第13卷第4期
1993年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 13 No. 4
Nov. 1993

关于切点单形两个不等式的推广*

杨 世 国
(安徽教育学院数学系,合肥 230061)

设 n 维欧氏空间 E^n 中 n 维单形 Σ_A 的顶点为 $A_i(i=1,2,\cdots,n+1)$, Σ_A 的内切球和各侧面相切于点 $A'_i(i=1,2,\cdots,n+1)$,以 A'_i 为顶点的单形 $\Sigma_{A'}$ 称为 Σ_A 的切点单形[1].

若从 n 维单形 Σ_A($\Sigma_{A'}$)的 $n+1$ 个顶点中任取 $m+1$ 个顶点,则可生成 $\mu=\binom{n+1}{m+1}$ 个 m 维子单形,这些 m 维子单形的 m 维体积记为 $V_h^{(m)}(V'^{(m)}_h)\left[m=1,2,\cdots,n;h=1,2,\cdots,\binom{n+1}{m+1}\right]$. 若用 P_λ,P'_λ 分别表示 $(V_h^{(m)})^2$、$(V'^{(m)}_h)^2$ 的 λ 次对称多项式;Q_λ、Q'_λ 分别表示 $V_h^{(m)}$、$V'^{(m)}_h$ 的 λ 次对称多项式$\left[\lambda=1,2,\cdots,\binom{n+1}{m+1}\right]$,最近[2]中获得切点单形的下述两个重要不等式

$$P'_\lambda\leqslant n^{-2m\lambda}P_\lambda; \tag{1}$$

$$Q'_\lambda\leqslant n^{-m\lambda}Q_\lambda. \tag{2}$$

(1)、(2)中等号当且仅当 Σ_A 为正则单形时成立.

本文研究了单形的类似问题,从而获得切点单形两个更强的不等式,它们加强推广了不等式(1)、(2).

定理 1 在 n 维单形 Σ_A 和它的切点单形 $\Sigma_{A'}$ 的不变量 P_λ 与 P'_λ,Q_λ 与 Q'_λ 之间成立不等式

$$P'_\lambda\leqslant\left(1-\frac{\overline{IG}^2}{r^2}\right)^{m\lambda}n^{-2m\lambda}P_\lambda; \tag{3}$$

$$Q'_\lambda\leqslant\left(1-\frac{\overline{IG}^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}m\lambda}n^{-m\lambda}Q_\lambda. \tag{4}$$

(3)、(4)中等号当且仅当 Σ_A 为正则单形时成立. 其中 I、r 分别为 Σ_A 的内心与内切球半径,G 为切点单形 $\Sigma_{A'}$ 的重心. 特别,如果在(3)或(4)中令 $m=n,\lambda=1$,得

推论 1 在 n 维单形 Σ_A 和它的切点单形 $\Sigma_{A'}$ 的体积 V、V' 之间有不等式

$$V'\leqslant\left(1-\frac{\overline{IG}^2}{r^2}\right)^{n/2}n^{-n}V, \tag{5}$$

等号成立当且仅当 Σ_A 为正则单形. 不等式(5)推广了文献[1]中切点单形不等式 $V'\leqslant n^{-n}V$.

定理的证明需用下面几个结果:

设 n 维单形 Σ_A 的所有 m 维子单形的体积的乘积为 M_m,$\mu=\binom{n+1}{m+1}$,则有[1]

* 1991年5月14日收到. 1993年4月9日收到修改稿.

$$M_m \geqslant \left(\frac{\sqrt{m+1}}{m!}\right)^{\mu}\left(\frac{n!}{\sqrt{n+1}}V\right)^{\frac{m\mu}{n}}, \tag{6}$$

等号成立当且仅当 Σ_A 为正则单形.

在 n 维单形的体积 V 与内切球半径 r 之间有

$$r \leqslant \left[\frac{n!^2}{n^n(n+1)^{n+1}}\right]^{1/2n} V^{1/n}, \tag{7}$$

且当该单形为正则单形时等号成立.

在 n 维单形的棱长 $a_i(i=1,2,\cdots,\frac{1}{2}n(n+1))$ 与外接球半径 R 之间有[4]

$$\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_i^2 = (n+1)^2(R^2 - \overline{OG}^2), \tag{8}$$

其中 O、G 分别为此单形的外心与重心.

设 n 维单形 Σ_A 的所有 m 维子单形体积平方和为 N_m,则[3]

$$N_1^m \geqslant \frac{(n-m)!(m!)^3}{[(n-1)!]^m}[(n+1)!]^{m-1}N_m \quad (1 < m \leqslant n). \tag{9}$$

由 Maclaurin 不等式[5]及(6)、(7)可证得

$$P_\lambda \geqslant \binom{\mu}{\lambda}\left(\frac{m+1}{m!^2}\right)^{\lambda}[n(n+1)]^{m\lambda}r^{2m\lambda}. \tag{10}$$

对切点单形 $\Sigma_{A'}$,由 Maclaurin 不等式[5]及(9)、(8),可得

$$P'_\lambda \leqslant \binom{\mu}{\lambda}\left[\frac{(m+1)!}{m!^3}\right]^{\lambda}\left[\frac{(n-1)!}{(n+1)!}\right]^{m\lambda}(n+1)^{2m\lambda}\left[1-\frac{\overline{IG}^2}{r^2}\right]^{m\lambda}r^{2m\lambda}. \tag{11}$$

由(10)、(11)两式便得(3)式.类似方法可证(4)式成立.

此外,在定理证明过程中作者还获得下述结果:

推论 2 在 n 维单形 Σ_A 的外接球半径 R 与内切球半径 r 之间有

$$R^2 \geqslant n^2r^2 + \overline{OG}^2; \tag{12}$$

$$R^2 \geqslant n^2r^2 + \frac{1}{4}\overline{IG}^2. \tag{13}$$

这是[6]中结果:$R \geqslant nr$ 的两个推广.

参 考 文 献

[1] 毛其吉,左铨如,数学的实践与认识,4(1987),71—75.

[2] 苏化明,数学研究与评论,10:2(1990),243—248.

[3] 张景中、杨路,中国科学技术大学学报,11:2(1981),1—8.

[4] Alexander,R. and Stolarsky,K. B; Tran. Am. Math. Soc.,193(1974),1—31.

[5] Hardy. G. H; Littlewood. J. E. and Pòlya, Inequalitics, Cambridge, 2nd. cd, 1952.

[6] Klamkin. M. S., Math. Magazinc, 52(1979), 20—22.