第4卷 第1期
1984年1月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.1
Jan. 1984

关于多层差分格式稳定性的注记*

曹志浩

（复旦大学）

在研究相应于抛物型方程，特别是双曲型方程初边值问题的多层差分格式的稳定性时，常用的方法之一是有限Fourier方法，其特点是应用时较灵活，可获得多种类型的稳定性不等式和相应的稳定性条件，但这些都强烈依赖于初始条件的离散化方式。在这篇短文中以波动方程的三层差分格式为例，说明如何正确地使用这种方法分析多层差分格式的稳定性。

波动方程的初边值问题是（为讨论按初始条件的稳定性，只要考虑齐次方程、齐次边界条件）：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & 0<x<1, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \\ u(0,t)=u(1,t)=0, & \\ u(x,0)=\varphi(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x) & \end{cases}$$

相应的三层显差分格式为：

$$\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{\tau^2}-\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}=0 \tag{1}$$

$$(j=1,2\cdots,N-1;\ n=1,2,\cdots,[T/\tau])$$

其中 h 是空间步长，$h=1/N$，τ 是时间步长。记 $r=\tau/h$。

若采用Richtmyer方法分析稳定性，则可得：$r<1$ 时稳定；$r\geqslant 1$ 时不稳定[1]。Richtmyer方法能将多层差分格式的稳定性分析约化为二层差分格式的稳定性分析，但其缺点是稳定性不等式两端的范数必需取得完全一样；而且对初边值问题，要求差分格式可周期延拓于整个空间。

有限Fourier方法是按差分格式的特征函数展开以研究稳定性的方法[2]。一般对(1)能得到形为

$$\|u^n\|\leqslant C(\|\tilde{\varphi}\|+\|\tilde{\psi}\|) \tag{2}$$

的稳定性不等式，其中 C 是与 h，τ 无关的常数，u^n，$\tilde{\varphi}$，$\tilde{\psi}$ 都是 $N-1$ 维向量：

$$u^n=[u_1^n,u_2^n,\cdots,u_{N-1}^n]^T,\ \tilde{\varphi}=[\tilde{\varphi}_1,\cdots,\tilde{\varphi}_{N-1}]^T,\ \tilde{\psi}=[\tilde{\psi}_1,\cdots\tilde{\psi}_{N-1}]^T.$$

*1981年12月12日收到.

$\tilde{\varphi}$，$\tilde{\psi}$是格式的初始资料，而$\|u^n\|$为

$$\|u^n\|_2=\left(\sum_{j=1}^{N-1}|u_j^n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad 或 \quad \|u^n\|_{l_2}=\left(h\sum_{j=1}^{N-1}|u_j^n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(2)形稳定性不等式的建立与初始资料$\tilde{\varphi}$，$\tilde{\psi}$的选取（即原方程初始条件的离散方法）密切相关。

对（1）应用分离变量法，令$u_j^n=v^nW_j$代入，得到

$$\frac{W_{j+1}-2W_j+W_{j-1}}{W_j}=\frac{v^{n+1}-2v^n+v^{n-1}}{r^2v^n}\equiv\lambda$$

考虑到齐次边界条件，可得特征值问题

$$\begin{cases}W_{j+1}-2W_j+W_{j-1}=\lambda W_j\\ W_0=W_N=0\end{cases} \tag{3}$$

和对v^n的差分方程

$$v^{n+1}-2v^n+v^{n-1}=r^2\lambda v^n \tag{4}$$

由（3）可求得

$$\lambda_l=-4\sin^2\frac{l\pi}{2N}, \qquad W^{(l)}=[W_1^{(l)},\cdots,W_{N-1}^{(l)}]^T,\ l=1,2\cdots,N-1$$

其中

$$W_j^{(l)}=\sqrt{\frac{2}{N}}\sin\frac{lj\pi}{N},\ j=1,2\cdots,N-1$$

且$\|W^{(l)}\|_2=1$。由(4)，相应的$v_{(l)}^n$满足：

$$v_{(l)}^{n+1}-(2+r^2\lambda_l)v_{(l)}^n+v_{(l)}^{n-1}=0, \tag{4'}$$

若已求得$v_{(l)}^n$，则

$$u^n=\sum_{l=1}^{N-1}v_{(l)}^nW^{(l)},\ 且\|u^n\|_2=\left(\sum_{l=1}^{N-1}|v_{(l)}^n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(4′)的特征方程是

$$\zeta^2-(2+r^2\lambda_l)\zeta+1=0 \tag{5}$$

它的特征根ζ_1，ζ_2是$\zeta_{1,2}=1-2r^2\sin^2\frac{l\pi}{2N}\pm2r\sin\frac{l\pi}{2N}\sqrt{r^2\sin^2\frac{l\pi}{2N}-1}$，

所以

$$v_{(l)}^n=\alpha_l\zeta_{1l}^n+\beta_l\zeta_{2l}^n. \tag{6}$$

α_l，β_l由初始资料决定，若取初始资料为：

$$\begin{cases}u_j^0=\varphi(jh)\equiv\varphi j & (7)\\ \dfrac{u_j^1-u_j^0}{\tau}=\psi(jh)\equiv\psi_j & (8)\end{cases}$$

即 $$\tilde{\varphi}=[\varphi_1,\cdots,\varphi_{N-1}]^T,\ =\tilde{\psi}[\psi_1,\cdots,\psi_{N-1}]^T.$$

将 $\tilde{\varphi}$，$\tilde{\psi}$ 按特征函数展开：

$$\tilde{\varphi}=\sum_{l=1}^{N-1}a_l W^{(l)},\quad \tilde{\psi}=\sum_{l=1}^{N-1}b_l W^{(l)},$$

显然

$$\|\tilde{\varphi}\|_2=\left(\sum_{l=1}^{N-1}|a_l|^2\right)^{\frac{1}{2}},\qquad \|\tilde{\psi}\|_2=\left(\sum_{l=1}^{N-1}|b_l|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

这时可得 $v_{(l)}^n$ 的初始条件：$v_{(l)}^0=a_l\ \dfrac{v_{(l)}^1-v_{(l)}^0}{\tau}=b_l$。

由此可得 α_l，β_l 满足的方程组：

$$\begin{cases}\alpha_l+\beta_l=a_l\\ (1-\zeta_{1l})\alpha_l+(1-\zeta_{2l})\beta_l=-\tau b_l\end{cases}\tag{9}$$

解出 α_l，β_l 代入（6），得到

$$v_{(l)}^n=\frac{(1-\zeta_{2l})\zeta_{1l}^n-(1-\zeta_{1l})\zeta_{2l}^n}{\zeta_{1l}-\zeta_{2l}}a_n+\frac{\zeta_{1l}^n-\zeta_{2l}^n}{\zeta_{1l}-\zeta_{2l}}\tau b_l\tag{10}$$

若 $r>1$，由对二次方程（5）根模不大于 1 的条件[3]可知存在 l 使

$$\max[|\zeta_{1l}|,|\zeta_{2l}|]>1,\ \min[|\zeta_{1l}|,|\zeta_{2l}|]<1$$

因而 $|v_{(l)}^n|$ 无界，这时差分格式不稳定。

当 $r\leqslant1$ 时，ζ_1，ζ_2 可改写为：$\zeta_{1,2}=1-2r^2\sin^2\dfrac{l\pi}{2N}\pm i2r\sin\dfrac{l\pi}{2N}\sqrt{1-r^2\sin^2\dfrac{l\pi}{2N}}$

由于

$$|\zeta_{1l}-\zeta_{2l}|=4r\sin\frac{l\pi}{2N}\sqrt{1-r^2\sin^2\frac{l\pi}{2N}}\geqslant2r\sin\frac{\pi}{N}=2\frac{\tau}{h}\sin h\pi,$$

所以存在常数 M_1，使

$$\frac{\tau}{|\zeta_{1l}-\zeta_{2l}|}\leqslant M_1\tag{11}$$

对（10）中 a_n 前的系数记为 Δ_l，令 $\zeta_{1l}=e^{i\theta_l}$，则 $\zeta_{2l}=e^{-i\theta_l}$，即

$$\cos\theta_l=1-2r^2\sin^2\frac{l\pi}{2N},\sin\theta_l=2r\sin\frac{l\pi}{2N}\sqrt{1-r^2\sin^2\frac{l\pi}{2N}}$$

所以

$$\Delta_l\equiv\frac{(1-\zeta_{2l})\zeta_{1l}^n-(1-\zeta_{1l})\zeta_{2l}^n}{\zeta_{1l}-\zeta_{2l}}=\frac{\sin n\theta_l-\sin[(n-1)\theta_l]}{\mathrm{Sin}\theta_l}$$

当 $r<1$ 时，存在常数 M_2，使

$$|\Delta_l|=\left|\frac{2\sin\theta_l/2\cos(n-\frac{1}{2})\theta_l}{\mathrm{Sin}\theta_l}\right|\leqslant2\left|\frac{\sin\theta_l/2}{\sin\theta_l}\right|\leqslant M_2$$

但当 $r=1$ 时，$\theta_l=\dfrac{l\pi}{N}$，所以 $|\Delta_l|\,(l=1,\cdots,N-1)$ 非一致有界的，例如

$$|\Delta_{N-1}|\to\infty\ （当\ h\to0\ 时）。$$

由于 $\tilde{\varphi}$，$\tilde{\psi}$ 的任意性，可知对差分格式（1）的稳定性不等式

$$\|u^n\|_2\leqslant C(\|\tilde{\varphi}\|_2+\|\tilde{\psi}\|_2)\quad 或\ \|u^n\|_2\leqslant C\left(\|u^0\|_2+\left\|\frac{u^1-u^0}{\tau}\right\|_2\right)\tag{12}$$

成立的充要条件是 $r<1$。

有趣的是如果将初始资料（8）换为

$$\frac{u_j^1-u_j^{-1}}{2\tau}=\psi(jh)\equiv\psi_j \tag{13}$$

其中u_j^{-1}可利用（1）（7）和（13）消去，得到

$$u_j^1=\frac{r^2}{2}(\varphi_{j-1}+\varphi_{j+1})+(1-r^2)\varphi_j+\tau\psi_j \tag{14}$$

这时初始资料（7），（13）同差分格式（1）一样有$O(h^2+\tau^2)$的逼近阶。而且当$r=1$时也成立稳定性不等式

$$\|u^n\|_2\leqslant C\left(\|u^0\|_2+\left\|\frac{u^1-u^{-1}}{2\tau}\right\|_2\right) \tag{12'}$$

因由（7），（14）可得$v_{(l)}^n$的初始条件：

$$\begin{cases}v_{(l)}^0=a_l\\ v_{(l)}^1=\left(1-2r^2\sin^2\frac{l\pi}{2N}\right)v_{(l)}^0+\tau b_l\end{cases}$$

因此，代替（9），（6）中的α_l，β_l满足

$$\begin{cases}\alpha_l+\beta_l=a_l\\ \zeta_{1l}\alpha_l+\zeta_{2l}\beta_l=\left(1-2r^2\sin^2\frac{l\pi}{2N}\right)a_l+\tau b_l\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}\alpha_l=\frac{1}{2}a_l-\frac{\tau}{\zeta_{2l}-\zeta_{1l}}b_l\\ \beta_l=\frac{1}{2}a_l+\frac{\tau}{\zeta_{2l}-\zeta_{1l}}b_l\end{cases}$$

由（11）不难得到（11）成立的结论。

参 考 文 献

[1] Richtmyer, R.D. and Morton, K.W., Difference Methods for Initial-Value problem,Sec.Ed., John Wiley Sons(1967), pp.260-263.

[2] 李亚宾涅基 B.C.，菲里波夫 A.Φ.，差分方程的稳定性（吴文达等译），科学出版社（1961）。

[3] Young, D.M, Iterative Solution of Large Linear Systems, Academic Press(1971), p.176.

A Note on the Stability of Multi-Level Difference Schemes

Cao Zhihao

(Fudan University)

Abstract

In this note we discuss how to use finite Fourier method correctly to analysis the stability of mult-level difference schemes. As an example, we have showed that the classical explicit scheme with usual initial data for the initial-boundary problem of wave equation is not stable when the mesh ratio r = 1 and have also showed that we can modify one of the initial data to get stability when r = 1.