亚正定阵的几个开问题及一些不等式*

谢 清 明
(湘潭大学数学系, 湖南411105)

关键词 亚正定阵, k-局部对称阵, Schur 补.
分类号 AMS(1991) 15A15, 15A45/CCL O151.21

本文采用文[1], [2]的符号系统.

由[2]中定理2和定理5, 得下两定理:

定理1 设 λ, u 是两非负实数, B 是 n 阶正定实对称阵, A 是 n 阶亚正定阵, 则

$$|\lambda A+uB|^{\frac{1}{n}}\geq\lambda|A|^{\frac{1}{n}}+u|B|^{\frac{1}{n}}. \tag{1}$$

定理2 设 λ, u 是两非负实数, A 与 B 都是 n 阶亚正定阵, 且 B 的特征值全为实数, 又设 $\gamma([A,B])\leq 1$, 则(1)成立.

由定理1、定理2和算术-几何平均不等式得:

推论1 设 A, B 如定理1, q 是小于1的正实数, 则

$$|qA+(1-q)B|\geq|A|^{q}|B|^{1-q}. \tag{2}$$

推论2 设 A, B 满足定理2所设条件, q 是小于1的正实数, 则(2)成立.

显然, 推论1和推论2改进和推广了[2]中定理6和定理7.

由 Hölder 第二不等式[3]和引理1得下两定理:

定理3 设 A 是 n 阶亚正定阵, 则

$$|A|^{\frac{1}{n}}\geq|R(A)|^{\frac{1}{n}}+|S(A)|^{\frac{1}{n}}. \tag{3}$$

对 k-局部完全对称阵, 有下列结论:

定理4 设 A 是 n 阶 k-局部完全对称的亚正定阵, B 是 n 阶正定实对称阵, 则

$$|(A+B)/(A+B)_k|^{\frac{1}{n-k}}\geq|A/A_k|^{\frac{1}{n-k}}+|B/B_k|^{\frac{1}{n-k}}. \tag{4}$$

由归纳法可得:

定理5 在定理4的条件下, 且设 $A_i, B_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 分别表 A, B 的第 i 阶顺序主子阵, 则

$$|A+B|\geq|A|\Big(1+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{|B_i|}{|A_i|}\Big)+|B|\Big(1+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{|A_i|}{|B_i|}\Big)+(2^k-2k)(|A||B|)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

* 1995年3月3日收到. 1997年9月23日收到修改稿.

定理6 设A,B都是n阶亚正定k-局部完全对称阵, 则

$$\left|(A+B)/(A+B)_k\right| \geq \left|A/A_k + B/B_k\right|. \tag{6}$$

证明 设

$$A = \begin{pmatrix} A_k & A_{12} \\ A_{12}' & \widetilde{A} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_k & B_{12} \\ B_{12}' & \widetilde{B} \end{pmatrix},$$

其中$A_k' = A_k, B_k' = B_k$. 由计算得

$$\begin{aligned} M &= (A+B)/(A+B)_k - A/A_k - B/B_k \\ &= (A_{12} - A_k B_k^{-1} B_{12})'(A_k + A_k B_k^{-1} A_k)^{-1}(A_{12} - A_k B_k^{-1} B_{12}), \end{aligned}$$

又A_k, B_k都正定对称, 从而M是正定对称阵, $A/A_k, B/B_k$是亚正定阵, 故由[2]中定理3知

$$\left|(A+B)/(A+B)_k\right| = \left|M + A/A_k + B/B_k\right| \geq \left|A/A_k + B/B_k\right|.$$

定理7 设A是n阶k-局部对称亚正定阵, 且对任意实数θ, 有如下分块:

$$A = \begin{pmatrix} A_k & A_{12} \\ A_{12}' & \widetilde{A} \end{pmatrix}, \quad A_\theta \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A_k & \theta A_{12} \\ \theta A_{12}' & \widetilde{A} \end{pmatrix}.$$

则对任意$0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 1$有

$$\left|A_{\theta_2}\right| \leq \left|A_{\theta_1}\right|. \tag{7}$$

参 考 文 献

[1] 屠伯埙, 亚正定阵理论(Ⅰ), 数学学报, 4(1990), 462- 471.

[2] 屠伯埙, 亚正定阵理论(Ⅱ), 数学学报, 1(1991), 91- 102.

[3] A. W. Marshall, I Olkin, *Inequalities: Theory of Majoriazation and its applications*, Academic Press, 1979.

Several Open Problems of Subpositive Definite Matrices and Some Inequalities

Xie Qingming

(Dept. of Math., Xiangtan Univ., Hunan 411105)

Abstract

In this paper, we solve several open problems of subpositive definite matrices. Further, we obtain some matrix inequalities which improve some recent results.

Keywords subpositive definite matrix, k-locally complet symmetrix matrix, schur complement.