i,j\le n} d(i,j)$.

设 $A\in SNB_n(n>2)$, 则 $D(A)$ 是对称极小强连通二部图 根据定义2 2易见: 对于任意的 $i,j\in \mathbf{Z}^+$, $1\le i,j\le n$, 有 $m_A(i,j)=d(i,j)$, 且 $m(A)=\max\limits_{1\le i,j\le n} m_A(i,j)=\max\limits_{1\le i,j\le n} d(i,j)=d(D(A))$. 显然 $1\le d(D(A))\le n-1$, 故 $1\le m(A)\le n-1$, 由引理2 1的结论可得 $1\le k(A)\le n-2$, 即 $NK_n\subseteq[1,\cdots,n-2]$, 这里 $[a,\cdots,b]$ 表示集合 $\{m\in \mathbf{Z}\mid a\le m\le b\}$, $a,b\in \mathbf{Z}$ (整数集).

为了方便表述起见, 使用如下符号: $V(D)$ 表示有向图 D 的顶点之集, $E(D)$ 表示有向图 D 的弧之集, $[i,j]$ 表示有向图 D 中顶点 v_i 与顶点 v_j 之间的双向连通边, 即表示一个2圈, $1\le i$, $j\le n$, $i\ne j$, $i,j\in \mathbf{Z}^+$.

定理2 1 无论 $n(>2)$ 是奇数还是偶数, 都有 $NK_n=[1,\cdots,n-2]$.

证明 考察下面的 n 阶有向图 $D(A)$,

$$V(D(A))=\{1,2,\cdots,n\}.$$

$$E(D(A)) = \{[1,2],[2,3],[3,4],\cdots,[k,k+1],[k+1,k+2],[k+1,k+3],$$
$$[k+1,k+4],\cdots,[k+1,n-2],[k+1,n-1],[k+1,n]\}.$$

显然$D(A)$是对称极小强连通二部图,$D(A)$的邻接矩阵$A\in SNB_n(n>2)$. $m(A)=\max\limits_{1\le i,j\le n} m_A(i,j) = m_A(1,n) = k+1$, $k(A) = m(A) - p(A) + 1 = k$, $1\le k\le n-2$, 故$NK_n = [1,\cdots,n-2]$, 证毕

3 SNB_n 的最大密度指数集

本节研究$SNB_n(n>2)$的另一个参数——最大密度指数: $h(A) = \min\{h\in \mathbf{Z}^+ \mid A^h$ 中1的个数最大$\}$. 为此, 先给出行向量$(n_1, n_2, \cdots, n_p)$的循环周期的定义: 设

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{p\times p}$$

为p阶循环矩阵, 则满足$C^j(n_1, n_2, \cdots, n_p)^{\mathrm{T}} = (n_1, n_2, \cdots, n_p)^{\mathrm{T}}$的最小正整数$j$称为行向量$(n_1, n_2, \cdots, n_p)$的循环周期, 记为$\tau(n_1, n_2, \cdots, n_p)$, 即$\tau(n_1, n_2, \cdots, n_p) = \min\{j\in \mathbf{Z}^+ \mid C^j(n_1, n_2, \cdots, n_p)^{\mathrm{T}} = (n_1, n_2, \cdots, n_p)^{\mathrm{T}}\}$, 易见必有$\tau(n_1, n_2, \cdots, n_p) \mid p$.

引理3.1[3] 假设$A\in \mathbb{B}_{n,p}$, $n\ge p>1$, 则有置换矩阵Q, 使得QAQ^T为"非本原标准形":

$$QAQ^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{p-1} \\ A_p & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}, \tag{3.1}$$

这里主对角线上的零块是方块, 块A_i是$n_i\times n_{i+1}$阶布尔矩阵, $n_i>0$, $i=1,2,\cdots,p$, 下标按模p理解, $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i = n$.

把形如(3.1)的布尔矩阵记为$A_Q = (n_1, A_1, n_2, A_2, \cdots, n_p, A_p, n_1)$, 简记为$A_Q = (A_1, A_2, \cdots, A_p)$. 设$A = (n_1, A_1, n_2, A_2, \cdots, n_p, A_p, n_1)\in \mathbb{B}_{n,p}$, 则行向量$(n_1, n_2, \cdots, n_p)$由$A$所确定, 且$\tau(n_1, n_2, \cdots, n_p) \mid p(A)$.

引理3.2[3] 设$A\in \mathbb{B}_{n,p}$, 且A具有非本原标准形$A_Q = (n_1, A_1, n_2, A_2, \cdots, n_p, A_p, n_1)$, 则

$$h(A) = \min\{m\in \mathbf{Z}^+ : m\ge k(A) \text{ 且 } \tau \mid m\} = \tau\left[\frac{k(A)}{\tau}\right].$$

这里$\tau = \tau(n_1, n_2, \cdots, n_p)$, $[x]$表示不小于x的最小整数

定理3.1 设$A\in SNB_n(n>2)$, 且A具有非本原标准形$A_Q = (n_1, A_1, n_2, A_2, n_1)$, 则

$$h(A) = \begin{cases} k(A), & n_1 = n_2. \\ 2\cdot\left[\frac{1}{2}k(A)\right], & n_1\ne n_2. \end{cases}$$

证明 $A\in SNB_n(n>2)$, $p(A)=2$, 取2阶循环矩阵为 $C=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. 若 $n_1=n_2$, 则 $\tau=1$; 若 $n_1\neq n_2$, 则 $\tau=2$. 根据引理3.2的结论本定理得证. 证毕.

定理3.1的结论说明了: $h(A)$ 可以由 $k(A)$ 直接计算得到. 根据定理2.1和定理3.1的结论易见: (i) 当 $n(>2)$ 是偶数时, $NH_n\subseteq[1,\cdots,n-2]$; (ii) 当 $n(>2)$ 是奇数时, $NH_n\subseteq[1,\cdots,n-1]$.

定理3.2 (i) 若 $n(>2)$ 是偶数, 则 $NH_n=[1,\cdots,n-2]$;

(ii) 若 $n(>2)$ 是奇数, 则 $NH_n=\{m: 2\leq m\leq n-1$ 是 $2|m\}$.

证明 (i) $n(>2)$ 是偶数的情形.

1) 若 $n=n_1+n_2$ 是偶数, 且 $n_1=n_2$, 则考察下面的有向图 $D(A)$.

$$V(D(A))=\{1,2,\cdots,n\}.$$

$$\begin{aligned}E(D(A))=\{&[1,2],[2,3],[3,4],\cdots,[h-1,h],[h,h+1],[h+1,h+2],[h,h+3],\\&[h+3,h+4],[h,h+5],[h+5,h+6],\cdots,[h,n-4],[n-4,n-3],\\&[h,n-2],[n-2,n-1],[h,n]\}.\end{aligned}$$

显然 $D(A)$ 是对称极小强连通二部图, $D(A)$ 的邻接矩阵 $A\in SNB_n(n>2)$, $m(A)=\max\limits_{1\leq i,j\leq n}m_A(i,j)=m_A(1,n-1)=h+1$, $k(A)=m(A)-p(A)+1=h$, $1\leq h\leq n-3$, 且 h 是奇数. 当 $h=n-1$ 时, $D(A)$ 变成一条路, 直接计算得:

$$m(A)=m_A(1,n)=n-1,\ k(A)=m(A)-p(A)+1=n-2$$

故 $k(A)\in\{1,3,5,7,\cdots,n-5,n-3,n-2\}=S$. $V(D(A))$ 分成两个互不相交的子集: $X=\{1,3,5,7,\cdots,n-3,n-1\}$(标号是奇数的顶点之集) 和 $Y=\{2,4,6,8,\cdots,n-2,n\}$(标号是偶数的顶点之集). $n_1=|X|=\frac{n}{2}=|Y|=n_2$, 故

$$h(A)=k(A)\in S.$$

2) 若 $n=n_1+n_2$ 是偶数, 且 $n_1\neq n_2$. 则根据定理2.1的结论及其相应的有向图 $D(A)$ 可知: $D(A)$ 是二部图, $V(D(A))=X\cup Y$, $X\cap Y=\varnothing$, $n_1=|X|\neq|Y|=n_2$, 故

$$h(A)=2\cdot\left[\frac{1}{2}k(A)\right],\ k(A)\in[1,\cdots,n-3].$$

当 $k(A)=n-2$ 时, 易见 $h(A)=k(A)=n-2$. 直接计算可得 $h(A)\in\{2,4,6,8,\cdots,n-4,n-2\}=T$.

综合1)、2) 可得: 当 $n(>2)$ 是偶数时, $NH_n=S\cup T=[1,\cdots,n-2]$.

(ii) $n(>2)$ 是奇数的情形.

若 $n=n_1+n_2$ 是奇数, 则必有 $n_1\neq n_2$. 根据定理2.1的结论及其相应的有向图 $D(A)$ 是二部图, $V(D(A))=X\cup Y$, $X\cap Y=\varnothing$, $n_1=|X|\neq|Y|=n_2$, 故

$$h(A)=2\cdot\left[\frac{1}{2}k(A)\right],\ k(A)\in[1,\cdots,n-2].$$

直接计算可得 $h(A)\in\{2,4,6,8,\cdots,n-5,n-3,n-1\}$, 即 $NH_n=\{m: 2\leq m\leq n-1$ 且 $2|m\}$, 证毕.

本文曾得到我的导师钟集教授、柳柏濂教授以及周镇海副教授的悉心指导, 在此, 表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] 邵嘉裕，对称本原矩阵的指数集，中国科学A辑，9(1986)，931-939.

[2] Shao Jiayu, Li Qiao, *The index set for the class of irreducible Boolean matrices with given period*, Linear and Multilinear Algebra, 22(1988), 285-303.

[3] 李乔、邵嘉裕，论布尔方阵的幂序列，高校应用数学学报，3:2(1988)，186-199.

Two Exponent Sets for Symmetric Imprimitive and Nearly Reducible Matrices

Li Yuqi

(The People's Bank of China, Tongshi Branch, Tongshi 572200)

Abstract

In this paper we make research on the set NK of indices of convergence and the set NH_n of indices of maximum density for the class of $n \times n$ symmetric imprimitive nearly reducible Boolean matrices. We completely determine the index set NK_n and NH_n.

Keywords nearly reducible, index of convergence, index of maximum density, minimal strongly connected digraph.