第18卷第4期　　数学研究与评论　　Vol.18 No.4
1998年11月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Nov. 1998

具偏差变元的Liénard型方程的周期解*

李　永　昆
(云南大学数学系, 昆明650091)

摘　要　在本文中, Liénard 型方程周期解存在性的结果被推广到具偏差变元的 Liénard 型方程

$$\ddot{x}+f[x(t-\sigma)]\dot{x}(t-\sigma)+\beta(t)g[x(t-\tau(t))]=p(t)=p(t+T).$$

关键词　Liénard 型方程, 周期解, 偏差变元
分类号　AMS(1991) 34K/CCL O175.6

Liénard 型方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=p(t)=p(t+T)$$

因具有较广泛的实际背景, 人们对其周期解的存在问题一直怀着强烈的兴趣, 现已有大量的工作[1-5]. 相对来说, 对具偏差变元的Liénard 型方程这方面的研究还比较少[6-8]. 本文分别在共振条件及某些单侧性条件下, 讨论具偏差变元的Liénard 型方程

$$\ddot{x}+f[x(t-\sigma)]\dot{x}(t-\sigma)+\beta(t)g[x(t-\tau(t))]=p(t)=p(t+T) \tag{1}$$

的周期解存在性. 其中f, g, p, β, τ均分别关于各自的变元在R 上连续, 且$p(t), \beta(t), \tau(t)$皆为T 周期函数, $\min_{t\in R}\beta(t)>0$, σ为常数.

设$X=\{x(t)\in C^1(R,R): x(t+T)=x(t)\}$, 在$X$ 中规定范数为$\|x\|=\max\{|x|_\infty, |\dot{x}|_\infty\}$, 其中$|x|_\infty=\max_{t\in R}|x(t)|$, 则$X$ 在此范数下为Banach 空间. 考虑X 中的算子方程

$$Lx=\lambda N(x,\lambda),\quad \lambda\in(0,1),$$

其中$L:\mathrm{Dom}L\cap X\to X$ 是线性算子. 同时定义投影算子P, Q 分别为$P: X\cap\mathrm{Dom}L\to\mathrm{Ker}L$, $x\to Px=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$, $Q: X\to X/\mathrm{Im}L$, $x\to Qx=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$. 由文献[9]有下面的Mawhin 连续引理.

引理　设X 是Banach 空间, L 是指标为0的Fredholm 算子, Ω是X 中的有界开集, 且$N: \bar{\Omega}\times[0,1]\to X$ 在$\bar{\Omega}$上是L-紧的, 如果下列条件成立

(a)　$Lx\neq\lambda N(x,\lambda)$, $\forall x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Dom}L$, $\lambda\in(0,1)$,

(b)　$QN(x,0)\neq 0$, $\forall x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L$, 且 $\deg\{QN(x,0), \Omega\cap\mathrm{Ker}L, 0\}\neq 0$,

那么方程$Lx=N(x,1)$在Ω中至少有一个解.

定理1　假设$f_1=\sup_{x\in R}|f(x)|<\frac{1}{T}$, 且条件

* 1995年9月28日收到. 1997年9月26日收到修改稿. 云南省应用基础研究基金资助项目.

$$\lim_{|x|\to+\infty}\sup\frac{g(x)}{x}\le r, \tag{2}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\operatorname{sgn}(x)g(x)=+\infty, \tag{3}$$

成立, 其中 $r<\frac{1-f_1T}{\beta_1T^2}$, $\beta_1=\max_{t\in R}\beta(t)$, 那么方程(1)至少存在一个 T 周期解.

证明 为用引理, 令

$$Lx=\ddot{x},N(x,\lambda)=-f[x(t-\sigma)]\dot{x}(t-\sigma)-\beta(t)g[x(t-\tau(t))]+\lambda p(t),$$

则易知 L 是指标为0的 Fredholm 算子, 对 X 中任意有界开集 Ω, $N(x,\lambda)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的, 对应算子方程 $Lx=\lambda N(x,\lambda)$ 有

$$\ddot{x}+\lambda f[x(t-\sigma)]\dot{x}(t-\sigma)+\lambda\beta(t)g[x(t-\tau(t))]=\lambda^2p(t),\ \lambda\in(0,1). \tag{4}$$

设 $x(t)$ 是(4)的任一 T 周期解. 由条件(3)知, 存在 $A_1>0$ 使得

$$\begin{cases}\beta(t)g[x(t-\tau(t))]-\lambda p(t)>\frac{1}{2}\beta(t)g[x(t-\tau(t))],x(t-\tau(t))>A_1,\\ \beta(t)g[x(t-\tau(t))]-\lambda p(t)<\frac{1}{2}\beta(t)g[x(t-\tau(t))],x(t-\tau(t))<-A_1,\\ x(t-\tau(t))g[x(t-\tau(t))]>0,\quad |x(t-\tau(t))|>A_1.\end{cases} \tag{5}$$

可以断言必存在 $t_0\in[0,T]$, 使得

$$|x(t_0-\tau(t_0))|\le A_1. \tag{6}$$

若(6)不成立, 则 $\forall s\in[0,T]$ 均有 $|x(s-\tau(s))|>A_1$, 积分(4)式得

$$\int_0^T\{\beta(t)g[x(t-\tau(t))]-\lambda p(t)\}dt=0. \tag{7}$$

若 $x(t-\tau(t))>A_1$, 则由(5)式得

$$\int_0^T\{\beta(t)g[x(t-\tau(t))]-\lambda p(t)\}dt>\frac{1}{2}\int_0^T\beta(t)g[x(t-\tau(t))]dt>0,$$

此与(7)式矛盾.

若 $x(t-\tau(t))<-A_1$, 则又由(5)式得

$$\int_0^T\{\beta(t)g[x(t-\tau(t))]-\lambda p(t)\}dt<\frac{1}{2}\int_0^T\beta(t)g[x(t-\tau(t))]dt<0,$$

这又与(7)式矛盾. 故(6)式成立.

记 $t_0-\tau(t_0)=KT+t_1$, K 为某整数, $t_1\in[0,T]$, 则 $|x(t_1)|\le A_1$. 因此, $\forall t\in[0,T]$ 有

$$x(t)=x(t_1)+\int_{t_1}^{t}\dot{x}(s)ds,$$

于是

$$|x|_\infty\le A_1+T|\dot{x}|_\infty. \tag{8}$$

由 $x(0)=x(T)$ 知, 存在 $\xi\in(0,T)$, 使得 $\dot{x}(\xi)=0$, 从而有

$$|\dot{x}(t)|=\left|\int_\xi^t\ddot{x}(s)ds\right|\le\int_0^T|\ddot{x}(t)|dt,$$

所以

$$|\dot{x}|_\infty\le\int_0^T|\ddot{x}|dt. \tag{9}$$

从条件(2)可知, 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $A_2(\geq A_1)$ 使得

$$|g[x(t-\tau(t))]| \leq (r+\epsilon)|x(t-\tau(t))|. \tag{10}$$

由(4)和(10)可得

$$\int_0^T |\ddot{x}| dt \leq \lambda \int_0^T |f[x(t-\sigma)]\dot{x}(t-\sigma)| dt + \lambda \int_0^T \beta(t)|g[x(t-\tau(t))]| dt + \lambda^2 \int_0^T |p(t)| dt$$

$$\leq f_1 T |\dot{x}|_\infty + \beta_1 \int_{E_1} |g[x(t-\tau(t))]| dt + \beta \int_{E_2} |g[x(t-\tau(t))]| dt + p_1 T$$

$$\leq T(f_1 |\dot{x}|_\infty + \beta_1(r+\epsilon)|x|_\infty + C), \tag{11}$$

其中 $E_1 = \{t \in [0, T]: |x(t-\tau(t))| \leq A_2\}$, $E_2 = \{t \in [0, T]: |x(t-\tau(t))| \geq A_2\}$, $p_1 = \max_{t \in R} |p(t)|$, C 为与 λ 无关的正常数. 由(9)和(11)可得

$$|\dot{x}|_\infty \leq \frac{T}{1-f_1 T}[\beta_1(r+\epsilon)|x|_\infty + C]. \tag{12}$$

取 $\epsilon > 0$ 适当小, 从(8)和(12)可知, 必存在与 λ 无关的常数 $M > 0$, 使得

$$|x|_\infty < M \text{ 和 } |\dot{x}|_\infty < M.$$

现在取 $\Omega = \{x \in X: \|x\| < M\}$, 则 $\forall x \in \partial\Omega$, $\forall \lambda \in (0, 1)$ 有

$$Lx \neq \lambda N(x, \lambda).$$

因为当 $x \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L = \partial\Omega \cap R$ 时, x 为常数且 $|x| = M$, 所以

$$QN(x, 0) = \frac{1}{T}\int_0^T \{-f[x(t-\sigma)]\dot{x}(t-\sigma) - \beta(t)g[x(t-\tau(t))]\} dt$$

$$= -\frac{1}{T}g(x)\int_0^T \beta(t) dt \neq 0.$$

作变换

$$F(x, \alpha) = \alpha x + \frac{1}{T}(1-\alpha)g(x)\int_0^T \beta(t) dt,$$

因 $\forall x \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L$ 及 $\alpha \in [0, 1]$, 有

$$xF(x, \alpha) = \alpha x^2 + \frac{1}{T}(1-\alpha)xg(x)\int_0^T \beta(t) dt > 0,$$

故 $F(x, \alpha) \neq 0$. 即 $F(x, \alpha)$ 为同伦变换, 于是

$$\deg\{QN(x, 0), \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0\} = \deg\{-\frac{1}{T}g(x)\int_0^T \beta(t) dt, \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0\}$$

$$= \deg\{-x, \Omega \cap R, 0\} \neq 0.$$

至此, 已证得了引理的条件均被满足, 所以方程(1)至少存在一个 T 周期解. 证毕.

由定理1可得

推论1 假设 $f_1 = \sup_{x \in R}|f(x)| < \frac{1}{T}$, 且条件(3)和条件

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0 \tag{13}$$

成立, 则方程(1)至少存在一个 T 周期解.

定理2 假设 $\sigma = 0$, 且条件(3)和条件

$$\limsup_{|x| \to +\infty} \frac{g(x)}{x} \leq r \tag{14}$$

成立, 其中 $r< 1/\beta_1 T^2$, $\beta_1=\max\limits_{t\in R}\beta(t)$, 则方程(1)至少存在一个 T 周期解.

证明　令 $Lx=\ddot{x}$, $N(x,\lambda)=-f(x)\dot{x}-\beta(t)g[x(t-\tau(t))]+\lambda p(t)$. 设 $x(t)$ 是方程

$$\ddot{x}+\lambda f(x)\dot{x}+\lambda\beta(t)g[x(t-\tau(t))]=\lambda^2 p(t) \tag{15}$$

的任一 T 周期解. 则与定理1的证明类似可知, 存在 $A_1>0$, 使得

$$|x|_\infty\le A_1+\int^T|\dot{x}|dt. \tag{16}$$

由条件(14)可知, 对任意的 $\epsilon_1>0$ 存在 $A_2(\ge A_1)$ 使得 $|g[x(t-\tau(t))]|\le(r+\epsilon_1)|x(t-\tau(t))|$, $|x(t-\tau(t))|\ge A_2$. 用 $x(t)$ 同乘(15)式的两边并积分得

$$-\int^T|\dot{x}|^2dt+\lambda\int^T\beta(t)x(t)g[x(t-\tau(t))]dt=\lambda^2\int^T x(t)p(t)dt,$$

从而

$$\begin{aligned}\int^T|\dot{x}|^2dt&\le|x|_\infty(\lambda\beta_1\int^T|g[x(t-\tau(t))]|dt+\lambda^2\int^T|p(t)|dt)\\&\le|x|_\infty(\beta_1\int_{E_1}|g[x(t-\tau(t))]|dt+\beta_1\int_{E_2}|g[x(t-\tau(t))]|dt+\int^T|p(t)|dt)\\&\le\beta_1(r+\epsilon_1)T|x|_\infty^2+C|x|_\infty,\end{aligned} \tag{17}$$

其中 E_1, E_2 的定义与定理1的证明中的相同, C 为与 λ 无关的正常数.

由(16)和(17)可得

$$|x|_\infty\le A_1+(T\int^T|\dot{x}|^2dt)^{1/2}\le A_1+\sqrt{\beta_1(r+\epsilon_1)T}|x|_\infty+\sqrt{CT}|x|_\infty^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

取 ϵ_1 适当小, 由(17)和(18)可知, 必存在与 λ 无关的常数 $M_1>0$, 使得

$$|x|_\infty<M_1,\quad\int^T|\dot{x}|^2dt<M_1.$$

由(15)和(18)及 $f,g\in C(R,R)$ 可得

$$\begin{aligned}\int^T|\ddot{x}|dt&\le\lambda\int^T|f(x)\dot{x}|dt+\lambda\int^T\beta(t)|g[x(t-\tau(t))]dt+\lambda^2\int^T|p(t)|dt\\&<C_1\int^T|\dot{x}|dt+\beta_1C_2T+p_1T\\&\le C_1\sqrt{TM_1}+\beta_1C_2T+p_1T\overset{\triangle}{=}M_2,\end{aligned}$$

其中 $C_1=\max\limits_{|x|\le M_1}|f(x)|$, $C_2=\max\limits_{|x|\le M_1}|g(x)|$, $p_1=\max\limits_{t\in R}|p(t)|$. 于是

$$|\dot{x}|_\infty\le\int^T|\ddot{x}|dt<M_2.$$

以下与定理1的证明类似可知, 方程(1)至少存在一个 T 周期解. □

由定理2可得

推论2　假设 $\sigma=0$, 且条件(3)和(13)成立, 则方程(1)至少存在一个 T 周期解.

定理3　假设 $\sigma=0$, $\int^T p(t)dt=0$, 且存在常数 $A,B>0$, 使得

1)　当 $x\le -A$ 时, $g(x)\ge -B$;

2)　当 $|x|\ge A$ 时, $xg(x)>0$,

则方程(1)至少存在一个 T 周期解.

证明　令

$$Lx=\ddot{x}, N(x,\lambda)=-f(x)\dot{x}-\beta(t)g[x(t-\tau(t))]+p(t),$$

设 $x(t)$ 是方程

$$\ddot{x}+\lambda f(x)\dot{x}+\lambda\beta(t)g[x(t-\tau(t))]+\lambda p(t)=0 \tag{19}$$

的任一 T 周期解, 积分(19)式得

$$\int_0^T\beta(t)g[x(t-\tau(t))]dt=0. \tag{20}$$

记 $I_1=\{t\in[0,T]: x(t-\tau(t))>A\}$, $I_2=\{t\in[0,T]: x(t-\tau(t))\le A\}$. 由条件1), 2)知, 必存在 $A_1>0$, 当 $x\le A$ 时, $|g(x)|\le A_1$, 因此

$$\int_{I_1}\beta(t)g[x(t-\tau(t))]dt=-\int_{I_2}\beta(t)g[x(t-\tau(t))]dt$$
$$\le\int_{I_2}\beta(t)|g[x(t-\tau(t))]|dt\le\beta_1A_1T,$$

其中 $\beta_1=\max_{t\in R}\beta(t)$. 由上式和条件2)可得

$$\int_0^T\beta(t)|g[x(t-\tau(t))]|dt=\int_{I_1}\beta(t)g[x(t-\tau(t))]dt+\int_{I_2}\beta(t)|g[x(t-\tau(t))]|dt$$
$$\le 2\beta_1A_1T. \tag{21}$$

由2)及(20)知, 必存在 $t_0\in[0,T]$ 使得

$$|x(t_0-\tau(t_0))|\le A.$$

利用上式仿定理1的证明可得

$$|x|_\infty\le A+\int_0^T|\dot{x}|dt, \tag{22}$$

$$|\dot{x}|_\infty\le\int_0^T|\ddot{x}|dt. \tag{23}$$

用 $x(t)$ 同乘(19)式的两边并积分得

$$-\int_0^T|\dot{x}|^2dt+\lambda\int_0^T\beta(t)x(t)g[x(t-\tau(t))]dt=\lambda\int_0^T x(t)p(t)dt, \tag{24}$$

由(21)和(24)式得

$$\int_0^T|\dot{x}|^2dt\le|x|_\infty\left(\int_0^T\beta(t)|g[x(t-\tau(t))]|dt+\int_0^T|p(t)|dt\right)$$
$$\le|x|_\infty(2\beta_1A_1T+p_1T), \tag{25}$$

其中 $p_1=\max_{t\in R}|p(t)|$, 由(22)和(25)式有

$$|x|_\infty\le A+\left(T\int_0^T|\dot{x}|^2dt\right)^{1/2}\le A+\sqrt{2\beta_1A_1+p_1}\,T|x|_\infty^{1/2}.$$

从上式可知, 必存在与 λ 无关的常数 $M_1>0$, 使得

$$|x|_\infty<M_1 \text{ 和 } \int_0^T|\dot{x}|dt<M_1.$$

以下类似于定理2的证明可知, 方程(1)至少存存在一个 T 周期解. □

类似于定理3可证

定理4　假设 $\sigma=0$, $\int_0^T p(t)dt=0$, 且存在常数 $A, B>0$, 使得

1)　当 $x \geq A$ 时, $g(x) \leq B$,

2)　当 $|x| \geq A$ 时, $xg(x) > 0$,

则方程(1)至少存在一个 T 周期解.

注1　定理1—4和推论1, 2对 $\tau(t)$ 的符号没有任何限制, 推论1和定理2对 σ 的符号亦无限制.

注2　在方程(1)中, 当 $f(x) \equiv 0$, 即方程(1)退化为Duffing 型方程时, 定理1—4和推论1, 2仍成立. 此时定理3, 4包含和推广了文[10]的结果.

参 考 文 献

1 Villari G. *Periodic solutions of Liénard equation*. J. Math. Anal. Appl., 1982, **86**: 379- 386

2 Mawhin J L. *An extension of a theorem of A. C. Lazer on forced nonlinear oscillations*. J. Math. Anal. Appl., 1972, **40**: 20- 29

3 Villari G. *On the existence of periodic solutions for Liénard equation*. Nonlinear Anal., 1983, **7**: 71- 78

4 Omari P. Villari G and Zanolin F. *Periodic solutions of the Liénard equation with one-sided growth restrictions*. J. Differential Equations, 1987, **67**: 278- 293

5 Mawhin J L and Ward J R. *Periodic solutions of some forced Liénard differential equations at resonance*. Arch. Math., 1983, **41**: 337- 351

6 Nussbaum R D. *Periodic solutions of some nonlinear, autonomous functional differential equations* II. J. Differential Equations, 1973, **14**: 360- 394

7 Iannacci R and Nkashama M N. *On periodic solutions of forced second order differential equations with a deviating argument*. Lecture Notes in Math., 1151, Springer-Verlag, 1984, 224- 232

8 Grafton R B. *Periodic solutions of certain Liénard equation with delay*. J. Differential Equations, 1972, **11**: 519- 527

9 Gaines R E. Mawhin J L. *Coincidence degree and nonlinear differential equations*. Lecture Notes in Math., 568, Springer-Verlag, 1977.

10 黄先开, 向子贵. 具有时滞的Duffing 型方程 $\ddot{x} + g(x(t-\tau)) = p(t)$ 的2π周期解. 科学通报, 1994, **39**: 201- 203

Periodic Solutions of the Liénard Equation with Deviating Arguments

Li Yongkun

(Dept. of Math., Yunnan University, Kunming 650091)

Abstract

In this paper, some results of the existence of periodic solutions for the Liénard equation are generalized to the Liénard equation with deviating arguments

$$\ddot{x} + f[x(t-\sigma)]\dot{x}(t-\sigma) + \beta(t)g[x(t-\tau(t))] = p(t) = p(t+T).$$

Keywords Liénard equation, periodic solution, deviating argument