第25卷第2期 数学研究与评论 Vol.25, No.2
2005年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2005

文章编号: 1000-341X(2005)02-0307-04 文献标识码: A

分担值和正规族

章文华
(华东理工大学数学系，上海 200237)
(E-mail: zhangwenhua1226@hotmail.com)

摘 要: 设 $\mathcal{F}$ 是单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族， a 是一个非零的有穷复数，如果 $\forall f\in\mathcal{F}$, 满足
1) f 的零点是重级的;
2) f 和 f' IM 分担 a,
则 $\mathcal{F}$ 在 Δ 上正规. 相应于正规函数的结果也得到了证明.

关键词: 亚纯函数; 正规族; 分担值.
MSC(2000): 30D35, 30D45
中图分类: O174.52

1 引 言

设 D 是 C 上的区域， f 是 D 上的亚纯函数，并且 $a\in C$,

$$\bar{E}_f(a)=f^{-1}(\{a\})\cap D=\{z\in D:f(z)=a\}.$$

称 f 和 g IM 分担 a, 即 $\bar{E}_f(a)=\bar{E}_g(a)$.

一个亚纯函数被称为正规函数，即存在一个正数 M, 使得

$$f^\sharp(z)\le M,$$

其中 $f^\sharp(z)=\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$ 是 $f(z)$ 的球面导数.

Mues 和 Steinmetz 在 [1] 中证明了

定理 A 设 $f(z)$ 是一个非常数的亚纯函数, 如果 f 和 f' IM 分担三个不同的复数 a_1,a_2,a_3, 则 $f\equiv f'$.

相应地， Schwick 在 [3] 中证明了下述定理:

定理 B 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 上的亚纯函数族， a_1,a_2,a_3 是三个不同的复数，如果 $\forall f\in\mathcal{F}$, f 和 f' IM 分担 a_1,a_2,a_3, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规.

方明亮在 [2] 中证明了

定理 C 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 上的亚纯函数族， k 是一个正整数， a 是一个非零的有穷复数. 如果 $\forall f\in\mathcal{F}$,f 和 $f^{(k)}$ IM 分担 a 且 $f\neq 0$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规.

本文证明了如下结果:

定理 1 设 $\mathcal{F}$ 是单位圆盘 Δ 上的一族亚纯函数， a 是非零的有穷复数，如果 $\forall f\in\mathcal{F}$ 满足

1) f 的零点是重级的;

收稿日期: 2002-06-30

2) f 和 f'IM 分担 a,

则 $\mathcal{F}$ 在 Δ 上正规.

下面的例子说明定理 1 中的条件 f 的零点是重级的是必要的.

例 设 $\mathcal{F}=\{f_n: f_n=\frac{e^{(n+1)z}-a}{n+1}+a\}$, 其中 a 是一个非零的复数, 则 f 和 f' IM 分担 a, 但 $\mathcal{F}$ 在 Δ 上不正规.

定理 2 设 f 是复平面 C 上的亚纯函数, a 是非零的有穷复数, 如果 $\forall f\in\mathcal{F}$

1) f 的零点是重级的;

2) f 和 f' IM 分担 a,

则 f 是一个正规函数.

2 引理

引理 1[4] 设 $\mathcal{F}$ 是 Δ 上的一族亚纯函数, 如果 $\forall f\in\mathcal{F}$,$f(z)$ 的零点重级 $\geq k$ 且存在 $A\geq 1$, 使得当 $f(z)=0$ 时, $|f^{(k)}(z)|\leq A$, 则若 $\mathcal{F}$ 不正规, 那么对 $0\leq\alpha\leq k$, 存在

(a) 一个实数 r, $0<r<1$;

(b) 一个点列 z_n, $|z_n|<r$;

(c) 一个函数列 $f_n\in\mathcal{F}$;

(d) 正数列 $\varrho_n\to 0^+$,

使得 $\frac{f_n(z_n+\varrho_n\xi)}{\varrho_n^\alpha}\to g(\xi)$, 其中收敛按球面距离内闭一致收敛, 且 g 是 C 上的非常数亚纯函数,

$$g^\sharp(\xi)\leq g^\sharp(0)=kA+1.$$

引理 2[5] f 是有穷级亚纯函数, 若 f 有无穷多个重级零点, 则 f' 可取任意非零有穷复数无穷多次.

引理 3[6] 正规亚纯函数级至多为 2.

3 定理 1 的证明

$\mathcal{F}$ 不正规, 则由引理 1 知存在: $f_n\in\mathcal{F}$,$z_n\in\Delta$ 和 $\varrho_n\to 0^+$, 使得

$$g_n(\xi)=\frac{f_n(z_n+\varrho_n\xi)}{\varrho_n}\to g(\xi),$$

其中收敛按球面距离内闭一致收敛, 且 g 是 C 上的非常数亚纯函数, $g^\sharp(\xi)\leq g^\sharp(0)=k+1$. 由引理 3 知 g 为有穷级的亚纯函数. 我们可推出:

(i) $\bar{E}_g(0)\subset\bar{E}_{g'}(0)$;

(ii) $g'(\xi)\neq a$;

(iii) g 的极点是重级的.

事实上, 假设 $g(\xi_0)=0$, 因为 g 不恒为 0 , 则存在 $\xi_n\to\xi_0$, 使得

$$g_n(\xi_n)=\frac{f_n(z_n+\varrho_n\xi_n)}{\varrho_n}=0\quad(n\text{ 充分大}),$$

则 $f_n(z_n+\varrho_n\xi_n)=0$. 由 $\mathcal{F}$ 的假设条件有

$$f_n'(z_n+\varrho_n\xi_n)=0,\quad g_n'(\xi_n)=f_n'(z_n+\varrho_n\xi_n)=0.$$

因为 $g'(\xi_0)=\lim_{n\to\infty} g'_n(\xi_n)$, 故 g 的零点是重级的，即 $\bar{E}_g(0)\subset \bar{E}_{g'}(0)$.

现在假设 $g'(\xi_0)=a$, 我们可得 $g'(\xi)$ 不恒为 a.

因为如果 $g'(\xi)\equiv a$, 则 $g(\xi)=a\xi+b$,b 是一个常数，则 $g(\frac{-b}{a})=0, g'(\frac{-b}{a})=a$, 这与 $\bar{E}_g(0)\subset \bar{E}_{g'}(0)$ 矛盾.

因为 $g'(\xi_0)=a$ 但 $g'(\xi)$ 不恒为 a, 故存在 $\xi_n, \xi_n\to\xi_0$, 使得对充分大的 n 有

$$g'_n(\xi_n)=f'_n(z_n+\varrho_n\xi_n)=a.$$

所以 $g_n(\xi_n)=\frac{f_n(z_n+\varrho_n\xi_n)}{\varrho_n}=\frac{a}{\varrho_n}$, 令 $n\to\infty$ 得 $g(\xi_0)=\infty$, 这与 $g'(\xi_0)=a$ 矛盾. 因此 $g'(\xi_0)\neq a$.

设 $g(\xi_0)=\infty$, 因为 $g(\xi)\not\equiv\infty$, 所以存在一个闭圆盘 $K=\{\xi:|\xi-\xi_0|\leq\delta\}$, 使得当 n 足够大时，$\frac{1}{g}$ 和 $\frac{1}{g_n}$ 在 K 上都是全纯的，且 $\frac{1}{g_n}$ 一致收敛于 $\frac{1}{g}$, 因此在 K 上 $\frac{1}{g_n(\xi)}-\frac{\varrho_n}{a}\to\frac{1}{g(\xi)}$, 收敛为一致收敛. 因为 $\frac{1}{g}$ 不为常数，所以存在 $\xi_n, \xi_n\to\xi_0$, 使得当 n 足够大时，$\frac{1}{g_n(\xi)}-\frac{\varrho_n}{a}=0$, 由此知 $f_n(z_n+\varrho_n\xi_n)=a$, 因此 $g'_n(\xi_n)=f'_n(z_n+\varrho_n\xi_n)=a$. 这样

$$\left(\frac{1}{g(\xi)}\right)'|_{\xi=\xi_0}=\frac{-g'(\xi_0)}{g^2(\xi_0)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-g'_n(\xi_n)}{g_n^2(\xi_n)}=0,$$

所以 ξ_0 是 $g(\xi)$ 的重级极点.

因为 g 是有穷级的，g 的零点是重级的，$g'(\xi)\neq a$, 所以从引理 2 可知 $g(\xi)$ 只有有穷多个零点，由 Hayman 不等式可知 $g(\xi)$ 是一个有理函数.

下面我们令 $h(\xi)=a\xi-g(\xi)$, 则 $h'(\xi)=a-g'(\xi)\neq 0$.

如果 $h(\xi)$ 是一个多项式，则由 $h'(\xi)\neq 0$ 可知 $h(\xi)$ 的次数为 1, 不妨设 $h(\xi)=c\xi+d, c\neq 0$. 因此 $g(\xi)=(a-c)\xi-d$.

如果 $a=c$, 则 $g(\xi)$ 是常数，这与 $g(\xi)$ 不为常数矛盾. 所以 $a\neq c$, 但这又与 $\bar{E}_g(0)\subset \bar{E}_{g'}(0)$ 矛盾. 因此 $h(\xi)$ 不是一个多项式.

设 $h(\xi)=R(\xi)+\frac{P(\xi)}{Q(\xi)}$, 其中 P,Q,R 都是多项式，P,Q 互素，且 $\deg P<\deg Q$.

由 $h'(\xi)\neq 0$ 我们可推知 R 是一个常数，记 $R=l$, l 为常数. 所以

$$h'(\xi)=\frac{P'Q-Q'P}{Q^2}.$$

由 $h'(\xi)\neq 0$ 我们可推得 $P'Q-Q'P$ 的零点是 Q^2 的零点，记这些零点为 $a_1,a_2,\cdots,a_d$, 零点的级相应地记为 $m_1,m_2,\cdots,m_d$, 因为 $P(\xi)$ 和 $Q(\xi)$ 是互素的，所以我们可以看到 a_j 是 $Q(\xi)$ 的级为 $m_j+1 (j=1,2,\cdots,d)$ 的零点. 我们可以推出

$$\deg P+\deg Q-1=\deg(P'Q-Q'P)=\sum_{j=1}^{d}m_j=\sum_{j=1}^{d}(m_j+1)-d\leq \deg Q-d.$$

因此 $d=1, \deg P=0$, 所以 P 是常数，记 $P=m$, m 为常数且 $m\neq 0$. 所以

$$h(\xi)=l+\frac{m}{Q(\xi)},\quad h'(\xi)=\frac{-mQ'(\xi)}{Q^2(\xi)},$$

而且 Q' 的零点是 Q^2 的零点，这就意味着 $Q(\xi)=s(\xi+t)^k, k\in N, s\neq 0, s,t$ 都是常数. 因此

$$g(\xi)=a\xi-l-\frac{m}{s(\xi+t)^k}=\frac{s(a\xi-l)(\xi+t)^k-m}{s(\xi+t)^k}, m\neq 0.$$

设 $s(a\xi-l)(\xi+t)^k-m$ 的零点为 $c_1,c_2,\cdots,c_j$, 因为 $g(\xi)$ 的零点是重级的，所以 c_1 是 $[s(a\xi-l)(\xi+t)^k-m]'$ 的零点；又因为 $[s(a\xi-l)(\xi+t)^k-m]'=(\xi+t)^{k-1}[sa(\xi+t)+ks(a\xi-l)]$, 由 $c_1\neq -t$ 知，c_1 是 $sa(\xi+t)+ks(a\xi-l)$ 的零点；又因为 $\deg[sa(\xi+t)+sk(a\xi-l)]\leq 1$, 所以可得 c_1 是 $s(a\xi-l)(\xi+t)^k-m$ 的唯一的零点，且重级为 2. 这样 $s(a\xi-l)(\xi+t)^k-m=B(\xi-c_1)^2$, B 是不为零的常数. 进一步可以推得 $k=1$. 所以

$$g(\xi)=(a\xi-l)-\frac{m}{s(\xi+t)^k}=\frac{B(\xi-c_1)^2}{s(\xi+t)},$$

这与 g 的极点是重级的矛盾. □

4 定理 2 的证明

若 f 不是正规函数，则存在 $z_n\to\infty$, 使得 $\lim_{n\to\infty}f^\sharp(z_n)=\infty$. 记 $f_n(z)=f(z+z_n)$ 和 $\mathcal{F}=\{f_n\}$. 由 Marty's 正规定则可知，$\mathcal{F}$ 不正规. 但另一方面，因为 f_n 的零点是重级的，且 f_n 和 f_n'IM 分担 a, 由定理 1 可知 $\mathcal{F}$ 正规. 故矛盾. 定理 2 得证.

参考文献:

[1] MUES E, STEINMETZ N. *Meromorphe funktionen, die mit ihrer ableitung werte teilen* [J]. Manuscripta Math., 1969, **29**: 195–206.

[2] 方明亮. 关于分担值和正规族的一点注记 [J]. 数学研究, 1996, **4**: 29–32.
FANG Ming-liang. *A note on sharing values and normality* [J]. J. Math. Study, 1996, **4**: 29–32. (in Chinese)

[3] SCHWICK W. *Sharing values and normality* [J]. Arch. Math., 1992, **59**: 50–54.

[4] PANG Xue-cheng, ZALCMAN L. *Normal families and shared values* [J]. Bull. London Math. Soc., 2000, **3**: 325–331.

[5] BERGWEILER W, EREMENKO A. *On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order* [J]. Rev. Mat. Iber., 1995, **11**: 355–373.

[6] CLUNIE J, HAYMAN W K. *The spherical derivative of integral and meromorphic functions* [J]. Comment. Math. Helv., 1966, **40**: 117–148.

Shared Values and Normality

ZHANG Wen-hua
(Dept. of Math., East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China)

Abstract: Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions on the unit disc Δ, and a be a non-zero finite complex number. If for every $f\in\mathcal{F}$,
i) f and f' IM share a on Δ ;
ii) the zeros of $f(z)$ are multiple,
then $\mathcal{F}$ is normal on Δ. The corresponding results on normal function are also proved.

Key words: meromorphic function; shared values; normal family.