1986年 5 月

数学研究与评论
第六卷　第二期

某些半群子范畴中的张量积*

李　师　正

（山东师范大学）

半群范畴S中张量积首先在[1]中引入。T∈ob S称为A，B∈ob S的张量积（记为A⊗B），如果存在双同态t：A × B→T（相当于[3]中线性平衡映射），且对于任意双同态s：A × B→C∈ob S总存在唯一的同态u：T→C，使$s=ut$。[1]确认了张量积的存在唯一。[2][4]等引入交换半群、半格等子范畴中的张量积，其定义与上述基本相同，仅将S改为该子范畴。此外[5]~[8]刻划了一些半群类的张量积。本文在§ 1从任意半群簇V中张量积与其在S中张量积的关系入手，绘出统一的处理方法，从而一并解决诸如交换半群簇CS（恒等式为$xy=yx$）、半格簇SL（恒等式为$xy=yx$，$x^2=x$）、带簇B（恒等式为$x^2=x$）、左零带簇LZ（恒等式为$xy=x$）、矩形带族RB（恒等式为$xyx=x$，$x^2=x$）[9,p.119]等所有簇中张量积的存在与唯一性等问题。

有单位元的可消交换半群类CC，是S中包含所有Abel群及自由交换半群的重要子范畴，但它不是簇，因显然关于同态象不封闭[9,p.114]，因而不能用此结论。在§ 2用独立的方法证明可换可消半群在CC中的张量积的存在唯一，成为§ 1的重要补充。

§ 1　半群簇中的张量积

定义1.1　设U为任意半群子范畴，T∈ob U称为A，B∈ob U在U中的张量积，记为$A\otimes_U B$，如果存在双同态t：A × B→T，且对于任意双同态s：A × B→C∈ob U，总存在唯一同态u：T→C，使$s=ut$。

当U为半群簇V时，易证

定理1.2　设V为半群簇，A，B∈ob V，则$A\otimes_V B$存在且在同构意义下唯一，即$A\otimes_V B=(A\otimes B)/\bar{\sigma}$，其中$\bar{\sigma}=\bigcap_{\sigma\in\Sigma}\sigma$，$\Sigma$为A⊗B的V—同余集。

更广泛的形式为

定理1.3　设V_1和V_2为半群簇，$V_1\subset V_2$，A，B∈ob V_1，则$A\otimes_{V_1}B=(A\otimes_{V_2}B)/\bar{\sigma}$，其中$\bar{\sigma}=\bigcap_{\sigma\in\Sigma}\sigma$，Σ为$A\otimes_{V_2}B$的$V_1$—同余集。

在某些情况下可能$A\otimes_{V_1}B=A\otimes_{V_2}B$，如

定理1.4　设A，B为半格，则$A\otimes_{SL}B=A\otimes_{CS}B$。设A，B为左零带，则$A\otimes_{LZ}B=A\otimes B$。

§ 2　可消交换半群的张量积

* 1983年11月 7 日收到。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

定理2.1 可消交换半群子范畴CC中任意两个半群A，B的张量积$A\otimes_{CC}B$总存在，且在同构意义下唯一，它是A，B分式群$\overline{A}$，$\overline{B}$在Abel群范畴Ab中张量积$\overline{A}\otimes_{Ab}\overline{B}$的子半群。

证 设A，B的分式群为$\overline{A}$，$\overline{B}$，它们是Abel乘群，元素形如aa_1^{-1}，bb_1^{-1}（a，$a_1\in A$，b，$b_1\in B$），且有嵌入$i_A: A\to\overline{A}$，$i_B: B\to\overline{B}$。令$i=(i_A, i_B)$。设$\overline{A}$，$\overline{B}$在Ab中的张量积[10, § 59]为$\overline{A}\otimes_{Ab}\overline{B}=\overline{T}$。$\overline{T}$为形如$aa_1^{-1}\otimes_{Ab}bb_1^{-1}$的有限积组成的Abel群，则有双同态$\overline{f}: \overline{A}\times\overline{B}\to\overline{T}$。$\overline{T}$中由一切形如$a1_A^{-1}\otimes_{Ab}b1_B^{-1}=a\otimes_{Ab}b$（$a\in A$，$b\in B$）的元素生成（即有限积）的子半群记为T。令$f=\overline{f}|_{A\times B}: A\times B\to T, (a, b)\mapsto a\otimes_{Ab}b$。下面证明$T=A\otimes_{CC}B$。

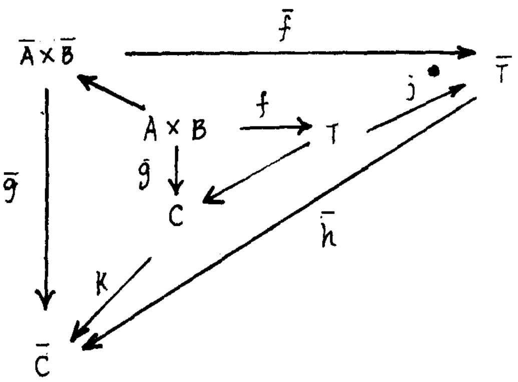
首先，f显然是双同态，又设有任意双同态$g: A\times B\to C\in obCC$，C的分式群设为$\overline{C}$. 令$\overline{g}: \overline{A}\times\overline{B}\to\overline{C}, (aa_1^{-1}, bb_1^{-1})\mapsto[g(a, b)g(a_1, b_1)][g(a, b_1)g(a_1, b)]^{-1}$。$\overline{g}$是完全确定的，因如在$\overline{A}$中$aa_1^{-1}=cc_1^{-1}$，$\overline{B}$中$bb_1^{-1}=dd_1^{-1}$，则$ac_1=a_1c$，$bd_1=b_1d$，$g(a, b)g(c_1, b)=g(ac_1, b)=g(a_1c, b)=g(a_1, b)g(c, b)$。同理$g(c, b_1)g(a_1, b_1)=g(c_1, b_1)g(a, b_1)$。因而在$\overline{C}$中。

$$[g(a, b)g(a_1, b_1)][g(a, b_1)g(a_1, b)]^{-1}=[g(c, b)g(c_1, b_1)][g(c, b_1)g(c_1, b)]^{-1},$$

即$\overline{g}(aa_1^{-1}, bb_1^{-1})=\overline{g}(cc_1^{-1}, bb_1^{-1})$。同理$\overline{g}(cc_1^{-1}, bb_1^{-1})=\overline{g}(cc_1^{-1}, dd_1^{-1})$。此外易证$\overline{g}$是双同态。

任取$a\in A$，$b\in B$，$g(a, 1_B)^2=g(a, 1_B^2)=g(a, 1_B)=g(a, 1_B)1_C$. 由于C可消，故$g(a, 1_B)=1_C$. 同理$g(1_A, b)=1_C$. 因而

$\overline{g}(a, b)=[g(a, b)g(1_B, 1_B)][g(a, 1_B)g(1_A, b)]^{-1}=g(a, b)$，这里$a=a1_A^{-1}$，$b=b1_B^{-1}$，即$\overline{g}|_{A\times B}=g$。由于Abel群张量积$\overline{T}$的泛性，存在唯一的Abel群同态$\overline{h}$: $\overline{T}\to\overline{C}$，使$\overline{h}\,\overline{f}=\overline{g}$。令$h=\overline{h}|_T$，则



$(hf)(a, b)=h(f(a, b))=h(a\otimes_{Ad}b)=\overline{h}(a\otimes_{Ab}b)=(\overline{h}\,\overline{f})(a, b)=\overline{g}(a, b)=g(a, b)$。故有$hf=g$，得此交换图。图中$j$，$k$为嵌入。$h$是唯一的，事实上，

$h(a\otimes_{Ab}b)=\overline{h}(a\otimes_{Ab}b)=(\overline{h}\,\overline{f})(a, b)=\overline{g}(a, b)=g(a, b)$。T中元素为形如$a\otimes_{Ab}b$的有限积，故$h$由$g$唯一决定。总之，$T=A\otimes_{CC}B$。

设T，S是A，B在CC中的张量积，对应双同态为f_1和f_2，由张量积的泛性，存在同态g_1: $T\to S$和g_2: $S\to T$，使$f_1=g_2f_2$，$f_2=g_1f_1$，则$f_1=(g_2g_1)f_1$，而T作为张量积又可视为双同态象，又由张量积泛性，适合$f_1=hf_1$的同态h: $T\to T$是唯一的，又显然$f_1=(\mathrm{id}\,T)f_1$，故$g_2g_1=\mathrm{id}\,T$。同理$g_1g_2=\mathrm{id}\,S$。故得同构g_1: $T\cong S$。证毕。

推论2.2 设A，B为Abel群，则$A\otimes_{Ab}B=A\otimes_{CC}B$。

证 这时$A=\overline{A}$，$B=\overline{B}$，$\overline{T}$的每个生成元$aa_1^{-1}\otimes_{Ab}bb_1^{-1}$也是T的生成元，因$aa_1^{-1}\in A$，$bb_1^{-1}\in B$，故$\overline{T}=T$。证毕。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

参 考 文 献

〔1〕P.A.Grillet, The tensor product of semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 138(1969), 267-280。

〔2〕__________, The tensor product of Commutative semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 138(1969), 281-293。

〔3〕周伯壎，同调代数讲义，南京大学，1979。

〔4〕J.A.Anderson and N.Kimura, The tensor product of semilattices, *Semigroup Forum*, 16(1978), 83—88。

〔5〕J.A.Anderson, The tensor product of a semigroup with a union of groups, *Semigroup Forum*, 8(1974), 65—68。

〔6〕R.Fulp, Tensor and torsion products of semigroups, *Pacific J. Math.*, 32(1970), 685—696。

〔7〕李师正，关于Gauss半群的张量积，山东师范大学学报（自然科学版），1(1983), 1—5。

〔8〕李师正，Gauss半群张量积的结构，同上，2(1983), 1—11。

〔9〕J.M. Howie, An Introduction to Semigroup Theory, Academic Press, London, 1976。

〔10〕L.Fuchs, Infinite Abelian Groups, Vol. 1, Academic Press, NewYork, 1970。

On the Tensor Products in Some Subcategories of Semigroups

Li Shizheng

(Shandung Normal University)

Abstract

In this paper the existence and uniqueness of tensor product in any semigroup variety are proved, and the relation between the tensor products in semigroup variety and in semigroup category is charaterized。Next, we consider the existence and uniqueness of tensor product in cancellation commutative semigroup subcategory, this tensor product is a subsemigroup of tensor product of two quotient groups in abelian group category。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.