第25卷第3期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.25, No.3
2005年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)03-0489-06 **文献标识码:** A

一维 p-Laplace 耦合边值问题正解的存在性

倪小虹 [1], 葛渭高 [2]
(1. 湖州师范学院理学院数学系, 浙江 湖州 313000; 2. 北京理工大学理学院数学系, 北京 100081)
(E-mail: ni-xiaohong@sohu.com)

摘 要: 本文通过构造 Banach 空间上的算子和不动点理论研究了一维 p-Laplacian 的耦合边值问题, 得出该方程至少存在一个正解的条件.

关键词: 边值问题; 正解; 不动点.
MSC(2000): 34B15
中图分类: O175.8

1 引 言

R.P.Agarwal,O'Regan 和 P.J.Y.Wong 在文 [1] 中研究耦合边值问题

$$\begin{cases} u''+f(t,v)=0, \\ v''+g(t,u)=0, \\ \alpha_1u(0)-\beta_1u'(0)=0=\gamma_1u(1)+\delta_1u'(1), \\ \alpha_2v(0)-\beta_2v'(0)=0=\gamma_2v(1)+\delta_2v'(1), \end{cases}$$

得出至少存在一个正解的结论. 而马如云在文 [2] 中进一步讨论了 $x''+\lambda a(t)f(x(t),y(t))=0$, $y''+\lambda b(t)g(x(t),y(t))=0$, $x(0)=x(1)=y(0)=y(1)=0$ 多个非负解的存在性. 此外, 有许多数学工作者研究了 p-Laplacian 的 BVP[3,4]. 本文在 [1],[2] 的基础上将结论推广到含 p-Laplacian 的耦合 BVP:

$$\begin{cases} (\varphi_p(u'))'+f_1(t,v)=0, & (1)\\ (\varphi_p(v'))'+f_2(t,u)=0, & (2)\\ \alpha_1u(0)-\beta_1u'(0)=0=\gamma_1u(1)+\delta_1u'(1), & (3)\\ \alpha_2v(0)-\beta_2v'(0)=0=\gamma_2v(1)+\delta_2v'(1), & (4) \end{cases}$$

其中 $\varphi_p(s)=|s|^{(p-2)}s$,$p\geq 2$, $\alpha_i,\gamma_i>0$, $\beta_i,\delta_i\geq 0$, $\rho_i=\alpha_i\gamma_i+\alpha_i\delta_i+\beta_i\gamma_i>0$, $i=1,2$.

2 主要结论

记 $E=C[0,1]$, $\|w\|=\sup_{t\in[0,1]}|w(t)|$, $K=\{u\in E, u(t)\geq 0$ 且 u 是凹函数 $\}$, 则在 $E\times E$ 嵌入范数 $\|(u,v)\|_0=\max\{\|u\|,\|v\|\}$, $\forall(u,v)\in E\times E$ 构成 Banach 空间, $K\times K$ 是 $(E\times E,\|\cdot\|_0)$ 中的锥.

定理 1 设 $F_i:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续函数, $i=1,2$. 且 $\exists$ 常数 $M>0$ (不依赖于 λ), 对 $\forall\lambda\in[0,1)$, 方程

$$\begin{cases} (\varphi_p(u'))'+\lambda F_1(t,v)=0, \\ (\varphi_p(v'))'+\lambda F_2(t,u)=0 \end{cases} \qquad (5)_\lambda$$

收稿日期: 2002-12-09
基金项目: 浙江省自然科学基金 (Y604127), 浙江省教育科研基金 (20030594).

满足边界条件 (3),(4) 的任意解 $(u,v)\in K\times K$, 有 $\|(u,v)\|_0\neq M$, 则 BVP$(5)_1$,(3),(4) 存在一个解 $(u,v)\in K\times K$, 且 $\|(u,v)\|_0\leq M$.

定理 2 假设下列条件对 $i=1,2$ 均成立:

H1) $f_i:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$是连续的;

H2) $\exists\psi_i\in C([0,\infty),[0,\infty))$, 使 $f_i(t,w)\leq\psi_i(w)$, $(t,w)\in[0,1]\times[0,\infty)$ 且ψ_i在$[0,\infty)$上不减; 令

$$\psi(w)=\max_{w\geq 0}\{\psi_1(w),\psi_2(w)\},\quad m_i=\frac{\beta_i}{\alpha_i}+1.$$

H3) $\sup_{c\in(0,\infty)}\frac{c}{\varphi_p^{-1}(\psi(c))}>m_0=\max\{m_1,m_2\}$, 则 BVP(1)-(4) 有解 (u,v), 且 $u(t)>0$, $v(t)>0$, $t\in(0,1)$.

推论 1 假设定理 2 中的条件 H1) 成立, 且对 $i=1,2$ 均有

H4) $\exists\varphi_i\in L^1[0,1]$和连续、不减的函数$\varphi_i:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 满足

$$f_i(t,w)\leq\varphi_i(t)\varphi_i(w),\quad (t,w)\in[0,1]\times[0,\infty).$$

令 $\varphi(w)=\max_{w\geq 0}\{\varphi_1(w),\varphi_2(w)\}$.

H5) $\sup_{c\in(0,\infty)}\frac{c}{\varphi_p^{-1}(\varphi(c))}>m_0^*=\max\{m_1^*,m_2^*\}$,其中$m_i^*=(\frac{\beta_i}{\alpha_i}+1)\varphi_P^{-1}(\int_0^1\varphi_i(x)\mathrm{d}x)$,

则 BVP(1)-(4) 有解 $(u(t),v(t))$, 且 $u(t)>0$, $v(t)>0$, $t\in(0,1)$.

类似于定理 2 的讨论, 证明从略.

3 主要结论的证明

定义 $K\times K$ 上的算子 A_λ:

$$A_\lambda(u(t),v(t)):=(A_{1\lambda}u(t),A_{2\lambda}v(t)),$$

其中

$$(A_{1\lambda}u)(t)=\begin{cases}\frac{\beta_1}{\alpha_1}\varphi_p^{-1}(\int_0^{\sigma_1}\lambda F_1(x,v(x))\mathrm{d}x)+\int_0^t\varphi_p^{-1}(\int_s^{\sigma_1}\lambda F_1(x,v(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s, & 0\leq t\leq\sigma_1,\\ \frac{\delta_1}{\gamma_1}\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_1}^1\lambda F_1(x,v(x))\mathrm{d}x)+\int_t^1\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_1}^s\lambda F_1(x,v(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s, & \sigma_1\leq t\leq 1,\end{cases}$$

$$(A_{2\lambda}v)(t)=\begin{cases}\frac{\beta_2}{\alpha_2}\varphi_p^{-1}(\int_0^{\sigma_2}\lambda F_2(x,v(x))\mathrm{d}x)+\int_0^t\varphi_p^{-1}(\int_s^{\sigma_2}\lambda F_2(x,v(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s, & 0\leq t\leq\sigma_2,\\ \frac{\delta_2}{\gamma_2}\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_2}^1\lambda F_2(x,v(x))\mathrm{d}x)+\int_t^1\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_2}^s\lambda F_2(x,v(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s, & \sigma_2\leq t\leq 1,\end{cases}$$

σ_i 为方程 $z_0^{(i)}(\tau)=z_1^{(i)}(\tau)$ 的解 $i=1,2$. 其中 $z_0^{(i)}(\tau),z_1^{(i)}(\tau)$ 的表达式分别为

$$z_0^{(i)}(\tau):=\frac{\beta_i}{\alpha_i}\varphi_p^{-1}(\int_0^\tau\lambda F_i\mathrm{d}x)+\int_0^\tau\varphi_p^{-1}(\int_s^\tau\lambda F_i\mathrm{d}x)\mathrm{d}s$$

$$z_1^{(i)}(\tau):=\frac{\delta_i}{\gamma_i}\varphi_p^{-1}(\int_\tau^1\lambda F_i\mathrm{d}x)+\int_\tau^1\varphi_p^{-1}(\int_\tau^s\lambda F_i\mathrm{d}x)\mathrm{d}s$$

易知 $z_0^{(i)}(\tau)$ 在 $[0,1]$ 上是连续不减的, 且 $z_0^{(i)}(0)=0$; $z_1^{(i)}(\tau)$ 在 $[0,1]$ 上是连续不增的, 且 $z_1^{(i)}(1)=0$. 从而 $z_0^{(i)}(\tau)=z_1^{(i)}(\tau)$ 至少有一解. 另外, 若 $\sigma_1^{(i)},\sigma_2^{(i)}\in(0,1),\sigma_2^{(i)}>\sigma_1^{(i)}$ 都是 $z_0^{(i)}(\tau)=z_1^{(i)}(\tau)$ 的解, 则 $F_i(x,\cdot)\equiv 0$, a.e. $x\in[\sigma_1^{(i)},\sigma_1^{(i)}]$, 此时 σ_i 可为 $[\sigma_1^{(i)},\sigma_1^{(i)}]$ 中的任一个.

引理 1 算子方程 $A_\lambda(u(t),v(t))=(u(t),v(t))$ 的不动点就是 BVP$(5)_\lambda$,(3),(4) 的解.

引理 2　$A_\lambda: K\times K\to K\times K$.

证明　$\forall(u(t),v(t))\in K\times K$, 由 F_i 的非负性和连续性易知 $(A_{1\lambda}u)(t)\geq 0$, $(A_{2\lambda}v)(t)\geq 0$, $t\in[0,1]$ 且 $(A_{1\lambda}u)(t)$, $(A_{2\lambda}v)(t)\in C[0,1]$.

另外,

$$(A_{1\lambda}u)'(t)=\begin{cases}\varphi_p^{-1}(\int_t^{\sigma_1}\lambda F_1(x,v(x))\mathrm{d}x)\geq 0, & 0\leq t\leq\sigma_1,\\ -\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_1}^t\lambda F_1(x,v(x))\mathrm{d}x)\leq 0, & \sigma_1\leq t\leq 1,\end{cases}$$

$$(A_{2\lambda}v)'(t)=\begin{cases}\varphi_p^{-1}(\int_t^{\sigma_2}\lambda F_2(x,v(x))\mathrm{d}x)\geq 0, & 0\leq t\leq\sigma_2,\\ -\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_2}^t\lambda F_2(x,v(x))\mathrm{d}x)\leq 0, & \sigma_2\leq t\leq 1.\end{cases}$$

这表明 $(A_{1\lambda}u)(t),(A_{2\lambda}v)(t)$ 是凹函数，从而 $A_\lambda: K\times K\to K\times K$.

引理 3　$A_\lambda: K\times K\to K\times K$ 是紧的.

证明　设 Ω 是 $K\times K$ 中的有界集，则 $\exists M>0,\mathrm{s.t}\|(u,v)\|_0\leq M,\forall(u,v)\in\Omega$. 记 $m_i=\max\{F_i(t,w):(t,w)\in[0,1]\times[0,M]\}$, 于是当 $(u,v)\in\Omega$ 时，有

$$\begin{aligned}\|A_{1\lambda}u\|=A_{1\lambda}u(\sigma_1)&\leq\frac{\beta_1}{\alpha_1}\varphi_p^{-1}(\int_0^{\sigma_1}m_1\mathrm{d}x)+\int_0^{\sigma_1}\varphi_p^{-1}(\int_s^{\sigma_1}m_1\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\\&\leq\frac{\beta_1}{\alpha_1}\varphi_p^{-1}(m_1)+\varphi_p^{-1}(m_1):=M_1,\\ \|A_{2\lambda}v\|=A_{2\lambda}v(\sigma_2)&\leq\frac{\beta_2}{\alpha_2}\varphi_p^{-1}(\int_0^{\sigma_2}m_2\mathrm{d}x)+\int_0^{\sigma_2}\varphi_p^{-1}(\int_s^{\sigma_2}m_2\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\\&\leq\frac{\beta_2}{\alpha_2}\varphi_p^{-1}(m_2)+\varphi_p^{-1}(m_2):=M_2.\end{aligned}$$

取 $M^*=\max\{M_1,M_2\}$, 则 $\|A_\lambda(u,v)\|\leq M^*$, $\forall(u,v)\in\Omega$. 从而 A_λ 在 Ω 上是一致有界的.

下证 A_λ 是等度连续的.

不妨设 $\sigma_1<\sigma_2$, $\forall\varepsilon>0,\exists\eta=\min\{\eta_1,\eta_2\}>0$, 其中 $\eta_i=\frac{\varepsilon}{2\varphi_p^{-1}(m_i)}$, $i=1,2$. 任取 $t_1,t_2\in[0,1]$, 当 $|t_1-t_2|<\eta$ 时，$\forall(u,v)\in\Omega$ 有

1) $t_1,t_2\in[0,\sigma_1]$ 时,

$$\begin{aligned}|A_\lambda(u,v)(t_1)-A_\lambda(u,v)(t_2)|&=|((A_{1\lambda}u)(t_1)-(A_{1\lambda}u)(t_2),(A_{2\lambda}v)(t_1)-(A_{2\lambda}v)(t_2))|\\&\leq|(A_{1\lambda}u)(t_1)-(A_{1\lambda}u)(t_2)|+|(A_{2\lambda}v)(t_1)-(A_{2\lambda}v)(t_2)|\\&=\left|\int_{t_1}^{t_2}\varphi_p^{-1}(\int_s^{\sigma_1}\lambda F_1\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\right|+\left|\int_{t_1}^{t_2}\varphi_p^{-1}(\int_s^{\sigma_2}\lambda F_2\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\right|\\&\leq[\varphi_p^{-1}(m_1)+\varphi_p^{-1}(m_2)]|t_1-t_2|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

2) $t_1,t_2\in[\sigma_2,1]$ 时,

$$\begin{aligned}|A_\lambda(u,v)(t_1)-A_\lambda(u,v)(t_2)|&\leq\left|\int_{t_1}^{t_2}\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_1}^{s}\lambda F_1\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\right|+\left|\int_{t_1}^{t_2}\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_2}^{s}\lambda F_2\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\right|\\&\leq[\varphi_p^{-1}(m_1)+\varphi_p^{-1}(m_2)]|t_1-t_2|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

3) $t_1, t_2 \in [\sigma_1, \sigma_2]$ 时,

$$\begin{aligned}|A_\lambda(u,v)(t_1) - A_\lambda(u,v)(t_2)| &\le \left|\int_{t_1}^{t_2} \varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_1}^{s} \lambda F_1 \mathrm{d}x)\mathrm{d}s\right| + \left|\int_{t_1}^{t_2} \varphi_p^{-1}(\int_{s}^{\sigma_2} \lambda F_2 \mathrm{d}x)\mathrm{d}s\right| \\ &\le [\varphi_p^{-1}(m_1) + \varphi_p^{-1}(m_2)]|t_1 - t_2| < \varepsilon.\end{aligned}$$

4) $t_1 \in [0, \sigma_i], t_2 \in [\sigma_j, 1], i, j = 1, 2$ 时,

$$\begin{aligned}|A_\lambda(u,v)(t_1) - A_\lambda(u,v)(t_2)| \le &|A_\lambda(u,v)(t_1) - A_\lambda(u,v)(\sigma_i)| + |A_\lambda(u,v)(\sigma_i) - A_\lambda(u,v)(\sigma_j)| + \\ &|A_\lambda(u,v)(\sigma_j) - A_\lambda(u,v)(t_2)| \\ < &\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.\end{aligned}$$

由 1)–4) 得: A_λ 在 Ω 上是等度连续的. 再由 Arzela-Ascoli 定理知 $A_\lambda(\overline{\Omega})$ 是紧的.

引理 4 $A_\lambda : K \times K \to K \times K$ 是连续的.

证明 设 $\{(u_n(t), v_n(t)\} \subset K \times K$, 且 $(u_n(t), v_n(t)) \to (u_0(t), v_0(t))$, $n \to \infty$ 由引理 3 知 $\{A_\lambda(u_n(t), v_n(t))\}$ 在 $[0,1]$ 上是一致有界、等度连续的, 于是存在 $\{A_\lambda(u_{n_k}(t), v_{n_k}(t))\} \subset \{A_\lambda(u_n(t), v_n(t))\}$, 使

$$A_\lambda(u_{n_k}(t), v_{n_k}(t)) \to (u(t), v(t))(\text{一致}), \quad t \in [0,1], \quad k \to \infty.$$

$$(\sigma_1^{(n_k)}, \sigma_2^{(n_k)}) \to (\sigma_1, \sigma_2)(\text{一致}), \quad k \to \infty.$$

因

$$(A_{1\lambda} u_{n_k})(t) = \begin{cases} \frac{\beta_1}{\alpha_1}\varphi_p^{-1}(\int_0^{\sigma_1^{(n_k)}} \lambda F_1(x, v_{n_k}(x))\mathrm{d}x) + \int_0^t \varphi_p^{-1}(\int_s^{\sigma_1^{(n_k)}} \lambda F_1(x, v_{n_k}(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s, & 0 \le t \le \sigma_1^{(n_k)}, \\ \frac{\delta_1}{\gamma_1}\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_1^{(n_k)}}^1 \lambda F_1(x, v_{n_k}(x))\mathrm{d}x) + \int_t^1 \varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_1^{(n_k)}}^s \lambda F_1(x, v_{n_k}(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s, & \sigma_1^{(n_k)} \le t \le 1, \end{cases}$$

$\sigma_1^{(n_k)}$ 满足

$$\begin{aligned}&\frac{\beta_1}{\alpha_1}\varphi_p^{-1}(\int_0^{\sigma_1^{(n_k)}} \lambda F_1(x, v_{n_k}(x))\mathrm{d}x) + \int_0^t \varphi_p^{-1}(\int_s^{\sigma_1^{(n_k)}} \lambda F_1(x, v_{n_k}(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s \\ = &\frac{\delta_1}{\gamma_1}\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_1^{(n_k)}}^1 \lambda F_1(x, v_{n_k}(x))dx) + \int_t^1 \varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_1^{(n_k)}}^s \lambda F_1(x, v_{n_k}(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

令 $k \to \infty$, 由 Lebegus 控制收敛定理得

$$u(t) = \begin{cases} \frac{\beta_1}{\alpha_1}\varphi_p^{-1}(\int_0^{\sigma_1} \lambda F_1(x, v_0(x))\mathrm{d}x) + \int_0^t \varphi_p^{-1}(\int_s^{\sigma_1} \lambda F_1(x, v_0(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s, & 0 \le t \le \sigma_1, \\ \frac{\gamma_1}{\delta_1}\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_1}^1 \lambda F_1(x, v_0(x))\mathrm{d}x) + \int_t^1 \varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_1}^s \lambda F_1(x, v_0(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s, & \sigma_1 \le t \le 1, \end{cases}$$

且 σ_1 满足

$$\begin{aligned}&\frac{\beta_1}{\alpha_1}\varphi_p^{-1}(\int_0^{\sigma_1} \lambda F_1(x, v_0(x))\mathrm{d}x) + \int_0^{\sigma_1} \varphi_p^{-1}(\int_s^{\sigma_1} \lambda F_1(x, v_0(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s \\ = &\frac{\delta_1}{\gamma_1}\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_1}^1 \lambda F_1(x, v_0(x))\mathrm{d}x) + \int_{\sigma_1}^1 \varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_1}^s \lambda F_1(x, v_0(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

即 $u(t)=(A_{1\lambda}u_0)(t)$. 同理 $v(t)=(A_{2\lambda}v_0)(t)$, 于是有 $A_\lambda(u_0(t),v_0(t))=(u(t),v(t))$, 也即

$$A_\lambda(u_n(t),v_n(t))\to A_\lambda(u_0(t),v_0(t))\quad(n\to\infty).$$

从而 A_λ 是连续的.

定理 1 的证明 由引理 1- 引理 4 知: $A_\lambda: K\times K\to K\times K$ 是全连续的. 令 $U=\{(w_1,w_2)\in K\times K, \|(w_1,w_2)\|_0<M\}$, 则 $\forall y=(u,v)\in\partial U$, 有 $(I-A_\lambda)y\neq 0$. 由 L-S 度同伦不变性及 $(A_0)(t)\equiv 0$ 知 $\deg\{I-A_1,U,0\}=\deg\{I-A_0),U,0\}=\deg\{I,U,0\}=1$. 于是 A_1 在 U 上有不动点 (u,v), 即 BVP$(5)_1$, (3)(4) 有解 (u,v), 且 $\|(u,v)\|_0<M$.

定理 2 的证明 由 H3) 知, 可取 $M>0$, 满足 $\frac{M}{\varphi_p^{-1}(\psi(M))}>m_0$. 设 $y=(u,v)$ 是 BVP

$$\begin{cases}(\varphi_p(u'))'+\lambda f_1(t,v)=0, & 0<t<1,\\ (\varphi_p(v'))'+\lambda f_2(t,u)=0, & 0<t<1,\end{cases}\tag{6}_\lambda$$

其中 $\lambda\in[0,1)$, 具有边界条件 (3),(4) 的任意解. 则

$$u(t)=\begin{cases}\frac{\beta_1}{\alpha_1}\varphi_p^{-1}(\int_0^{\sigma_1}\lambda f_1(x,v(x))\mathrm{d}x)+\int_0^t\varphi_p^{-1}(\int_s^{\sigma_1}\lambda f_1(x,v(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s, & 0\le t\le\sigma_1,\\ \frac{\delta_1}{\gamma_1}\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_1}^1\lambda f_1(x,v(x))\mathrm{d}x)+\int_t^1\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_1}^s\lambda f_1(x,v(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s, & \sigma_1\le t\le 1,\end{cases}$$

$$v(t)=\begin{cases}\frac{\beta_2}{\alpha_2}\varphi_p^{-1}(\int_0^{\sigma_2}\lambda f_2(x,u(x))\mathrm{d}x)+\int_0^t\varphi_p^{-1}(\int_s^{\sigma_2}\lambda f_2(x,u(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s, & 0\le t\le\sigma_2,\\ \frac{\delta_2}{\gamma_2}\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_2}^1\lambda f_2(x,u(x))\mathrm{d}x)+\int_t^1\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_2}^s\lambda f_2(x,u(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s, & \sigma_2\le t\le 1,\end{cases}$$

其中 σ_1,σ_2 分别满足

$$\begin{aligned}&\frac{\beta_1}{\alpha_1}\varphi_p^{-1}(\int_0^{\sigma_1}\lambda f_1(x,v(x))\mathrm{d}x)+\int_0^{\sigma_1}\varphi_p^{-1}(\int_s^{\sigma_1}\lambda f_1(x,v(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\\ &\quad=\frac{\delta_1}{\gamma_1}\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_1}^1\lambda f_1(x,v(x))\mathrm{d}x)+\int_{\sigma_1}^1\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_1}^s\lambda f_1(x,v(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s,\\ &\frac{\beta_2}{\alpha_2}\varphi_p^{-1}(\int_0^{\sigma_2}\lambda f_2(x,u(x))\mathrm{d}x)+\int_0^{\sigma_2}\varphi_p^{-1}(\int_s^{\sigma_2}\lambda f_2(x,u(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\\ &\quad=\frac{\delta_2}{\gamma_2}\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_2}^1\lambda f_2(x,u(x))\mathrm{d}x)+\int_{\sigma_2}^1\varphi_p^{-1}(\int_{\sigma_2}^s\lambda f_2(x,u(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

又对 $\forall t\in[0,1]$ 有

$$\begin{aligned}u(t)\le u(\sigma_1)&=\frac{\beta_1}{\alpha_1}\varphi_p^{-1}(\int_0^{\sigma_1}\lambda f_1(x,v(x))\mathrm{d}x)+\int_0^{\sigma_1}\varphi_p^{-1}(\int_s^{\sigma_1}\lambda f_1(x,v(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\\ &\le\frac{\beta_1}{\alpha_1}\varphi_p^{-1}(\int_0^{\sigma_1}\psi_1(v(x))\mathrm{d}x)+\int_0^{\sigma_1}\varphi_p^{-1}(\int_s^{\sigma_1}\psi_1(v(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\\ &\le\frac{\beta_1}{\alpha_1}\varphi_p^{-1}(\int_0^{\sigma_1}\psi_1(\|v\|)\mathrm{d}x)+\int_0^{\sigma_1}\varphi_p^{-1}(\int_s^{\sigma_1}\psi_1(\|v\|)\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\\ &\le\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}+1\right)\varphi_p^{-1}(\psi_1(\|y\|_0))\\ &\le\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}+1\right)\varphi_p^{-1}(\psi(\|y\|_0))=m_1\varphi_p^{-1}(\psi(\|y\|_0)).\end{aligned}$$

同样地, $v(t)\le m_2\varphi_p^{-1}(\psi(\|y\|_0))$. 故 $\|y\|_0\le m_0\varphi_p^{-1}(\psi(\|y\|_0))$, 由 M 的选取知 $\|y\|_0\ne M$. 由定理 1 得 BVP(1)-(4) 有解 (u,v), $\|(u,v)\|_0\le M$, 且 $u(t)>0, v(t)>0$, $t\in(0,1)$.

4 一个例子

我们考虑 BVP

$$\begin{cases}(\varphi_p(u'))'+\alpha e^v=0, & 0<t<1,\\ (\varphi_p(v'))'+\alpha e^u=0, & 0<t<1,\\ u(0)=u(1)=0, & \\ v(0)=v(1)=0, & \text{其中}\ \alpha>0\end{cases}\tag{6}$$

若 $p\ge 2$, 且 $\alpha<\left(\frac{p-1}{e}\right)^{(p-1)}$, 则 BVP(6) 有解 (u,v), 且 $u(t)>0$, $v(t)>0$, $t\in(0,1)$. $f_i(t,w)=\alpha e^{(w)}$; $\psi_i(w)=\alpha e^{(w)}=\psi(w)$; $\alpha_i=\gamma_i=1$, $\beta_i=\delta_i=0$; $i=1,2$. 取 $m_0=m_1=m_2=1$, 考虑 $p\ge 2$ 时

$$\sup_{c\in(0,\infty)}\frac{c}{\varphi_p^{-1}(\psi(c))}=\sup_{c\in(0,\infty)}\frac{c}{\varphi_p^{-1}(\alpha)\varphi_p^{-1}(e^c)}.$$

当 $\alpha<\left(\frac{p-1}{e}\right)^{(p-1)}$ 时, 有 $\frac{1}{\alpha}\left(\frac{p-1}{e}\right)^{(p-1)}>1\Rightarrow\frac{1}{\alpha}\sup_{c>0}\frac{c^{(p-1)}}{e^{(p-1)}}>1$, 即 $\sup_{c>0}\frac{\varphi_p(c)}{\alpha e^c}>1$, 从而 $\sup_{c\in(0,\infty)}\frac{c}{\varphi_p^{-1}(\alpha)\varphi_p^{-1}(e^c)}>1$, 由定理 2 知结论成立.

参考文献:

[1] AGARWAL P R, O'REGAN D, WONG J Y. *Positive Solutions of Differential, Difference and Integral Equations* [M]. Singapore: Springer, 2000.

[2] MA Ru-yun. *Multiple nonnegative solutions of second-order systems of boundary value problems* [J], Nonlinear Anal., 2000, **42**: 1003–1010.

[3] 李翠哲. 微分方程边值问题解的存在性研究 [D], 2002.
LI Cui-zhe. *Existence of solutions for differential equations of boundary value problems* [D]. 2002.

[4] 蒋达清. 奇异半线性及超线性一维 p-Laplacian 方程边值问题的正解 [J]. 数学学报, 2002, **45**(4): 731–736.
JIANG Da-qing. *Positive solutions to singular semilinear and superlinear boundary value problems for the one-dimensional p-Laplacian* [J]. Acta. Math. Sinica, 2002, **45**(4): 731–736. (in Chinese)

Existence of Positive Solutions for One-Dimensional p-Laplacian Coupled Boundary Value Problem

NI Xiao-hong[1], *GE Wei-gao*[2]
(1. Dept. of Math., Huzhou Teachers' College, Zhejiang 313000, China;
2. Dept. of Appl. Math., Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: Using operators in Banach space and a fixed point theorem, we study a one-dimensional p-Laplacian coupled boundary value problem, and obtain the conditions for the existence of at least one positive solution.

Key words: boundary value problem; positive solution; fixed point.