第25卷第2期 数学研究与评论 Vol.25, No.2
2005年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2005

文章编号: 1000-341X(2005)02-0311-08 **文献标识码**: A

分数次积分在加权 Herz 型 Hardy 空间的有界性

兰家诚 [1], 陆善镇 [2]
(1. 丽水学院数学系, 浙江 丽水 323000; 2. 北京师范大学数学系, 北京 100875)
(E-mail: jiachenglan@163.com)

摘 要: 讨论了具有齐性核的分数次积分算子 $T_{\Omega,\mu}$ 在加权 Herz 型 Hardy 空间的有界性, 证明 $T_{\Omega,\mu}$ 是从 $H\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p_1}(w_1,w_2^{q_1})$ 到 $\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p_2}(w_1,w_2^{q_2})$ 或 $H\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p_1}(1,w_2^{q_2})$ 到 $H\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p_2}(1,w_2^{q_2})$ 有界的.

关键词: 分数次积分; 加权 Herz 空间; Hardy 空间; L^r-Dini 条件.
MSC(2000): 42B20
中图分类: O177.6

1 引言及主要结果

设 $0<\mu<n$, S^{n-1} 为 R^n 中的单位球面, Ω 是定义在 R^n 上的零次齐次函数且 $\Omega\in L^r(S^{n-1})(r\geq 1)$, 具有齐性核的分数次积分算子 $T_{\Omega,\mu}$ 定义为

$$T_{\Omega,\mu}(f)(x)=\int_{R^n}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\mu}}f(y)\mathrm{d}y.$$

最近, 张璞 [1] 讨论算子 $T_{\Omega,\mu}$ 在 Herz 型 Hardy 空间上的有界性. 陆善镇、杨大春 [2] 引进加权 Herz 型的 Hardy 空间, 建立了它的原子分解理论, 受此启发, 本文将讨论上述算子 $T_{\Omega,\mu}$ 在加权 Herz 型 Hardy 空间上的有界性. 首先介绍若干记号和定义.

记 $B_k=\{x\in R^n:|x|\leq 2^k\}$, $C_k=B_k\backslash B_{k-1}$ 及 $\chi_k=\chi_{C_k}$, $k\in Z$, 其中 χ_{C_k} 为 C_k 的特征函数, Z 表示整数集, 并且对于 R^n 上的函数 f 和非负权函数 $w(x)$, 记

$$\|f\|_{L^q_w(R^n)}=\left(\int_{R^n}|f(x)|^q\,w(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

定义 1 设 $0<\alpha<\infty$, $0<p<\infty$, $1<q<\infty$, 以及 w_1 和 w_2 为非负权函数.

(1) 齐次加权 Herz 空间 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(w_1;w_2)$ 被定义为

$$\dot{K}_q^{\alpha,p}(w_1;w_2)=\left\{f\in L^q_{loc}(R^n\backslash\{0\},w_2):\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(w_1,w_2)}<\infty\right\},$$

其中

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(w_1,w_2)}=\left\{\sum_{k\in Z}[w_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f\chi_k\|^p_{L^q_{w_2}}\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

收稿日期: 2003-04-21
基金项目: 国家 973 项目 (G19990751), 浙江省自然科学基金 (M103069), 浙江省教育厅科研资助项目 (20021022), 浙江省重点扶植学科资助.

(2) 非齐次加权 Herz 空间 $K_q^{\alpha,p}(w_1;w_2)$ 被定义为

$$K_q^{\alpha,p}(w_1;w_2)=L_{w_2}^q(R^n)\cap \dot{K}_q^{\alpha,p}(w_1;w_2),$$

并规定

$$\| f\|_{K_q^{\alpha,p}(w_1;w_2)}=\| f\|_{L_{w_2}^q}+\| f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(w_1;w_2)}.$$

若 $w_1\equiv w_2\equiv 1$, 则 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(w_1;w_2)$ 和 $K_q^{\alpha,p}(w_1;w_2)$, 即为通常的 Herz 空间 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(R^n)$ 和 $K_q^{\alpha,p}(R^n)$.

定义 2[2] 设 $w_1,w_2\in A_1$, $0<p<\infty$, $1<q<\infty$, 且 $0<\alpha<\infty$.

(1) 伴随 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(w_1;w_2)$ 的齐次 Hardy 空间 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(w_1;w_2)$ 为

$$H\dot{K}_q^{\alpha,p}(w_1;w_2)=\left\{f\in S'(R^n):Gf\in \dot{K}_q^{\alpha,p}(w_1;w_2)\right\},$$

并规定 $\| f\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(w_1;w_2)}=\| Gf\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(w_1;w_2)}$.

(2) 伴随 $K_q^{\alpha,p}(w_1;w_2)$ 的非齐次 Hardy 空间 $HK_q^{\alpha,p}(w_1;w_2)$,

$$HK_q^{\alpha,p}(w_1;w_2)=\left\{f\in S':Gf\in K_q^{\alpha,p}(w_1;w_2)\right\},$$

并规定 $\| f\|_{HK_q^{\alpha,p}}(w_1;w_2)=\| Gf\|_{K_q^{\alpha,p}(w_1;w_2)}$, 其中 $Gf(x)$ 为 f 的 Grand 极大函数, S' 是缓增广义函数空间.

定义 3 称 Ω 满足 L^r-Dini 条件, 如果 $\Omega\in L^r(S^{n-1})$ $(r\geq 1)$ 是 R^n 上的零次齐次函数且满足 $\int_0^1\frac{\omega_r(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta<\infty$, 其中 $\omega_r(\delta)$ 表示 Ω 的 r 阶积分连续模, 定义为

$$\omega_r(\delta)=\sup_{|\rho|<\delta}\left(\int_{S^{n-1}}|\Omega(\rho x')-\Omega(x')|^r\mathrm{d}x'\right)^{\frac{1}{r}},$$

而 ρ 是 R^n 中的旋转, $|\rho|=\|\rho-I\|$.

设 $w\in L_{loc}(R^n)$ 且 $w>0$, 称 w 是一个 A_1 权函数, 记作 $w\in A_1$. 若存在一个固定常数 C, 使得 $Mw(x)\leq Cw(x)$, 这里 $Mw(x)$ 为 w 的 Hardy-Littlewood 极大函数. 当 $w\in A_1$, $j<k$ 时,

$$\frac{w(B_j)}{w(B_k)}\leq C2^{(j-k)n\delta}$$

其中 $0<\delta<1$, 当 $w\in A_1$, $j>k$ 时,

$$\frac{w(B_j)}{w(B_k)}\leq C2^{(j-k)n}.$$

我们得到以下结论.

定理 1 设 $0<\mu\leq 1$, $1<q_1<\frac{n}{\mu}$, $\frac{1}{q_2}=\frac{1}{q_1}-\frac{\mu}{n}$, $0<p_1\leq p_2<\infty$, $n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\leq\alpha<n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)+\mu$, 如果 $w_1\in A$ 和 $w_2^{q_2}\in A_1$, 且 $\Omega\in L^{q_2}(S^{n-1})$, 并满足

$$\int_0^1\frac{\omega_{q_2}(\delta)}{\delta^{1+\mu}}\mathrm{d}\delta<\infty,\qquad(1)$$

则 $T_{\Omega,\mu}$ 是从 $H\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p_1}(w_1;w_2^{q_1})$ 到 $\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p_2}(w_1;w_2^{q_2})$ 有界的.

定理 2 设 $0<\mu<n$, q_1,q_2 同定理 1,$w_1\in A_1$, $w_2^{q_2}\in A_1$,$0<p_1\le 1\le p_2<\infty$. 如果 $\Omega\in L^{q_2}(S^{n-1})$ 满足 $L^{q_2}-Dini$ 条件, 则 $T_{\Omega,\mu}$ 是从 $H\dot{K}_{q_1}^{n\left(1-\frac{1}{q_1}\right),p_2}(w_1,w_2^{q_1})$ 到 $\dot{K}_{q_2}^{n\left(1-\frac{1}{q_1}\right),p_2}(w_1,w_2^{q_2})$ 有界的.

定理 3 设 $0<\mu<1$, q_1,q_2,p_1,p_2 同定理 2. $w_1\in A_1$, $w_2^{q_2}\in A_1$, 且 $\Omega\in L^{q_2}(S^{n-1})$ 满足式 (1), 则 $T_{\Omega,\mu}$ 是从 $H\dot{K}_{q_1}^{n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)+\mu,p_1}(w_1,w_2^{q_1})$ 到 $\dot{K}_{q_2}^{n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)+\mu,p_2}(w_1,w_2^{q_2})$ 有界的.

定理 4 设 $0<\mu<\frac{1}{2}$, q_1,q_2,p_1,p_2 同定理 1. 且 $n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)<n\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\le\alpha<\infty$. 又设 $r>\frac{1}{1-2\mu}$, $r\ge q_2$, $\Omega\in L^r(S^{n-1})$, 同时 $w_2^{q_2}\in A_1$. 如果存在 v 满足 $\mu<v\le 1$ 以及 $\int_0^1\frac{\omega_r(\delta)}{\delta^{1+v}}\mathrm{d}\delta>\infty$, 则当 $n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)+\mu\le\alpha<n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)+v$ 时, $T_{\Omega,\mu}$ 是从 $H\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p_1}(1,w_2^{q_1})$ 到 $H\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p_2}(1,w_2^{q_2})$ 有界的.

2 引理及定理的证明

引理 1[4] 设 $0<\mu<n, r>1, \Omega$ 满足 L^r-Dini 条件. 如果存在常数 $a_0>0$, 使得 $|y|<a_0R$, 则

$$\left[\int_{R<|x|<2R}\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\mu}}-\frac{\Omega(x)}{|x|^{n-\mu}}\right|^r\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{r}}\le CR^{\frac{n}{r}-(n-\mu)}\left[\frac{|y|}{R}+\int_{\frac{|y|}{2R}<\delta<\frac{|y|}{R}}\frac{\omega_r(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta\right].$$

引理 2[5] 设 $0<\mu<n$, $1<q_1<\frac{n}{\mu}$, $\frac{1}{q_2}=\frac{1}{q_1}-\frac{\mu}{n}$, 且 $\Omega\in L^{q_2}(S^{n-1})$. 权函数 $w_2^{q_2}\in A_1$, 则 $\|T_{\Omega,\mu}f\|_{L^{q_2}(w_2^{q_2})}\le C\|f\|_{L^{q_1}(w_2^{q_1})}$.

定理 1 的证明 注意到，当 $p_1\le p_2$ 时，有

$$\dot{K}_q^{\alpha,p_1}(w_1,w_2)\subseteq\dot{K}_q^{\alpha,p_2}(w_1,w_2),\quad H\dot{K}_q^{\alpha,p_1}(w_1,w_2)\subseteq H\dot{K}_q^{\alpha,p_2}(w_1,w_2),$$

因此，只需要对 $p_1=p_2=p$ 来证明定理 1. 设 $f\in H\dot{K}_q^{\alpha,p_1}(w_1,w_2^{q_2})$, 由原子分解定理 [1] 可以把 f 写成

$$f(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\lambda_j a_j(x),$$

其中 a_j 为中心 $(a,q_1;w_1,w_2^{q_1})$ 原子，满足 $\|a_j\|_{L^{q_1}(w_2^{q_1})}\le(w_1(B_j))^{-\frac{\alpha}{n}}$, 且 $\mathrm{supp}a_j\subset B(0,2^k)$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p<\infty$.

记 $C_k=B_k\backslash B_{k-1}$, χ_k 为 C_k 的特征函数，注意到 $0<p_1\le p_2<\infty$. 由定义可得

$$\begin{aligned}\|T_{\Omega,\mu}(f)\|^p_{\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p}(w_1,w_2^{q_2})}\le&\sum_{k=-\infty}^{\infty}[w_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|T_{\Omega,\mu}(f)\chi_k\|^p_{L^{q_2}(w_2^{q_2})}\\ \le&C\sum_{k=-\infty}^{\infty}[w_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-1}|\lambda_j|\|T_{\Omega,\mu}(a_j)\chi_k\|_{L^{q_2}(w_2^{q_2})}\right)^p+\\ &C\sum_{k=-\infty}^{\infty}[w_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\left(\sum_{j=k}^{\infty}|\lambda_j|\|T_{\Omega,\mu}(a_j)\chi_k\|_{L^{q_2}(w_2^{q_2})}\right)^p\\ :=&CD_1+CD_2.\end{aligned}$$

对 D_1, 我们有 a_j 的消失矩条件, 由引理 1, 使用 Minkowski 不等式, 当 $j \le k-1$ 时,

$$\begin{aligned}
\| T_{\Omega,\mu}(a_j)\chi_k \|_{L^{q_2}(w_2^{q_2})} &\le \int_{B_j} |a_j(y)| \left[\int_{C_k} \left| \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\mu}} - \frac{\Omega(x)}{|x|^{n-\mu}} \right|^{q_2} \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q_2}} w_2(y)\mathrm{d}y \\
&\le C\int_{B_j} |a_j(y)|\, 2^{k\left(\frac{n}{q_2}-n+\mu\right)} \left[\frac{|y|}{2^{k-1}} + \int_{\frac{|y|}{2^k}<\delta<\frac{|y|}{2^{k-1}}} \frac{\omega_{q_2}(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta\right] w_2(y)\mathrm{d}y \\
&\le C2^{k\left(\frac{n}{q_2}-n+\mu\right)} \int_{B_j} |a_j(y)| \left[2^{j-k} + 2^{(j-k)\mu}\int_{\frac{|y|}{2^k}<\delta<\frac{|y|}{2^{k-1}}} \frac{\omega_{q_2}(\delta)}{\delta^{1+\mu}}\mathrm{d}\delta\right] w_2(y)\mathrm{d}y \\
&\le C2^{k\left(\frac{n}{q_2}-n+\mu\right)} \left(2^{j-k} + 2^{(j-k)\mu}\right) \int_{B_j} |a_j(y)|\, w_2(y)\mathrm{d}y \\
&\le C2^{k\left(\frac{n}{q_2}-n+\mu\right)} \left(2^{j-k} + 2^{(j-k)\mu}\right) \left(\int_{B_j} |a_j(y)|^{q_1} w_2^{q_1}(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q_1}} |B_j|^{\frac{1}{q_1}} \\
&\le C2^{k\left(\frac{n}{q_2}-n+\mu\right)} \left(2^{j-k} + 2^{(j-k)\mu}\right) (w_1(B_j))^{\frac{-\alpha}{n}} |B_j|^{\left(1-\frac{1}{q_1}\right)} \\
&\le C2^{k\left(\frac{n}{q_2}-n+\mu\right)} 2^{(j-k)\mu} (w_1(B_j))^{-\frac{\alpha}{n}} 2^{jn\left(1-\frac{1}{q_1}\right)},
\end{aligned}$$

从而, 将 p 分成 $0<p\le 1$ 与 $p>1$ 两种情况来讨论, 与文献 [3] 的定理 2.1 的证明类似可得

$$\begin{aligned}
D_1 &\le C\sum_{k=-\infty}^{\infty} [w_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \sum_{j=-\infty}^{k-1} |\lambda_j|^p\, 2^{p\left(\frac{n}{q_2}-n+\mu\right)k} 2^{p(j-k)\mu} [w_1(B_j)]^{\frac{-p\alpha}{n}} 2^{pjn\left(1-\frac{1}{q_1}\right)} \\
&= C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{k-1} |\lambda_j|^p\, 2^{p\left(\frac{n}{q_2}-n+\mu\right)k} 2^{p(j-k)\mu} \left[\frac{w_1(B_k)}{w_1(B_j)}\right]^{\frac{\alpha p}{n}} 2^{pjn\left(1-\frac{1}{q_1}\right)} \\
&= C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{k-1} |\lambda_j|^p\, 2^{kp\left(\frac{n}{q_1}-n\right)} 2^{p(j-k)\mu} 2^{p(k-j)\alpha} 2^{jp\left(n-\frac{n}{q_1}\right)} \\
&= C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{k-1} |\lambda_j|^p\, 2^{(k-j)p\left(\frac{n}{q_1}-n-\mu+\alpha\right)} \\
&\le C\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^p \sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{(k-j)p\left(\frac{n}{q_1}-n-\mu+\alpha\right)} \le C\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^p,
\end{aligned}$$

其中, 用到 $\frac{n}{q_2}+\mu=\frac{n}{q_1}$ 及 $\left(\frac{w_1(B_k)}{w_1(B_j)}\right)^p \le C\left(\frac{|B_k|}{|B_j|}\right)^p$, 且由 $n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\le\alpha<n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)+\mu$ 知 $\frac{n}{q_1}-n-\mu+\alpha<0$, 即 $\sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{(k-j)p\left(\frac{n}{q_1}-n-\mu+\alpha\right)}$ 收敛.

对于 D_2, 由引理 2 知, $T_{\Omega,\mu}$ 是 $L^{q_2}(w_2^{q_2})$ 到 $L^{q_1}(w_2^{q_1})$ 有界的.

$$\begin{aligned}
D_2 &\le C\sum_{k=-\infty}^{\infty} [w_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left(\sum_{j=k}^{\infty} |\lambda_j|\, \| a_j \|_{L^{q_1}(w_2^{q_1})}\right)^p \\
&\le C\sum_{k=-\infty}^{\infty} [w_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \sum_{j=k}^{\infty} |\lambda_j|^p [w_1(B_j)]^{\frac{-\alpha p}{n}} \\
&\le C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} |\lambda_j|^p\, 2^{(k-j)\alpha p}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^p \left(\sum_{k=-\infty}^{j} 2^{(k-j)\alpha p}\right)\\
&\le C\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^p .
\end{aligned}
$$

其中最后一步, 同样将 p 分成 $0<p\le 1$ 与 $p>1$ 两种情形讨论. $k-j\le 0$, 此时 $\sum_{k=-\infty}^{j} 2^{(k-j)\alpha p}$ 收敛. 综合可得

$$\| T_{\Omega,\mu}(f)\|_{\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p}(w_1,w_2^{q_2})}\le C\| f\|_{H\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p}(w_1,w_2^{q_1})}.$$

定理 2 证明　设 $\alpha=n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)$, 设 $f\in H\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p_2}(w_1,w_2^{q_1})$, 则 $f(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\lambda_j a_j(x)$, 其中 a_j 与定理 1 中的证明相同. 由于 $p_2\ge 1$, 从而

$$
\begin{aligned}
\| T_{\Omega,\mu}(f)\|_{\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p_2}(w_1,w_2^{q_2})}\le & C\sum_{k=-\infty}^{\infty}[w_1(B_k)]^{\frac{\alpha}{n}}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-1}|\lambda_j|\| T_{\Omega,\mu}(a_j)\chi_k\|_{L^{q_2}(w_2^{q_2})}\right)+\\
& C\sum_{k=-\infty}^{\infty}[w_1(B_k)]^{\frac{\alpha}{n}}\left(\sum_{j=k}^{\infty}|\lambda_j|\| T_{\Omega,\mu}(a_j)\chi_k\|_{L^{q_2}(w_2^{q_2})}\right)\\
:= & CD_1+CD_2.
\end{aligned}
$$

对于 D_1 注意到 $\alpha=n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)$ 及定理 1 的证明,

$$
\begin{aligned}
\| T_{\Omega,\mu}(a_j)\chi_k\|_{L^{q_2}(w_2^{q_2})}&\le C\int_{B_j}|a_j(y)|\,2^{k\left(\frac{n}{q_2}-n+\mu\right)}\left[\frac{|y|}{2^{k-1}}+\int_{\frac{|y|}{2^k}<\delta<\frac{|y|}{2^{k-1}}}\frac{\omega_{q_2}(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta\right]w_2(y)\mathrm{d}y\\
&\le C2^{k\left(\frac{n}{q_2}-n+\mu\right)}2^{(j-k)\mu}[w(B_j)]^{\frac{-\alpha}{n}}|B_j|^{1-\frac{1}{q_1}},
\end{aligned}
$$

其中利用到 Hölder 不等式, 从而

$$
\begin{aligned}
D_1&\le C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{k-1}2^{k\left(\frac{n}{q_1}-n\right)}2^{(j-k)\mu}\left(\frac{|B_k|}{|B_j|}\right)^{\frac{\alpha}{n}}|B_j|^{\frac{\alpha}{n}}|\lambda_j|\\
&=C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{k-1}2^{-\alpha k}2^{(j-k)\mu}2^{k\alpha}|\lambda_j|\\
&=C\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=j+1}^{\infty}2^{(j-k)\mu}\right)|\lambda_j|=C\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|.
\end{aligned}
$$

与定理 1 证明类似, 可以得到 $D_2\le C\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|$.

由 $0<p_1\le 1$, 综合有

$$\| T_{\Omega,\mu}(f)\|_{\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p_2}(w_1,w_2^{q_2})}\le C\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|\le C\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^{p_1}\right]^{\frac{1}{p_1}}.$$

定理 3 的证明与定理 2 完全相似，这里省略.

定理 4 的证明 设 $f(x)$ 是一个中心 $(\alpha, q_1; 1, \omega_2^{q_1})$ 原子，满足

(1) $\operatorname{supp} f(x) \subset B_j$;

(2) $\| f \|_{L^{q_1}(w_2^{q_1})} \leq | B_j |^{\frac{-\alpha}{n}}$;

(3) $\int f(x) x^\beta \mathrm{d}x = 0, | \beta | \leq S_1 = \left[\alpha + n\left(\frac{1}{q_1} - 1\right)\right]$.

由文献 [3] 中关于 Herz 型 Hardy 空间的原子分子理论知，只要证明 $T_{\Omega,\mu}(f)$ 是中心

$$(\alpha, q_2; S_2, \varepsilon)_{j, w_2^{q_2}}$$

分子，即

(4) $\| T_{\Omega,\mu}(f) \|_{L^{q_2}(w_2^{q_2})} \leq C \mid B_j |^{\frac{-\alpha}{n}}$;

(5) $R_{q_2,j,w^{q_2}}(T_{\Omega,\mu}(f)) \equiv \| T_{\Omega,\mu}(f) \|_{L^{q_2}(w_2^{q_2})}^{\frac{a}{b}} \|| x |^{nb} T_{\Omega,\mu}(f) \|_{L^{q_2}(w_2^{q_2})}^{1-\frac{a}{b}} \leq C < \infty$;

(6) $\int T_{\Omega,\mu}(f)(x) x^\beta \mathrm{d}x = 0, | \beta | \leq S_2 = \left[\alpha + n\left(\frac{1}{q_2} - 1\right)\right]$,

其中 $\varepsilon > \max\left\{\frac{s_2}{n}, \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q_2} - 1\right\}$, $a = 1 - \frac{1}{q_2} - \frac{\alpha}{n} + \varepsilon$, $b = 1 - \frac{1}{q_2} + \varepsilon$, 且常数 C 与 $f(x)$ 无关.

注意到在定理 4 的条件下有 $S_1 = \left[\alpha + n\left(\frac{1}{q_1} - 1\right)\right] = 0$, $S_2 = 0$, 并且存在 ε 使得

$$\max\left\{\frac{S_2}{n}, \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q_2} - 1\right\} < \varepsilon < \frac{v - \mu}{n}.$$

以 d 表示 B_j 的半径，即 $d = 2^j$, 对于 (4), 由 $T_{\Omega,\mu}$ 是 $L^{q_1}(w_2^{q_1})$ 到 $L^{q_2}(w_2^{q_2})$ 有界的，从而

$$\| T_{\Omega,\mu}(f) \|_{L^{q_2}(w_2^{q_2})} \leq C \| f \|_{L^{q_1}(w_2^{q_1})} \leq C \mid B_j |^{\frac{-\alpha}{n}} = C d^{-\alpha}.$$

下面验证 $T_{\Omega,\mu}(f)$ 满足条件 (5).

$$\begin{aligned} \|| x |^{nb} T_{\Omega,\mu}(f)(x) \|^{\frac{a}{b}}_{L^{q_2}(w_2^{q_2})} \leq{}& C\left[\int_{|x| \leq 2d} | T_{\Omega,\mu}(f) |^{q_2} | x |^{nbq_2} w_2^{q_2} \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q_2}} + \\ & C\left[\int_{|x| > 2d} | T_{\Omega,\mu}(f)(x) |^{q_2} | x |^{nbq_2} w_2^{q_2} \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q_2}} \\ :={}& CD_1 + CD_2. \end{aligned}$$

而对 D_1, 则由 $T_{\Omega,\mu}$ 的 $(L^{q_1}(w_2^{q_1}), L^{q_2}(w_2^{q_2}))$ 有界性，有

$$\begin{aligned} D_1 &\leq C d^{nb}\left[\int_{|x| \leq 2d} | T_{\Omega,\mu}(f)(x) |^{q_2} w_2^{q_2} \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q_2}} \\ &\leq C d^{nb} \| f \|_{L^{q_1}(w_2^{q_1})} \leq C d^{nb-\alpha}. \end{aligned}$$

对于 D_2, 由原子 f 的消失矩条件，有

$$D_2 \leq C\left[\int_{|x| > 2d}\left[\int_{B_j} \left| \frac{\Omega(x-y)}{| x - y |^{n-\mu}} - \frac{\Omega(x)}{| x |^{n-\mu}} \right| | f(y) | \mathrm{d}y\right]^{q_2} | x |^{nbq_2} w_2^{q_2} \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q_2}}$$

$$\le C\int_{B_j}|f(y)|\left[\sum_{i=1}^{\infty}\int_{2^id<|x|\le 2^{i+1}d}\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\mu}}-\frac{\Omega(x)}{|x|^{n-\mu}}\right|^{q_2}|x|^{nbq_2}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q_2}}w_2\mathrm{d}y$$

$$\le C\int_{B_j}|f(y)|w_2\sum_{i=1}^{\infty}\left(2^id\right)^{nb}A_i(y)\mathrm{d}y.$$

由于 $q_2\le r$, 由 Hölder 不等式和引理 2, 不难得到

$$A_i(y)\le C\left[\int_{2^id<|x|\le 2^{i+1}d}\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\mu}}-\frac{\Omega(x)}{|x|^{n-\mu}}\right|^{r}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{r}}\left(2^id\right)^{n\left(1-\frac{q_2}{r}\right)\frac{1}{q_2}}$$

$$\le Cd^{\frac{n}{q_2}-n+\mu}2^{i\left(\frac{n}{q_2}-n+\mu-v\right)}.$$

将上式代入 D_2, 并注意到 $b=1-\frac{1}{q_2}+\varepsilon$ 和 $\varepsilon<\frac{v-\mu}{n}$, 有

$$D_2\le Cd^{\frac{n}{q_2}-n+\mu+nb}|B_j|^{1-\frac{1}{q_1}}\|f\|_{L^{q_1}\left(w_2^{q_1}\right)}\sum_{i=1}^{\infty}2^{i\left(\frac{n}{q_2}-n+\mu-v+nb\right)}$$

$$\le Cd^{nb-\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}2^{i(n\varepsilon+\mu-v)}\le Cd^{nb-\alpha}.$$

综合 D_1 和 D_2 可得

$$\||x|^{nb}T_{\Omega,\mu}(f)(x)\|_{L^{q_2}\left(w_2^{q_2}\right)}\le Cd^{nb-\alpha},$$

再由 $n(b-a)=\alpha$ 及 (4) 有

$$R_{q_2,j,w^{q_2}}\left(T_{\Omega,\mu}(f)\right)\le C\left(d^{-a}\right)^{\frac{a}{b}}\left(d^{nb-\alpha}\right)^{1-\frac{a}{b}}=C.$$

即为 (5) 式.

而 (6) 式则在条件 $0<\mu<\frac{1}{2},\Omega\in L^r\left(S^{n-1}\right), r>\frac{1}{1-2\mu}$ 时，与重复文献 [4] 中定理 3 相应部分便可得证.

注 1. 上述定理 1 至定理 4 的结论对相应的非齐次情形也成立.

2. 在采用与定理 1 证明相同的方法，适当改变 Ω 的条件，即 $\Omega\in L^{q_2}\left(S^{n-1}\right)$, 我们可以将 μ 的范围扩大为 $0<\mu<n$, 即可得到如下结论.

推论 设 $0<\mu<n, p_1, p_2, q_1, q_2$ 同定理 1, $w_1\in A_1$, $w_2^{q_2}\in A_1$, 并且 $n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\le\alpha<n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)+1$, $\Omega\in L^{q_2}\left(S^{n-1}\right)$, 满足 $\int_0^1\frac{\omega_{q_2}(\delta)}{\delta^2}<\infty$, 则 $T_{\Omega,\mu}$ 是从 $H\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p_1}\left(w_1,w_2^{q_1}\right)$ 到 $\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p_2}\left(w_1,w_2^{q_2}\right)$ 有界的.

参考文献:

[1] ZHANG Pu. *Some problems related to the fractional integrals and the Marcinkiewicz integrals* [D]. Thesis for Ph. D. at Beijing Normal University, 2001. (in Chinese).

[2] LU Shan-zhen, YANG Da-chun. *The weighted Herz-type Hardy space and its applications* [J]. Sci. China Ser.A, 1995, **38**(6): 235–245.

[3] LU Shan-zhen, YANG Da-chun. *Hardy-Littlewood-Soboler theorems of fractional integration on Herz-type spaces and its applications* [J]. Canad. J. Math., 1996, **48**(2): 363–380.
[4] DING Yong, LU Shan-zhen. *Homogeneous fractional integrals on Hardy spaces* [J]. Tohoku Math. J., 2000, **52**(1): 153–162.
[5] DING Yong, LU Shan-zhen. *Weighted norm inequalities for fractional integral operators with rough kernel* [J]. Canadian J. Math., 1998, **50**(1): 29–39.
[6] LU Shan-zhen, YANG Da-chun. *The decomposition of weighted Herz space on R^n and its applications* [J]. Sci. China Ser.A, 1995, **38**(2): 147–158.

Boundedness of Some Fractional Integral Operators on Weighted Herz Type Hardy Spaces

LAN Jia-cheng[1], *LU Shan-zhen*[2]
(1. Dept. of Math., Lishui University, Zhejiang 323000, China;
2. Dept. of Math., Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: We discuss that boundedness of some fractional integral operators with homogeneous kernel, and prove that $T_{\Omega,\mu}$ is bounded from $H\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p_1}(w_1, w_2^{q_1})$ into $\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p_2}(w_1, w_2^{q_1})$ and from $H\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p_1}(1, w_2^{q_2})$ into $H\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p_2}(1, w_2^{q_2})$.

Key words: fractional integral; weighted Herz spaces; Hardy space; L^r-Dini conditions.