第23卷第3期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 3
2003年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2003

关于超球级数的增长性质*

王 安 斌
(湖南理工学院数学系，湖南 岳阳 414000)

摘 要：本文给出了超球级数所定义的整函数的极大项 $\mu(a)$，中心指标 $\upsilon(a)$，极大模 $\widetilde{M}(a)$ 的增长关系及它们之间的不等式，还讨论了正规增长性.

关键词：整函数；超球级数；极大项；中心指标；正规增长.
分类号：AMS(2000) 30C45/CLC O174.52
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)03-0510-05

1 引 言

设

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP^{(\alpha,\alpha)}(z)_n,$$

这里 $P_n^{(\alpha,\alpha)}(z)$ 为 n 次超球多项式，此级数称为超球级数，对于 $\alpha=0$ 的情形文[1]得出了阶与型公式，文[2]将文[1]的结果推广到 α 为复数的情形(Re$\alpha>0$)，至今还未见到更好的结果.本文采用不同于文[1]，[2] 的新方法，建立了不等式，由此推出了比[1]，[2] 更强的结果，且给出了超球级数正规增长的充要条件.

2 引 理

为了便于证明，先给出下面几个引理

引理 1[3] 设实数 $a_1,a_2,a_2>a_1\geqslant 1$，$n$ 为正整数，则

$$e^{(n-1)(a_2-a_1)}\leqslant\frac{P_n^{(\alpha,\alpha)}(\cosh a_2)}{P_n^{(\alpha,\alpha)}(\cosh a_1)}\leqslant e^{n(a_2-a_1)}.$$

引理 2[2] 当 $a\geqslant 1$，有

$$\log\mu(a)=\log\mu(1)+\int_1^a\upsilon(x)\mathrm{d}x-\theta a,\quad \mu(a)\leqslant 2\widetilde{M}(a).$$

* 收稿日期：2000-05-29；修订日期：2003-01-17
作者简介：王安斌(1939-)，男，教授.

这里 $0<\theta<1,\widetilde{M}(a)=\max\limits_{b\in[0,2\pi]}|f(\cosh(a+bi))|$.

引理 3 设 $x>1$,则 $1-\dfrac{1}{x}<\log x$.

引理 4 设 $f(z)$ 为超越整函数,其阶和下阶分别是 ρ 和 λ,则

$$\limsup_{a\to+\infty}\frac{\log\log\widetilde{M}(a)}{a}=\rho,\quad \liminf_{a\to+\infty}\frac{\log\log\widetilde{M}(a)}{a}=\lambda.$$

阶的证明见文[2],下阶的证明类似于[1]的证明.

引理 5 设 $x>0$,则 $\dfrac{1}{1-e^{-x}}<\dfrac{1}{x}+1$.

3 主要结果

定理 1 设 $0<a<R$,且 $\mu(a)\geqslant 1$,则

$$\widetilde{M}(a)\leqslant\mu(a)\{\log\mu(R)+3\}\frac{2e^R}{e^R-e^a}.$$

证明 用 E_a 表示椭圆参数方程 $Z=\cosh(a+bi),0\leqslant b<2\pi$,则有

$$\widetilde{M}(a)=\max_{z\in E_a}|f(z)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|c_n||P_n^{(\alpha,\alpha)}(\cosh a)|. \tag{1}$$

由文[3],得

$$\max_{z\in E_a}|P_n^{(\alpha,\alpha)}(z)|\leqslant\frac{|A(n,\alpha)|}{A(n,\mathrm{Re}\alpha)}P_n^{(\mathrm{Re}\alpha,\mathrm{Re}\alpha)}(\cosh a),$$

其中 $A(n,\alpha)=\dfrac{(1+\alpha)_n\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}$. 以此代入(1),得到:当 α 为实数时,有

$$\widetilde{M}(a)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|P_n^{(\alpha,\alpha)}(\cosh a)\leqslant(\upsilon+1)\mu(a)+\sum_{k=\upsilon+1}^{\infty}|a_k|P_n^{(\alpha,\alpha)}(\cosh a)$$

$$=(\upsilon+1)\mu(a)+\mu(a)\sum_{k=\upsilon+1}^{\infty}\frac{|c_n|P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cosh\rho)P_\upsilon^{(\alpha,\alpha)}(\cosh\rho)P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cosh a)}{|c_\upsilon|P_\upsilon^{(\alpha,\alpha)}(\cosh\rho)P_\upsilon^{(\alpha,\alpha)}(\cosh a)P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cosh\rho)}. \tag{2}$$

这里取 $0<a<\rho<R,\upsilon=\upsilon(\rho)$,由极大项的定义

$$\frac{|c_k|P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cosh\rho)}{|c_\upsilon|P_\upsilon^{(\alpha,\alpha)}(\cosh\rho)}\leqslant 1,$$

以此并利用引理 1 得

$$\frac{|c_k|P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cosh\rho)P_\upsilon^{(\alpha,\alpha)}(\cosh\rho)P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cosh a)}{|c_\upsilon|P_\upsilon^{(\alpha,\alpha)}(\cosh\rho)P_\upsilon^{(\alpha,\alpha)}(\cosh a)P_k^{(\alpha,\alpha)}(\cosh\rho)}\leqslant e^{\upsilon(\rho-a)}e^{-(k-1)(\rho-a)}.$$

由此及(2)得

$$\widetilde{M}(a)\leqslant(\upsilon(\rho)+1)\mu(a)+\mu(a)\sum_{k=\upsilon+1}^{\infty}e^{-(k-\upsilon-1)}e^{-(k-1)(\rho-a)}$$

$$=\mu(a)\{\upsilon(a)+1+\frac{e^\rho}{e^\rho-e^a}\}, \tag{3}$$

又因为 $\mu(\rho)\geqslant\mu(a)\geqslant 1$,于是

$$\mu(R) \geqslant \frac{\mu(R)}{\mu(\rho)} \geqslant \frac{|a_v| P_v^{(\alpha,\alpha)}(\cosh R)}{|a_v| P_v^{(\alpha,\alpha)}(\cosh \rho)} \geqslant e^{(v-1)(R-\rho)}.$$

在引理 3 中,取 $x=e^{R-\rho}$,并利用上式得

$$(v-1)\frac{e^R-e^\rho}{e^R}=(v-1)(1-\frac{1}{e^{R-\rho}}) \leqslant (v-1)(R-\rho) \leqslant \log\mu(R). \tag{4}$$

于是有 $v(\rho) \leqslant \{\log\mu(R)+1\}\frac{e^R}{e^R-e^\rho}$. 取 ρ 满足条件 $e^R-e^\rho=e^\rho-e^a$,由上式及(3)式得

$$\widetilde{M}(a) \leqslant \mu(a)\{\log\mu(R)+3\}\frac{2e^R}{e^R-e^\rho}.$$

推论 1 如果 $v(a)>0$,则 $\widetilde{M}(a) \leqslant 2\mu(a)\{v(a+\frac{1}{v(a)}+1\}$.

证明 在(3)中选取 $\rho=a+\frac{1}{v(a)}$

$$\widetilde{M}(a) \leqslant \mu(a)\{v(a+\frac{1}{v(a)})+1+\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{v(a)}}}\}. \tag{5}$$

由引理 5 得 $\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{v(a)}}} \leqslant v(a)+1$,由此及(5)推论得证.

推论 2 设 $f(z)$ 为整函数,如果

$$\log\log\widetilde{M}(a+\sigma)=O\{\log\widetilde{M}(a)\}, \tag{6}$$

则 $\log\mu(a) \sim \log\widetilde{M}(a)$ $(a\to+\infty)$,这里 σ 是任意正数.

证明 在定理 1 中取 $R=a+\sigma$,得

$$\widetilde{M}(a) \leqslant \mu(a)\{\log\mu(a+\sigma)+3\}\frac{2e^\rho}{e^\rho-1}. \tag{7}$$

由引理 2 知

$$\log\mu(a) \leqslant \log\widetilde{M}(a)+\log 2=\log\widetilde{M}(a)+O\{\log\widetilde{M}(a)\}. \tag{8}$$

利用此式并对(7)两边取对数,得

$$\log\widetilde{M}(a) \leqslant \log\mu(a)+O\{\log\log\widetilde{M}(a)\}=\log\mu(a)+o\{\log\widetilde{M}(a)\}.$$

由此及(8)式有 $1+o(1) \leqslant \frac{\log\mu(a)}{\log\widetilde{M}(a)} \leqslant 1+o(1)$ $(a\to+\infty)$,即

$$\log\widetilde{M}(a) \sim \log\mu(a) \ (a\to+\infty).$$

注 在此推论中条件(6)不强. 例如对任何有限阶整函数(6)式皆成立.

定理 2 设 $f(z)$ 是整函数,其阶和下阶分别为 ρ 与 $\lambda(0\leqslant\lambda,\rho\leqslant+\infty)$,则

$$\limsup_{a\to+\infty}\frac{\log\log\widetilde{M}(a)}{a}=\limsup_{a\to+\infty}\frac{\log\log\mu(a)}{a}=\limsup_{a\to+\infty}\frac{\log v(a)}{a}=\rho,$$

$$\liminf_{a\to+\infty}\frac{\log\log\widetilde{M}(a)}{a}=\liminf_{a\to+\infty}\frac{\log\log\mu(a)}{a}=\liminf_{a\to+\infty}\frac{\log v(a)}{a}=\lambda.$$

证明 在此定理中上极限成立是文[2]中的结果. 下面我们只证明下极限成立.

类似引理 2 积分公式的证明方法,易得

$$\liminf_{a\to\infty}\frac{\log\log\mu(a)}{a}=\liminf_{a\to\infty}\frac{\log v(a)}{a}. \tag{9}$$

从引理 4 我们知道 $\lim\limits_{a\to\infty}\frac{\log\log\widetilde{M}(a)}{a}=\lambda$. 现设

$$\liminf_{a\to\infty}\frac{\log\upsilon(a)}{a}=\zeta. \tag{10}$$

于是我们只证明 $\zeta=\lambda$ 即可.

由于 $\mu(a)\leqslant 2\widetilde{M}(a)$，于是从(9)，(10)知

$$\zeta\leqslant\lambda. \tag{11}$$

若 $\zeta=+\infty$，则显然有 $\zeta=\lambda$. 下面恒设 $\zeta<\infty$，这是可选取 $\eta>\zeta$. 从而可取 ξ 满足 $\frac{\zeta}{\eta}<\xi<1$ 即 $\zeta<\xi\eta<\eta$. 从(10)知存在无穷上升序列 $\{r_n\}$ 使得 $\frac{\log\upsilon(r_n)}{r_n}<\xi\eta\quad(n=1,2,\cdots)$，即

$$\log\upsilon(r_n)<\xi\eta r_n. \tag{12}$$

从此及 $\log\upsilon(a)$ 上升知，当 $\xi r_n\leqslant a\leqslant r_n$ 时，$\log\upsilon(a)\leqslant\log\upsilon(r_n)\leqslant\xi\eta r_n\leqslant\eta a$，即

$$\upsilon(a)\leqslant e^{\eta a}\quad(\xi r_n\leqslant a\leqslant r_n), \tag{13}$$

选取正数 τ 满足 $\xi<\tau<1$，于是可取正数 $\beta\eta$ 满足 $\frac{\xi}{\tau}<\beta\eta<1$. 于是 $\xi<\tau\beta<\tau<1$，因而 $\xi r_n<\tau\beta r_n<\tau r_n<r_n$，由此及(13)知，当 $\tau\beta r_n\leqslant a\leqslant\tau r_n$ 时，(13)成立. 取 $\beta_n=\tau r_n$. 即当 $\beta\beta_n\leqslant a\leqslant\beta_n$ 时，

$$\upsilon(a)\leqslant e^{\eta a}. \tag{14}$$

由引理 2 中积分公式

$$\log\mu(\beta_n)=\log\mu(1)+\int_1^{\beta_n}\upsilon(x)\mathrm{d}x-\theta(\beta_n)\beta_n, \tag{15}$$

这里 $0<\theta(\beta_n)<1$. 于是由(13)，(14)及 $\upsilon(a)$ 单调增加知

$$\begin{aligned}\log\mu(\beta_n)&=\log\mu(1)+\Big[\int_1^{\beta\beta_n}+\int_{\beta\beta_n}^{\beta_n}\Big]\upsilon(x)\mathrm{d}x-\theta(\beta_n)\beta_n\\&<\log\mu(1)+\int^{\beta\beta_n}\upsilon(\beta\beta_n)\mathrm{d}x+\int_{\beta\beta_n}^{\beta_n}e^{\eta x}\mathrm{d}x\\&<\log\mu(1)+\beta\beta_n e^{\beta\eta\beta_n}+\frac{1}{\eta}e^{\eta\beta_n}=\frac{1}{\eta}e^{\eta\beta_n}\{1+O(1)\}.\end{aligned} \tag{16}$$

另一方面，由于 $\upsilon(a)$ 无界上升，即当 n 足够大时

$$\beta_n+\frac{1}{\upsilon(\beta_n)}<\frac{1}{\tau}\beta_n=r_n.$$

由此及(13)得

$$\upsilon(\beta_n+\frac{1}{\upsilon(\beta_n)})\leqslant\upsilon(r_n)\leqslant e^{r_n\eta}=e^{\frac{\eta}{\tau}\beta_n}. \tag{17}$$

在推论 1 中取 $\alpha=\beta$，并由(16)，(17)得

$$\begin{aligned}\log\widetilde{M}(\beta_n)&\leqslant\log\mu(\beta_n)+\log\upsilon(\beta_n+\frac{1}{\upsilon(\beta_n)})+O(1)\leqslant\frac{1}{\eta}e^{\eta\beta_n}\{1+o(1)\}+\frac{\eta}{\tau}\beta_n+O(1)\\&=\frac{1}{\eta}e^{\eta\beta_n}\{1+o(1)\}\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

于是 $\log\log\widetilde{M}(\beta_n)\leqslant\eta(\beta_n)+o(1)$，从而 $\lambda\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{\log\log\widetilde{M}(\beta_n)}{\beta_n}\leqslant\eta$. 由于 η 可任意接近 ζ，因而 $\lambda\leqslant\zeta$. 由此及(11)，定理 2 得证.

我们知道，有限正阶整函数若其阶等于下阶，则称为正规增长的整函数. 于是利用定理 2 可得如下推论

推论 3 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n^{(\alpha,\alpha)}(z)$ 为有限阶整函数，$f(z)$ 是正规增长的充要条件是

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\log\upsilon(a)}{a}$$

存在.

参考文献：

[1] 仪洪勋. Legendre 级数所定义整函数的极大项 [J]. 数学杂志，1983，**4**：371—374.
YI Hong-xun. *The maximal term of an entire function defined by Legendre series* [J]. Journal of Mathematics，1983，**4**：371—374. (in Chinese)

[2] 王安斌. 超球级数所定义整函数的极大项 [J]. 湖南数学年刊，1998，**18**(1)：32—34.
WANG An-bin. *The maximal term of an entire function defined by hyperspherical series* [J]. Hunan Annals of Mathematics，1998，**18**(1)：32—34. (in Chinese)

[3] WANG An-bin. *Some features of hyperspherical functions* [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics，1995，**10**(1)：24—33.

On the Growth of Hyperspherical Series

WANG An-bin

(Hunan Institute of Science and Technology，Yueyang 414000，China)

Abstract：Let $P_n^{(\alpha,\alpha)}(z)$ be n-degree hyperspherical holynomials with $0\leqslant \mathrm{Re}\alpha\leqslant\frac{1}{2}$, and $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n^{(\alpha,\alpha)}(z)$ an entire function. In this paper，some inequalities are found among $\widetilde{M}(a)=\max_{b\in[0,2\pi]}|f(a+bi)|$, maximal term $\mu(a)$ and central norm $\upsilon(a)$. It is proved that $\liminf_{a\to\infty}\frac{\log\upsilon(a)}{a}=\limsup_{a\to\infty}\frac{\log\upsilon(a)}{a}$. Moreover，a necessary and sufficient condition is given for $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n^{(\alpha,\alpha)}(z)$ to be regularly growed.

Key words：entire function；hyperspherical series；normal growth.