第24卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 24 No. 1
2004年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 2004

A-调和方程障碍问题的很弱解 *

高红亚[1]，　王　岷[2]，　赵洪亮[3]

(1. 河北大学数学与计算机学院，河北 保定 071002；
2. 河北大学机械与建筑工程学院，河北 保定 071002；
3. 河北理工大学数理系，河北 唐山 063000)

摘　要：本文给出 A-调和方程障碍问题很弱解的定义. 使用 Hodge 分解等工具，得到其局部与整体高阶可积性.

关键词：A-调和方程；障碍问题；很弱解；Hodge 分解；逆 Hölder 不等式.
分类号：AMS(2000) 35J85/CLC number：O175.23
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2004)01-0159-09

1　引言及结果叙述

设 Ω 为 $R^n(n\geqslant 2)$ 中的有界正则区域. 所谓正则区域是指使 Hodge 分解的估计式(4)，(5)成立的区域. 例如，Lipschitz 区域为正则区域. 考虑如下的二阶拟线性散度型椭圆方程

$$\operatorname{div} A(x,\nabla u(x))=0, \tag{1}$$

其中 $A:\Omega\times R^n\to R^n$ 满足通常的可测性条件(Carathéodory 条件)，映射 $x\to A(x,\xi)$ 对所有 $\xi\in R^n$ 可测，映射 $\xi\to A(x,\xi)$ 对几乎所有 $x\in R^n$ 连续；并且对 $1<p<\infty$，$0<\alpha\leqslant\beta<\infty$ 和几乎所有的 $x\in\Omega$ 与 $\xi\in R^n$，有

(i) $\langle A(x,\xi),\xi\rangle\geqslant\alpha|\xi|^p$；

(ii) $|A(x,\xi)|\leqslant\beta|\xi|^{p-1}$.

注 1　满足上述条件的方程(1)的一个重要的特殊情形为如下的 p-调和方程

$$\operatorname{div}(|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x))=0.$$

设函数 $\psi:\Omega\to R\cup\{\pm\infty\}$ 可测，$\theta\in W^{1,p}(\Omega)$. 令

$$K^p_{\psi,\theta}(\Omega)=\{v\in W^{1,p}(\Omega):v\geqslant\psi,\text{a.e.},\ v-\theta\in W^{1,p}_0(\Omega)\}$$

定义 1　函数 $u\in K^p_{\psi,\theta}(\Omega)$ 称为 $K^p_{\psi,\theta}(\Omega)$-障碍问题的弱解，如果对任意 $v\in K^p_{\psi,\theta}(\Omega)$，有

$$\int_\Omega\langle A(x,\nabla u),\nabla(v-u)\rangle\mathrm{d}x=0, \tag{2}$$

其中 θ 称为边值，ψ 称为障碍.

* 收稿日期：2001-03-12
作者简介：高红亚(1969-)，博士，副教授.

关于 $K^p_{\psi,\theta}(\Omega)$-障碍问题弱解的若干性质参见[2].

下面给出 A-调和方程障碍问题很弱解的定义. 我们假设 $\theta\in W^{1,r}(\Omega)$, $\max\{1,p-1\}<r\leqslant p$. 引入集合

$$K^r_{\psi,\theta}(\Omega)=\{v\in W^{1,r}(\Omega):v\geqslant\psi,\text{a.e.},\ v-\theta\in W^{1,r}_0(\Omega)\}.$$

对任意 $u,v\in W^{1,r}(\Omega)$, 引入关于 $|\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u)\in L^{r/(r-p+1)}(\Omega)$ 的 Hodge 分解, 参见[3],

$$|\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u)=\nabla\varphi_{v,u}+h_{v,u},\tag{3}$$

其中 $\varphi_{v,u}\in W^{1,r/(r-p+1)}(\Omega)$, 且 $h_{v,u}\in L^{r/(r-p+1)}(\Omega)$ 是散度为零的(divergence free)向量场, 并满足下面的估计式

$$\|\nabla\varphi_{v,u}\|_{r/(r-p+1)}\leqslant C\|\nabla(v-u)\|_r^{r-p+1},\tag{4}$$

$$\|h_{v,u}\|_{r/(r-p+1)}\leqslant C(p-r)\|\nabla(v-u)\|_r^{r-p+1}.\tag{5}$$

定义 2 函数 $u\in K^r_{\psi,\theta}(\Omega)$ 称为 $K^r_{\psi,\theta}(\Omega)$-障碍问题的很弱解, 如果对任意 $v\in K^r_{\psi,\theta}(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega\langle A(x,\nabla u),|\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u)\rangle\mathrm{d}x\geqslant\int_\Omega\langle A(x,\nabla u),h_{v,u}\rangle\mathrm{d}x,\tag{6}$$

其中 $h_{v,u}$ 出自 Hodge 分解(3).

上面定义中"很弱解"的含义是指 u 的 Sobolev 可积指数 r 可以小于弱解的 Sobolev 可积指数 p. 显然, 从 Hodge 分解得知, $|\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u)-h_{v,u}=\nabla\varphi_{v,u}$ 为梯度形式. 若 $r=p$, 则由 Hodge 分解的唯一性得知 $h_{v,u}=0$, 此时定义 2 与定义 1 一致.

定义了 A-调和方程障碍问题的很弱解之后, 一个自然的问题是: 它作为 A-调和方程障碍问题弱解的推广, 是否保持了弱解的一些性质? 下面的定理回答了这个问题.

定理 1 设 $K^r_{\psi,\theta}(\Omega)$ 非空, 则存在 $r_0\in(p-1,p)$, 使得对任意 $K^r_{\psi,\theta}(\Omega)$-障碍问题的很弱解 u 以及任意的 $v\in K^r_{\psi,\theta}(\Omega)$, 只要 $r>r_0$, 便有

$$\int_\Omega|\nabla u|^r\mathrm{d}x\leqslant C\int_\Omega|\nabla v|^r\mathrm{d}x,$$

其中 $C=C(n,p,r_0,\frac{\beta}{\alpha})$.

上述定理表明: 当 $r>r_0$ 时, 在所有与 u 有相同的边界值 θ, 并且以 ψ 为障碍的函数中, 在相差一个常数因子 C 不计的情况下, u 具有最小的 r-Dirichlet 积分, 即 u 具有最小的能量. 这当 $r=p$ 时与经典的结论一致, 参见[2].

A-调和方程(1)弱解的高阶可积性结果最早是由 Meyers 和 Elcrat[4] 考虑的. A-调和方程障碍问题弱解的存在唯一性结果已被[2]得到. 一个引人注意的结果是 1994 年李工宝和 O. Martio[1] 得到的 A-调和方程障碍问题弱解的局部与整体高阶可积性结果. 近年来关于 A-调和方程很弱解的正则性理论开始引起人们的注意并得到研究[3]. 但关于 A-调和方程障碍问题很弱解的定义以及局部与整体高阶可积性仍未考虑. 本文将[1]的结果推广到 A-调和方程障碍问题的很弱解.

在研究整体高阶可积性时, 我们需要关于区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的正则性条件, 见[1, P26]. 称 $\partial\Omega$ 为 r-Poincaré 厚的, 如果存在 $\gamma<\infty$, 使得对所有立方体 $Q(R)\subset R^n$, $R>0$, 当 $u\in W^{1,r}(\Omega)$, $u=0$ 在 $(R^n-\Omega)\cap Q(2R)$, 并且 $Q(\frac{3}{2}R)\cap C\Omega\neq\varphi$(其中 $C\Omega=R^n-\overline{\Omega}$)时, 有

$$(\int_{Q(2R)}|u|^r\mathrm{d}x)^{1/r}\leqslant\gamma(\int_{Q(2R)}|\nabla u|^{rn/(r+n)}\mathrm{d}x)^{(r+n)/rn}.$$

下面的引理出自[5,第五章,命题 1.2],它建立了一个逆 Hölder 不等式与局部可积性之间的关系.

引理 设 $0<R<R_0\leqslant \mathrm{dist}(x_0,\partial\Omega)$, $\forall\, x_0\in\Omega$. 如果对于函数 $g(x)\in L^r(B_R)$, $1<r<\infty$, $h(x)\in L^t(B_R)$, $t>r$, 有如下的逆 Hölder 不等式成立

$$\overline{\int}_{B_{R/2}}|g(x)|^r\mathrm{d}x\leqslant\tau\overline{\int}_{B_R}|g(x)|^r\mathrm{d}x+C(\overline{\int}_{B_R}|g(x)|^s\mathrm{d}x)^{r/s}+\overline{\int}_{B_R}|h(x)|^r\mathrm{d}x,$$

这里 $1\leqslant s<r$, $0\leqslant\theta<1$, $\overline{\int}_{B_R}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}f(x)\mathrm{d}x$. 则一定存在指数 $r'=r'(\theta,p,n,C)>r$, 使得 $g(x)\in L^{r'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$; 并且下式成立

$$(\overline{\int}_{B_{R/2}}|g(x)|^{r'}\mathrm{d}x)^{1/r'}\leqslant C_1\{(\overline{\int}_{B_R}|g(x)|^r\mathrm{d}x)^{1/r}+(\overline{\int}_{B_R}|h(x)|^{r'}\mathrm{d}x)^{1/r'}\},\tag{7}$$

这里的 C_1 仅依赖于 n,C,r,θ,R_0.

本文的主要结果为下面的两个定理,它们推广了文[1]之结果.

定理 2 存在 $r_1\in(p-1,p)$,使得当 $r_1<r\leqslant p$ 时,对任意 $\psi\in W^{1,s}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $s>r$,以及任意 $K^r_{\psi,\theta}(\Omega)$-障碍问题的很弱解 u,都存在 $q>r$,使得 $u\in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

定理 3 假设 Ω 为有界正则区域,其边界为 r-Poincaré 厚的, $r\geqslant n/(n-1)$. 存在 $r_2\in(p-1,p)$,使得当 $r_2<r\leqslant p$ 时,对任意 $\theta,\psi\in W^{1,s}(\Omega)$, $s>r$,以及任意 $K^r_{\psi,\theta}$-障碍问题的很弱解 u,都存在 $q>r$,使得 $u\in W^{1,q}(\Omega)$.

注 2 显然,定理 2 与定理 3 中 $r=p$ 时即为[1]中的定理 A 与定理 B.

2 定理 1,定理 2,定理 3 的证明

定理 1 的证明 设 u 为 $K^r_{\psi,\theta}$-障碍问题的很弱解. 对任意 $v\in K^r_{\psi,\theta}(\Omega)$,令

$$E(v,u)=|\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u)+|\nabla u|^{r-p}\nabla u,\tag{8}$$

则由一个基本的关系式[6,P271,(4.1)式]

$$\||X|^{-\varepsilon}X-|Y|^{-\varepsilon}Y|\leqslant 2^{\varepsilon}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}|X-Y|^{1-\varepsilon},\quad 0\leqslant\varepsilon<1\tag{9}$$

得到

$$|E(v,u)|\leqslant 2^{p-r}\frac{p-r+1}{r-p+1}|\nabla v|^{r-p+1}.\tag{10}$$

于是由(8)式得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\langle A(x,\nabla u),|\nabla u|^{r-p}\nabla u\rangle\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega\langle A(x,\nabla u),E(v,u)\rangle\mathrm{d}x-\int_\Omega\langle A(x,\nabla u),|\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u)\rangle\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{11}$$

再由 $K^r_{\psi,\theta}(\Omega)$-障碍问题很弱解的定义式(6)、条件(i),(ii)以及(5)式可得

$$\alpha\int_\Omega|\nabla u|^r\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega\langle A(x,\nabla u),|\nabla u|^{r-p}\nabla u\rangle\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \beta 2^{p-r}\frac{p-r+1}{r-p+1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla v|^{r-p+1}\mathrm{d}x - \int_\Omega \langle A(x,\nabla u), h_{v,u}\rangle \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \beta 2^{p-r}\frac{p-r+1}{r-p+1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla v|^{r-p+1}\mathrm{d}x + \beta\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|h_{v,u}|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \beta 2^{p-r}\frac{p-r+1}{r-p+1}\|\nabla u\|_r^{p-1}\|\nabla v\|_r^{r-p+1} +$$

$$C\beta(p-r)\|\nabla u\|_r^{p-1}(\|\nabla u\|_r^{r-p+1} + \|\nabla v\|_r^{r-p+1}).$$

于是利用 Young 不等式

$$ab \leqslant \varepsilon a^{p'} + C(\varepsilon,p)b^p,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\quad a,b\geqslant 0, \varepsilon>0, p>1$$

得

$$\int_\Omega |\nabla u|^r \mathrm{d}x \leqslant C\|\nabla u\|_r^{p-1}\|\nabla v\|_r^{p-1} + C(p-r)\|\nabla u\|_r^r$$

$$\leqslant C\varepsilon\|\nabla u\|_r^r + C\|\nabla v\|_r^r + C(p-r)\|\nabla u\|_r^r,$$

其中 $C=C(n,p,r,\frac{\beta}{\alpha})$. 取 r_0 满足 $C(p-r_0)=1$,则当 $r_0<r$ 时,$C(p-r)=\tau_1<1$. 再取 ε 充分小,使得 $C\varepsilon+\tau_1=\tau<1$,此时便有

$$\int_\Omega |\nabla u|^r \mathrm{d}x \leqslant C\int_\Omega |\nabla v|^r \mathrm{d}x.$$

定理 2 的证明　设 u 为 $K^r_{\psi,\theta}(\Omega)$-障碍问题的很弱解,$Q(2R)\subset\Omega$ 为一立方体. 取截断函数 $\varphi\in C_0^\infty(Q(2R))$,使得 $0\leqslant\varphi\leqslant 1$,$|\nabla\varphi|\leqslant\frac{C(n)}{R}$,并且当 $x\in Q(R)$ 时 $\varphi\equiv 1$. 考虑函数

$$v = u - C_u - \varphi^r(u - C_u - (\psi - C_\psi)),$$

这里 C_u 与 C_ψ 分别表示 u 和 ψ 在 $Q(2R)$ 上的积分平均. 因为 $v-(\theta-C_u)\in W_0^{1,r}(\Omega)$,并且由 $u\geqslant\psi$,得到 $C_u\geqslant C_\psi$,于是几乎处处在 Ω 上,有

$$v = (1-\varphi^r)(u-C_u) + \varphi^r(\psi - C_\psi) \geqslant (1-\varphi^r)(u-C_u) + \varphi^r(\psi - C_u)$$

$$\geqslant (1-\varphi^r)(\psi - C_u) + \varphi^r(\psi - C_u) = \psi - C_u,$$

因此 $v\in K^r_{\psi-C_u,\theta-C_u}(\Omega)$. 又

$$\nabla v = (1-\varphi^r)\nabla(u-C_u) + \varphi^r\nabla(\psi - C_\psi) + r\varphi^{r-1}\nabla\varphi((\psi-C_\psi)-(u-C_u))$$

令

$$E_1(v,u) = |X_1|^{-\varepsilon}X_1 + |Y_1|^{-\varepsilon}Y_1, \tag{12}$$

其中

$$\varepsilon = p-r,\ X_1 = \varphi^r\nabla u,$$

$$Y_1 = \nabla v - \nabla u = -\varphi^r\nabla u + \varphi^r\nabla\psi + r\varphi^{r-1}\nabla\varphi((\psi - C_\psi) - (u - C_u)).$$

由基本不等式(9)得到

$$|E_1(v,u)| \leqslant \frac{2^\varepsilon(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}|X_1+Y_1|^{1-\varepsilon}$$

$$= \frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}|\varphi^r\nabla\psi + r\varphi^{r-1}\nabla\varphi((\psi-C_\psi)-(u-C_u))|^{r-p+1}.$$

因为 $u-C_u$ 为 $K^r_{\psi-C_u,\theta-C_u}$-障碍问题的很弱解,于是由(12)式以及关于 $\nabla u-\nabla v$ 的 Hodge 分解

及其估计式(4),(5)得到

$$\int_{\Omega}\langle A(x,\nabla u),|\phi\nabla u|^{r-p}\phi\nabla u\rangle dx=\int_{Q(2R)}\langle A(x,\nabla u),|\phi\nabla u|^{r-p}\phi\nabla u\rangle dx$$

$$=\int_{Q(2R)}\langle A(x,\nabla u),E_1(v,u)\rangle dx-\int_{Q(2R)}\langle A(x,\nabla u),|\nabla v-\nabla u|^{r-p}(\nabla v-\nabla u)\rangle dx$$

$$\leqslant\beta\int_{Q(2R)}|\nabla u|^{p-1}|E_1(v,u)|dx-\int_{Q(2R)}\langle A(x,\nabla u),h_{v,u}\rangle dx$$

$$\leqslant\beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\int_{Q(2R)}|\nabla u|^{p-1}|\phi\nabla\psi+r\phi^{-1}\nabla\varphi((\psi-C_\psi)-(u-C_u))|^{r-p+1}dx+$$

$$\beta\int_{Q(2R)}|\nabla u|^{p-1}|h_{v,u}|dx$$

$$\leqslant\beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p-1}|\nabla\psi|^{r-p+1}dx+$$

$$\beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p-1}|r\phi-1\nabla\varphi((\psi-C_\psi)-(u-C_u))|^{r-p+1}dx+$$

$$C\beta\left(\int_{Q(2R)}|\nabla u|^r dx\right)^{(p-1)/r}\left(\int_{Q(2R)}|h_{v,u}|^{r/(r-p+1)}dx\right)^{(r-p+1)/r}$$

$$\leqslant\beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\left(\int_{Q(2R)}|\nabla u|^r dx\right)^{(p-1)/r}\left(\int_{Q(2R)}|\nabla\psi|^r dx\right)^{(r-p+1)/r}+$$

$$\beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\left(\int_{Q(2R)}|\nabla u|^r dx\right)^{(p-1)/r}\times$$

$$\left(\int_{Q(2R)}|r\phi^{-1}\nabla\varphi((\psi-C_\psi)-(u-C_u))|^r dx\right)^{(r-p+1)/r}+$$

$$C\beta(p-r)\left(\int_{Q(2R)}|\nabla u|^r dx\right)^{(p-1)/r}\left(\int_{Q(2R)}|\nabla v-\nabla u|^r dx\right)^{(r-p+1)/r}. \tag{13}$$

将 $\nabla v-\nabla u=-\phi\nabla u+\phi\nabla\psi+r\phi^{-1}\nabla\varphi((\psi-C_\psi)-(u-C_u))$ 代入上式最后一项,并取 r_1 满足 $C\beta(p-r_1)=2^{-n}$,则当 $r_1<r<p$ 时,$C\beta(p-r)=\tau_1<2^{-n}$. 利用 Young 不等式得到

$$\int_{Q(R)}|\nabla u|^r dx\leqslant C\epsilon\int_{Q(2R)}|\nabla u|^r dx+C\int_{Q(2R)}|\nabla\psi|^r dx+C\epsilon\int_{Q(2R)}|\nabla u|^r dx+$$

$$C\int_{Q(2R)}|\phi^{-1}\nabla\varphi((\psi-C_\psi)-(u-C_u))|^r dx+\tau_1\int_{Q(2R)}|\nabla u|^r dx, \tag{14}$$

其中 $C=C(p,r,r_1,\frac{\beta}{\alpha},\epsilon)$. 再取 ϵ 充分小,使得 $2C\epsilon+\tau_1=\tau_2<2^{-n}$,于是上式化为

$$\int_{Q(R)}|\nabla u|^r dx\leqslant\tau_2\int_{Q(2R)}|\nabla u|^r dx+C\int_{Q(2R)}|\nabla\psi|^r dx+$$

$$C\int_{Q(2R)}|\phi^{-1}\nabla\varphi((\psi-C_\psi)-(u-C_u))|^r dx. \tag{15}$$

再估计上式最后一项. 由通常的 Sobolev-Poincaré 不等式得到

$$\int_{Q(2R)}|\phi^{-1}\nabla\varphi((\psi-C_\psi)-(u-C_u))|^r dx$$

$$\leqslant CR^{-r}\int_{Q(2R)}|(\psi-C_\psi-(u-C_u))|^r dx$$

$$\leqslant C\int_{Q(2R)}|\nabla\psi|^r+CR^{-r}\left(\int_{Q(2R)}|\nabla u|^{nr/(n+r)}dx\right)^{(n+r)/n}.$$

代入(15)式有

$$\int_{Q(R)}|\nabla u|^r\mathrm{d}x\leqslant\tau_2\int_{Q(2R)}|\nabla u|^r\mathrm{d}x+C\int_{Q(2R)}|\nabla\psi|^r\mathrm{d}x+$$
$$CR^{-r}\Big(\int_{Q(2R)}|\nabla u|^{nr/(n+r)}\mathrm{d}x\Big)^{(n+r)/nr}.\qquad(16)$$

上式两端除以$|Q(R)|$,得到

$$\overline{\int}_{Q(2R)}|\nabla u|^r\mathrm{d}x\leqslant\tau_2\overline{\int}_{Q(2R)}|\nabla u|^r\mathrm{d}x+C\overline{\int}_{Q(2R)}|\nabla\psi|^r\mathrm{d}x+$$
$$CR^{-r}\Big(\overline{\int}_{Q(2R)}|\nabla u|^{nr/(n+r)}\mathrm{d}x\Big)^{(n+r)/nr},\qquad(17)$$

其中$\tau=2^n\tau_1<1$. 因为$\dfrac{nr}{n+r}<r$,上式为一个逆 Hőlder 不等式. 由引理以及通常的 Sobolev 嵌入定理知:存在$q>r$,使得$u\in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. □

定理 3 的证明　因为Ω有界,我们可以选择立方体$Q_0=Q(2R_0)$,使得$\Omega\subset Q(R_0)$. 其次,设$Q(2R)\subset Q_0$. 有两种可能情况:(i) $Q(\frac{3}{2}R)\subset\Omega$; (ii) $Q(\frac{3}{2}R\cap C\Omega\neq\varphi)$. 对情况(i),由定理 2 的证明可以得到估计式

$$\int_{Q(R)}|\nabla u|^r\mathrm{d}x\leqslant\tau\int_{Q(2R)}|\nabla u|^r\mathrm{d}x+C\Big(\int_{Q(\frac{3}{2}R)}|\nabla u|^{nr/(n+r)}\mathrm{d}x\Big)^{(n+r)/n}+$$
$$C\int_{Q(\frac{3}{2}R)}|\nabla\psi|^r\mathrm{d}x,\qquad(18)$$

其中$0<\tau<1$. 这是一个逆 Hőlder 不等式. 对情况(ii),注意到由$\theta_1=\max(\theta,\psi)$代替$\theta$,可以假设边界函数$\theta\geqslant\psi$. 事实上,由$\theta_1=(\psi-\theta)^++\theta$与

$$0\leqslant(\psi-\theta)^+\leqslant(u-\theta)^+\in W^{1,r}_0(\Omega)$$

得到$(\psi-\theta)^+\in W^{1,r}_0(\Omega)$,因此$u-\theta_1\in W^{1,r}_0(\Omega)$. 其次,令

$$v=u-\phi^r(u-\theta),$$

其中$\varphi\in C^\infty_0(Q(2R))$为与定理 2 证明中相同的截断函数. 现在因为$v-\theta\in W^{1,r}_0(\Omega)$,而且由$u\geqslant\psi,\theta\geqslant\psi$,得到

$$v=(1-\phi^r)u+\phi^r\theta\geqslant(1-\phi^r)\psi+\phi^r\psi=\psi,$$

所以$v\in K^r_{\psi,\theta}$. 由于

$$\nabla v=(1-\phi^r)\nabla u+\phi^r\nabla\theta+r\phi^{r-1}(\theta-u)\nabla\varphi,$$

令

$$E_2(v,u)=|X_2|^{-\epsilon}X_2+|Y_2|^{-\epsilon}Y_2,\qquad(19)$$

其中

$$\epsilon=p-r,X_2=\phi^r\nabla u,Y_2=\nabla v-\nabla u=-\phi^r\nabla u+\phi^r\nabla\theta+r\phi^{r-1}(\theta-u)\nabla\varphi.$$

则由基本不等式(9)得到

$$|E_2(v,u)|\leqslant\frac{2^\epsilon(1+\epsilon)}{1-\epsilon}|X_2-Y_2|^{1-\epsilon}=\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}|\phi^r\nabla\theta+r\phi^{r-1}(\theta-u)\nabla\varphi|^{r-p+1}.$$

于是由(19)式得到

$$\int_\Omega \langle A(x,\nabla u), |\phi\nabla u|^{r-p}\phi\nabla u\rangle \mathrm{d}x$$
$$= \int_\Omega \langle A(x,\nabla u), E_2(v,u)\rangle \mathrm{d}x - \int_\Omega \langle A(x,\nabla u), |Y_2|^{-\varepsilon}Y_2\rangle \mathrm{d}x. \tag{20}$$

在 $Q(2R)\cap\Omega$ 上引入 $Y=\nabla v-\nabla u$ 的 Hodge 分解(3)，由估计式(4)，(5)得到

$$\begin{aligned}
\alpha\int_\Omega \phi^{(r-p+1)}|\nabla u|^r\mathrm{d}x &\leqslant \int_\Omega \langle A(x,\nabla u), |\phi\nabla u|^{r-p}\phi\nabla u\rangle\mathrm{d}x\\
&= \int_{\Omega\cap Q(2R)}\langle A(x,\nabla u), |\phi\nabla u|^{r-p}\phi\nabla u\rangle\mathrm{d}x\\
&\leqslant \beta\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla u|^{p-1}|E_2(v,u)|\mathrm{d}x - \int_{\Omega\cap Q(2R)}\langle A(x,\nabla u), h_{v,u}\rangle\mathrm{d}x\\
&\leqslant \beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla u|^{p-1}|\phi\nabla\theta + r\phi^{-1}(\theta-u)\nabla\varphi|^{r-p+1}\mathrm{d}x +\\
&\quad \beta\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla u|^{p-1}|h_{v,u}|\mathrm{d}x\\
&\leqslant \beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\|\nabla u\|^{p-1}_{r,\Omega\cap Q(2r)}\|\phi\nabla\theta\|^{r-p+1}_{r,\Omega\cap Q(2R)} +\\
&\quad \beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\|\nabla u\|^{p-1}_{r,\Omega\cap Q(2r)}\|r\phi^{-1}(\theta-u)\nabla\varphi\|^{r-p+1}_{r,\Omega\cap Q(2R)} +\\
&\quad \beta\|\nabla u\|^{p-1}_{r,\Omega\cap Q(2R)}\|h_{v,u}\|_{r/(r-p+1),\Omega\cap Q(2R)}\\
&\leqslant [\beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1} + C\beta(p-r)]\times\\
&\quad [\epsilon\|\nabla u\|^r_{r,\Omega\cap Q(2R)} + C(\epsilon,p,r)\|\phi\nabla\theta\|^r_{r,\Omega\cap Q(2R)}] +\\
&\quad [\beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1} + C\beta(p-r)]\times\\
&\quad [\epsilon\|\nabla u\|^r_{r,\Omega\cap Q(2R)} + C(\epsilon,p,r)\|r\phi^{-1}(\theta-u)\nabla\varphi\|^r_{r,\Omega\cap Q(2R)}] +\\
&\quad C(p-r)\beta\|\nabla u\|^r_{r,\Omega\cap Q(2R)}.
\end{aligned}$$

取 $r_2\in(p-1,p)$ 满足 $C(p-r_2)\dfrac{\beta}{\alpha}=2^{-n}$，则当 $r_2\leqslant r<p$ 时，$C(p-r)\dfrac{\beta}{\alpha}=\tau_1<2^{-n}$. 再取 ϵ 充分小，使得 $2[\dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}+\dfrac{\beta}{\alpha}C(p-r)]<\dfrac{1}{2}(2^{-n}-\tau_1)$，则 $\tau_2=\dfrac{1}{2}(2^{-n}-\tau_1)+\tau_1<2^{-n}$，此时上式成为

$$\int_\Omega \phi^{(r-p+1)}|\nabla u|^r\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \tau_2\|\nabla u\|^r_{r,\Omega\cap Q(2R)} + C\|\phi\nabla\theta\|^r_{r,\Omega\cap Q(2R)} + C\|r\phi(\theta-u)\nabla\varphi\|^r_{r,\Omega\cap Q(2R)}, \tag{21}$$

这里 $C=C(p,r_1,r,\dfrac{\beta}{\alpha},n,\gamma)$. 下面应用关于 $\partial\Omega$ 为 r-Poincaré 厚的假设估计上式最后一项. 因为 u 以 θ 为边值，我们可以将函数 $\theta-u$ 在 Ω 之外延拓为零，于是

$$\|r\phi^{-1}(\theta-u)\nabla\varphi\|^r_{r,\Omega\cap Q(2R)}\leqslant r\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla\varphi|^r|\theta-u|^r\mathrm{d}x$$
$$\leqslant CR^{-r}\Big(\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla(\theta-u)|^{nr/(n+r)}\mathrm{d}x\Big)^{(n+r)/n}. \tag{22}$$

注意到在 $C\Omega$ 上 $\nabla(\theta-u)=0$, a. e.，由 Minkowski 不等式与 Hölder 不等式得到

$$
\begin{aligned}
&R^{-r}\Big(\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla(\theta-u)|^{nr/(n+r)}\Big)^{(n+r)/nr}\\
&\quad\leqslant R^{-r}\Big[\Big(\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla\theta|^{nr/(n+r)}\Big)^{(n+r)/nr}+\Big(\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla u|^{nr/(n+r)}\Big)^{(n+r)/nr}\Big]^{r}\\
&\quad\leqslant R^{-r}\Big[R\Big(\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla\theta|^{r}\Big)^{1/r}+\Big(\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla u|^{nr/(n+r)}\Big)^{(n+r)/nr}\Big]^{r}\\
&\quad\leqslant 2^{r}\Big[\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla\theta|^{r}+R^{-r}\Big(\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla u|^{nr/(n+r)}\Big)^{(n+r)/nr}\Big].
\end{aligned}\tag{23}
$$

由(21),(22),(23)得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q(R)}|\nabla u|^{r}\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega}\varphi^{(r-p+1)}|\nabla u|^{r}\mathrm{d}x\\
&\quad\leqslant\tau_2\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla u|^{r}+C\Big[\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla\theta|^{r}+R^{-r}\Big(\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla u|^{nr/(n+r)}\Big)^{nr/(n+r)}\Big].
\end{aligned}
$$

现在在 $Q(2R)-\Omega$ 中令 $|\nabla u|=|\nabla\theta|=0$,两边再除以 $|Q(R)|$,则上式即为下面的逆 Hőlder 不等式

$$
\overline{\int_{Q(R)}}|\nabla u|^{r}\mathrm{d}x\leqslant\tau\overline{\int_{Q(2R)}}|\nabla u|^{r}\mathrm{d}x+C\Big[\Big(\overline{\int_{Q(2R)}}|\nabla u|^{nr/(n+r)}\mathrm{d}x\Big)^{(n+r)/nr}+\overline{\int_{Q(2R)}}|\nabla\theta|^{r}\mathrm{d}x\Big],
$$

其中 $\tau=2^{n}\tau_2<1,C=C(p,r,r_1,s,n,\frac{\beta}{\alpha},\gamma)<\infty$. 于是由引理中的(7)式可知,存在 $t>r$,使得 $|\nabla u|\in L^{t}(\Omega),t=t(p,r,r_1,s,n,\frac{\beta}{\alpha},\gamma)>r$.

下面需要证明 $u\in L^{\delta}(\Omega),\delta=\delta(n,r)>r$. 将 $u-\theta$ 在 Ω 之外延拓为零. 若 $r<n$,设 $r^{*}=\frac{nr}{n-r}$,则由 Sobolev 嵌入定理得

$$
\Big(\int_{\Omega}|u-\theta|^{r^{*}}\mathrm{d}x\Big)^{1/r^{*}}\leqslant\Big(\int_{\Omega}|\nabla(u-\theta)|^{r}\mathrm{d}x\Big)^{1/r}<\infty.
$$

取 $\delta=\min(s,nr/(n-r))$,由 Mimkowski 不等式与 Hőlder 不等式得

$$
\begin{aligned}
\Big(\int_{\Omega}|u|^{\delta}\mathrm{d}x\Big)^{1/\delta}&\leqslant\Big(\int_{\Omega}|\theta|^{\delta}\mathrm{d}x\Big)^{1/\delta}+\Big(\int_{\Omega}|u-\theta|^{\delta}\mathrm{d}x\Big)^{1/\delta}\\
&\leqslant\Big(\int_{\Omega}|\theta|^{\delta}\mathrm{d}x\Big)^{1/\delta}+C_1\Big(\int_{\Omega}|u-\theta|^{r^{*}}\mathrm{d}x\Big)^{1/r^{*}},
\end{aligned}
$$

这里 $C_1=C_1(\mathrm{diam}\Omega,r,n)$.

因为 $\theta\in L^{s}(\Omega)$,由上式得知 $u\in L^{\delta}(\Omega)$. 令 $q=\min(t,\delta)>r$,于是 $u\in L^{q}(\Omega)$. 若 $r\geqslant n$,对任意的 $r^{*}<\infty$重复上面的推导过程,得到 $u\in L^{\delta}(\Omega)$,因此 $u\in W^{1,q}(\Omega),q=\min(t,s)>p$. □

本文的初稿是第一作者在上海交通大学读博时完成的,在此期间得到了方爱农教授的指导和国家自然科学基金的资助,特此致谢.

参考文献:

[1] LI Gong-bao, MARTIO O. *Local and global integrability of gradients in obstacle problems* [J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., 1994, **19**: 25—34.

[2] HEINONEN J, KILPELAINEN T, MARTIO O. *Nonlinear Potential Theory of Second Order Degenerate Elliptic Partial Differential Equations* [M]. Oxford University Press, 1993.

[3] IWANIEC T, SBORDONE C. *Weak minima of variational integrals* [J]. J. Reine. Angew. Math., 1994, **454**: 143—161.
[4] MEYERS N, ELCRAT G. *Some results on regularity for solutions of nonlinear elliptic systems and quasi-regular functions* [J]. Duke Math. J., 1975, **42**: 121—136.
[5] GIAQUINTA M. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems* [M]. Ann. Math. Stud., 105, Princeton Univ. Press, 1983.
[6] IWANIEC T, MIGLIACCIO L, NANIA L. et al. *Integrability and removability results for quasiregular mappings in high dimensons* [J]. Math. Scand, 1994, **75**: 263—279.
[7] LI Gong-bao, MARTIO O. *Stability in obstacle problems* [J]. Math. Scand, 1994, **75**: 87—100.
[8] LI Gong-bao, MARTIO O. *Stability of solutions of varying degenerate elliptic equations* [J]. Indiana Univ. Math. J., 1998, **47**: 873—891.

Very Weak Solutions for Obstacle Problems of A-Harmonic Equation

GAO Hong-ya[1], WANG Min[2], ZHAO Hong-liang[3]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Hebei University, Baoding 071002, China;
2. College of Machinary and Civil Engineering, Hebei University, Baoding 071002, China;
3. Department of Mathematics and Physics, Hebei University of Technology, Tangshan 063000, China)

Abstract: This paper gives the definition of very weak solutions for obstacle problems of A—harmonic equation. The local and global higher integrability results are obtained by using the technique of Hodge decomposition. These extend the results of [1].

Key words: A-harmonic equation; obstacle problem; very weak solution; Hodge decomposition; reverse Hőlder inequality.