# 基于 Chebyshev 多项式零点的 Lagrange 插值多项式逼近的注记*

谢庭藩[1]，周颂平[2]

(1. 中国计量学院，浙江 杭州 310034；2. 宁波大学数学研究所，浙江 宁波 315211)

**摘 要**：本文通过一个例子说明了文献[3]中定理 6.9 的不完善之处，并建立了：若 $f \in C^r_{[-1,1]}$，则

$$|L_n(f,x) - f(x)| \leqslant c_r\{\omega(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n})(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n})^r\log(n+1) + \frac{1}{(n+1)^r}\omega(f^{(r)}, \frac{1}{n+1})\}.$$

**关键词**：Lagrange 插值；Chebyshev 多项式；逼近.

**分类号**：AMS(2000) 41A05,41A10/CLC number：O174.42

**文献标识码**：A **文章编号**：1000-341X(2003)01-0177-05

## 1 引 言

设 $T_n(x) = \cos((n+1)\arccos x)$ 是 Chebyshev 多项式，其零点记为

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2(n+1)}\pi \quad (k = 1,2,\cdots,n+1).$$

对于 $f \in C_{[-1,1]}$，以 $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$ 为结点组的 Lagrange 插值多项式是

$$L_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n+1} f(x_k)l_k(x),$$

其中 $l_k(x) = (-1)^{k-1}\dfrac{\sqrt{1-x_k^2}}{n+1}\dfrac{T_n(x)}{(x-x_k)}$.

在[−1,1]上用 $L_n(f,x)$ 逼近 $f(x)$ 的经典结果为

$$|L_n(f,x) - f(x)| \leqslant c\omega(f,\frac{1}{n})\log(n+1), \tag{1}$$

其中 $c$ 是与 $n,f,x$ 都无关的常数（下文均如此，但不同的地方取值可能有差异），$\omega(f,\delta)$ 是 $f(x)$ 的连续性模. 1968 年，Kis[2] 将(1) 改进为

* 收稿日期：2000-10-10

基金项目：国家自然科学基金(10141001)和浙江省自然科学基金(101009)资助项目.

作者简介：谢庭藩(1935- )，男，教授.

$$|L_n(f,x)-f(x)|\leqslant c\{\omega(f,\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1})l_n(n+1)+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\omega(f,\frac{k}{(n+1)^2})\}. \qquad (2)$$

我们知道，对于 $f\in C_{[-1,1]}$，有 $n$ 次代数多项式 $P_n(f,x)$ 满足不等式

$$|P_n(f,x)-f(x)|\leqslant c\omega(f,\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}),\quad x\in[-1,1].$$

因此，人们期望将(2)改进为

$$|L_n(f,x)-f(x)|\leqslant c\omega(f,\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2})\log(n+1). \qquad (3)$$

我们在[3](定理 6.9)中曾经公布了这个不等式，但是后来检查发现其证明不充分.

本文构造一个例子说明(3)不成立，并且说明(2)是不可改进的. 另外，对具有连续导数的函数我们建立了一个新的定理.

**定理** 设 $r\geqslant 1$ 是整数，$f\in C^r_{[-1,1]}$，则

$$|L_n(f,x)-f(x)|\leqslant c_r\{(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1})^r\omega(f^{(r)},\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1})\log(n+1)+\frac{1}{n^r}\omega(f^{(r)},\frac{1}{n})\}, \qquad (4)$$

其中 $c_r$ 是仅与 $r$ 有关的正常数.

## 2 一个例子

不妨设 $n>16$，记 $x_0=1$. 对于给定的连续模 $\omega(\delta)$，定义函数 $f_n(x)$ 如下：

$$\begin{cases} f_n(x)=\omega(x_{2k}-x), x\in[x_{2k+1},x_{2k}], k=0,1,\cdots,[\frac{n}{4}]-1, \\ f_n(-1)=0, \\ \text{其余区间上均以线性函数连接，但保持 } f_n(x) \text{ 的连续性.} \end{cases}$$

由于 $x_k-x_{k+1}<x_{k+1}-x_{k+2}$, $k=0,1,\cdots,[\frac{n}{2}]-1$，所以由连续模的性质

$$\delta\leqslant\frac{1+\delta}{\omega(1)}\omega(\delta),$$

不难推出 $\omega(f_n,\delta)\leqslant c\omega(\delta)$，而且

$$L_n(f_n,1)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{4}]-1}\omega(x_{2k}-x_{2k+1})\frac{\sqrt{1-x_{2k+1}^2}}{(n+1)(1-x_{2k+1})}.$$

但是

$$x_{2k}-x_{2k+1}=2\sin\frac{4k\pi}{2(n+1)}\sin\frac{\pi}{2(n+1)}>\frac{8k}{(n+1)^2},\quad k=1,2,\cdots,[\frac{n}{4}]-1,$$

$$\frac{\sqrt{1-x_{2k+1}^2}}{(n+1)(1-x_{2k+1})}>\frac{1}{(n+1)\sqrt{1-x_{2k+1}^2}}>\frac{2}{(4k+1)\pi},\quad k=0,1,2,\cdots,[\frac{n}{4}]-1.$$

所以

$$L_n(f_n,1)\geqslant\sum_{k=1}^{[\frac{n}{4}]-1}\omega(\frac{8k}{(n+1)^2})\frac{2}{(4k+1)\pi}\geqslant\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{[\frac{n}{4}]-1}\frac{1}{k}\omega(\frac{k}{(n+1)^2}).$$

故有正数 $c>0$ 使得 $L_n(f_n,1)\geqslant c\omega(\frac{1}{n+1})$，或者说 $|L_n(f_n,1)-f_n(1)|\geqslant c\omega(\frac{1}{n+1})$.

然而，倘若(3)成立，则应该有

$$|L_n(f_n,1)-f_n(1)|<c\omega(\frac{1}{(n+1)^2})\log(n+1),$$

这就产生矛盾. 因此(3)在一般情况下是不成立的，并且从文中的论证还可以看出，估计式(2)是不能改进的.

## 3 一个新的不等式

现在来证明 1 中所提出的定理.

由熟知的 Gopengauz 定理[1]，当 $f\in C^r_{[-1,1]}$，$n+1>r+3$ 时，有 $n$ 次代数多项式 $P_n(f,x)$ 使得

$$|f(x)-P_n(f,x)|\leqslant c_r(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n})^r\omega(f^{(r)},\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1}) \tag{5}$$

对 $x\in[-1,1]$一致成立，式中 $c_r>0$ 是仅与 $r$ 有关的常数. 显然

$$L_n(f,x)-f(x)=L_n(f-P_n(f),x)+P_n(f,x)-f(x). \tag{6}$$

由 $L_n(f,x)$的定义及(5)可得

$$|L_n(f-P_n(f),x)|\leqslant c_r\sum_{k=1}^{n+1}\omega(f^{(r)},\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{n+1})(\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{n+1})^r|l_k(x)|. \tag{7}$$

为证明定理，不妨设 $x\in(0,1)$，取 $j$ 使得

$$|x-x_j|=\min_{1\leqslant k\leqslant n}|x-x_k|.$$

因为当 $\frac{n}{8}\leqslant j\leqslant\frac{n}{2}+1$ 时，注意到(7)及关于 Chebyshev 多项式的零点为结点组的 Lebesgue 常数，(7)显然含有

$$\begin{aligned}|L_n(f-P_n(f),x)|&\leqslant c_rc\omega(f^{(r)},\frac{1}{n+1})\frac{1}{(n+1)^r}\log(n+1)\\&\leqslant c_r\omega(f^{(r)},\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1})(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1})^r\log(n+1),\end{aligned} \tag{8}$$

所以此时定理成立. 于是，我们仅要证明 $j\leqslant\frac{n}{8}$ 的情形.

利用熟知的不等式

$$l_j(x)=O(1),\quad l_k(x)=O(\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{(n+1)|x-x_k|}),$$

以及 $k<\frac{n}{2}+1$ 时 $|x-x_k|^{-1}\sim\frac{n^2}{|k+j||k-j|}$，易于得到

$$\sum_{k=[\frac{n+1}{2}]+1}^{n}\omega(f^{(r)},\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{n+1})(\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{n+1})^r|l_k(x)|$$

$$\leqslant c \sum_{k=[\frac{n+1}{2}]+1}^{n} \omega(f^{(r)}, \frac{n-k+1}{(n+1)^2}) \frac{(n-k+1)^{r+1}}{(n+1)^{2r+2}}$$

$$\leqslant c \frac{1}{(n+1)^r} \omega(f^{(r)}, \frac{1}{n+1}), \tag{9}$$

以及注意到 $r \geqslant 1$,

$$\sum_{k=2j}^{[\frac{n+1}{2}]} \omega(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x_k^2}}{n+1})(\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{n+1})^r |l_k(x)|$$

$$\leqslant c \sum_{k=2j}^{[\frac{n+1}{2}]} \omega(f^{(r)}, \frac{k}{(n+1)^2}) \frac{k^{r+1}}{n^{2r}} \frac{1}{(k+j)(k-j)}$$

$$\leqslant c\omega(f^{(r)}, \frac{1}{n+1}) \frac{1}{(n+1)^r}, \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{j-1} \omega(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x_k^2}}{n+1})(\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{n+1})^r |l_k(x)|$$

$$\leqslant c \sum_{k=1}^{j-k} \frac{1}{j-k} \omega(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x_j^2}}{n+1})(\frac{\sqrt{1-x_j^2}}{n+1})^r$$

$$\leqslant c\omega(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2})(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2})^r \log(n+1). \tag{11}$$

同理,因为 $\sqrt{1-x_{2j-1}^2} = \sin \frac{4j-3}{2(n+1)}\pi \leqslant 2\sin \frac{2j-1}{2(n+1)}\pi \leqslant c\sqrt{1-x_j^2}$, $j \leqslant \frac{n}{8}$,有

$$\sum_{k=j+1}^{2j-1} \omega(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x_k^2}}{n+1})(\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{n+1})^r |l_k(x)|$$

$$\leqslant c \sum_{k=j+1}^{2j-1} \frac{1}{k-j} \omega(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x_{2j-1}^2}}{n+1})(\frac{\sqrt{1-x_{2j-1}^2}}{n+1})^r$$

$$\leqslant c\omega(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2})(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2})^r \log(n+1). \tag{12}$$

最后注意到

$$\omega(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x_j^2}}{n+1})(\frac{\sqrt{1-x_j^2}}{n+1})^r |l_j(x)|$$

$$\leqslant c\omega(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2})(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2})^r. \tag{13}$$

综合(8)—(13)可以得到

$$|L_n(f - P_n(f), x)| \leqslant c_r \omega(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2})(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2})^r \log(n+1) + c_r \frac{1}{(n+1)^r} \omega(f^{(r)}, \frac{1}{n+1}).$$

因为 $r \geqslant 1$,从而

$$|L_n(f-P_n(f),x)| \leqslant c_r\omega(f^{(r)},\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1})(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1})^r\log(n+1)+ c_r\frac{1}{(n+1)^r}\omega(f^{(r)},\frac{1}{n+1}).$$

将此与(5),(6)相结合即得

$$|L_n(f,x)-f(x)| \leqslant c_r\omega(f^{(r)},\frac{\sqrt{1-x^2}}{n})(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n})^r\log(n+1)+c_r\frac{1}{(n+1)^r}\omega(f^{(r)},\frac{1}{n+1}).$$

**附注** 从定理的证明过程中可以看出(10)式在 $r=0$ 时成为

$$\sum_{k=2j}^{[\frac{n+1}{2}]}\omega(f,\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{n+1})|l_k(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\omega(f,\frac{k}{(n+1)^2}),$$

并注意到

$$\omega(f,\frac{1}{(n+1)^2})\log(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\omega(f,\frac{k}{(n+1)^2}),$$

故重复定理的证明,对 $r=0$ 可得 Kis 不等式(2),因此我们顺便给出了(2)的一个新证明.

**参考文献:**


[1] GOPENGAUZ I E. *A theorem of A. F. Timan on the approximation of functions by polynomials on a finite segment* [J]. Mat. Zametki, 1967, 1: 163—172. (in Russian)

[2] KIS O. *Remarks on the order of convergence of Lagrange interpolation* [J]. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math., 1968, 11: 27—40. (in Russian)

[3] 谢庭藩,周颂平. 实函数逼近论 [M]. 杭州:杭州大学出版社, 1998.
XIE Ting-fan, ZHOU Song-ping. *Approximation Theory of Real Functions* [M]. Hangzhou: Hangzhou Univ. Press, 1998.


# A Remark on the Approximation of Lagrange Interpolation Polynomials Based on the Chebyshev Nodes


XIE Ting-fan[1], ZHOU Song-ping[2]

(1. China Institute of Metrology, Hangzhou 310034, China;

2. Inst. of Math., Ningbo University, Zhejiang 315211, China)



**Abstract**: In the paper, we construct a counter example to illustrate the imperfection of Theorem 6.9 in [3]. Moreover we establish the following theorem:

If $f \in C^r_{[-1,1]}$, then

$$|L_n(f,x)-f(x)| \leqslant c_r\{\omega(f^{(r)},\frac{\sqrt{1-x^2}}{n})(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n})^r\log(n+1)+ \frac{1}{(n+1)^r}\omega(f^{(r)},\frac{1}{n+1})\}.$$



**Key words**: Lagrange interpolation; Chebyshev polynomial; approximation.