第13卷第4期 数学研究与评论 Vol. 13 No. 4
1993年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1993

M—PN空间上线性算子的概率范数与有界性刻画*

肖 建 中
(江苏盐城教育学院数学系,224002)

摘 要

本文借助$N(1,a)$引入M—PN空间上线性算子的概率范数的概念,并用它来刻画线性算子的有界性及强有界性.

关于Menger概率赋范线性空间(简称M—PN空间)及算子的有关定义、符号与结果详见[1]、[2]、[3].

引理1 在$(E,\mathscr{F},\Delta)$上定义$N(t,a)$(其中$t>0,a\in[0,1]$)如下:

$$a\in(0,1],\ N(t,a)=\{x\in E:\ f_x(t)>1-a\}$$

$$\mathscr{F}\text{取值于}\mathscr{D}_0,N(t,0)=\{x\in E:\ f_x(t)=1\}.$$

则:

(1) $tN(1,a)=N(t,a)$; (2) $t_1\leqslant t_2\Rightarrow N(t_1,a)\subset N(t_2,a)$; (3) $a_1\leqslant a_2\Rightarrow N(t,a_1)\subset N(t,a_2)$.

引理2 对每一$a\in(0,1]$,有

(1) $\{x\in E:\ \|x\|_a<1\}\subset N(1,a)\subset\{x\in E:\ \|x\|_a\leqslant 1\}$;

(2) $\{x\in E:\ \|x\|<1\}\subset N(1,0)\subset\{x\in E:\ \|x\|.\leqslant 1\}$.

引理3 设$\mathscr{F}$取值于$\mathscr{D}_0$,A是$(E,\mathscr{F},\Delta)$中非空子集,则A是概率一致有界集[3]$\Leftrightarrow\exists\ M>0$,使$A\subset N(M,0)$.

引理4 设$\Delta(\lambda,\lambda)\geqslant\lambda$,$A$是$(E,\mathscr{F},\Delta)$中非空子集,则:

(1) A是概率有界集$\Leftrightarrow$对$\forall\ a\in(0,1]$,$\forall\ M=M(a)>0$,使$A\subset N(M,a)$;

(2) A是概率无界集$\Leftrightarrow$对$\forall\ a\in(0,1]$,$\forall\ M>0$,集合差$A-N(M,a)\neq\varnothing$;

(3) A是概率半有界集$\Leftrightarrow\exists\ a_0\in(0,1)$,$\forall\ a\in(a_0,1)$,$\exists\ M=M(a)>0$,使$A\subset N(M,a)$;而$\forall\ a\in(0,a_0)$,$\forall\ M>0$,集合差$A-N(M,a)\neq\varnothing$.

引理5 (1) 若$\mathscr{F}$取值于$\mathscr{D}_0$,则$N(t,0)$为概率一致有界集; (2) 若$\Delta(\lambda,\lambda)\geqslant\lambda$, $a\in(0,1]$,则$N(t,a)$为非概率无界集.

定义1 设T是M—PN空间$(E_1,\mathscr{F}_1,\Delta)$到$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta)$的线性算子,定义

* 1991年6月15日收到.

$$H_T(t)=\begin{cases}\sup\limits_{s<t}\sup\limits_{\alpha\in(0,1]}\inf\limits_{x\in N(1,\alpha)} f_{Tx}(S) & t>0\\ 0 & t\leqslant 0\end{cases}$$

为 T 的概率范数.

定理 1　设 T 是$(E_1,\mathscr{F}_1,\Delta)$到$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta)$的线性算子,$\Delta(\lambda,\lambda)\geqslant\lambda$,则 T 有界([3],[6])的充分必要条件是$\lim\limits_{t\to+\infty}H_T(t)=1$.

引理 6　设 Δ 连续且 $\Delta(\lambda,\lambda)\geqslant\lambda$,则 M－PN 空间$(E_1,\mathscr{F}_1,\Delta)$到$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta)$的有界线性算子全体 $B(E_1,E_2)$按$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x$ 与$(bT)x=b(Tx)$定义的线性运算构成线性空间.

定理 2　设 Δ 连续且 $\Delta(\lambda,\lambda)\geqslant\lambda$,$\mathscr{F}_1$ 取值于 $\mathscr{D}_0$,则$(B(E_1,E_2),H,\Delta)$为 Menger 概率赋范线性空间,且当$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta)$完备时,$(B(E_1,E_2),H,\Delta)$也完备.

引理 7　T 是$(E_1,\mathscr{F}_1,\Delta)$到$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta)$的强有界线性算子([3]、[6])的充分必要条件是$\exists\ M>0$,对$\forall\ x\in E_1,f_{Tx}(1)\geqslant f_{Mx}(1)$.

引理 8　$\mathscr{F}_1$ 取值于 $\mathscr{D}_0,\Delta(\lambda,\lambda)\geqslant\lambda$,则 T 是$(E_1,\mathscr{F}_1,\Delta)$到$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta)$的强有界线性算子的充分必要条件是$\exists\ M>0,\forall\ x\in E_1,\forall\ \alpha\in(0,1]$,有$\|Tx\|\leqslant M\|x\|$,$\|Tx\|_\alpha\leqslant M\|x\|_\alpha$.

定理 3　设 $\mathscr{F}_1$ 取值于 $\mathscr{D}_0$,Δ 连续且 $\Delta(\lambda,\lambda)\geqslant\lambda$,$T$ 是$(E_1,\mathscr{F}_1,\Delta)$到$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta)$的强有界线性算子,定义$\|T\|=\inf\{M>0:\forall\ x\in E_1,f_{Tx}(1)\geqslant f_{Mx}(1)\}$. $\|T\|_0=\inf\{t\geqslant0:H_T(t)=1\}$,其中 $H_T(t)$是 T 的概率范数.则:

(1)　$\|T\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant1}\|Tx\|=\sup\limits_{\|x\|_\alpha\leqslant1}\|Tx\|_\alpha$;

(2)　$\|T\|=\|T\|_0$;

(3)　强有界算子集 $S(E_1,E_2)$按$\|\cdot\|$构成赋范线性空间.

定理 4　设 $\mathscr{F}_1$ 取值于 $\mathscr{D}_0$,Δ 连续且 $\Delta(\lambda,\lambda)\geqslant\lambda$,$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta)$完备,则强有界线性算子集 $S(E_1,E_2)$是$(B(E_1,E_2),H,\Delta)$的完备子空间.

定义 2　T 是$(E_1,\mathscr{F}_1,\Delta)$到$(E_2,\mathscr{F}_2,\Delta)$的线性算子,若$\exists\ M>0,\alpha_0\in(0,1],\forall\ x\in N(1,\alpha_0)$,有 $f_{Tx}(1)\geqslant f_{Mx}(1)$,则称 T 在 $N(1,\alpha_0)$上(局部)强有界.

定理 5　设 $\Delta(\lambda,\lambda)\geqslant\lambda$,$T$ 为 $N(1,\alpha_0)$上的强有界算子,则:

(1)$\exists\ M_0>0$,使 $H_T(M_0)=1$;(2)T 是有界线性算子;(3)$\exists\ M_0>0$,使$\|Tx\|\leqslant M_0\|x\|$.

参 考 文 献

[1]　V. Radu, C. R. Acad. Sci. Paris 280(1975), 80—89.

[2]　张石生, 应用数学和力学, 9(2) (1988) 117—126.

[3]　张石生, 应用数学和力学, 9(3) (1988) 193—204.

[4]　林熙, 工程数学学报, 4(2) (1987) 43—48.

[5]　苏永福, 天津师大学报, 1988, 1.

[6]　龚怀云, 数学研究与评论, 10(2), (1990).