第15卷第3期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 3
1995年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1995

一类双参数变系数递推关系的解公式*

余 长 安
(武汉大学数学系，430072)

摘 要 本文给出了一类依赖于两个参数的递推关系的明显表达式.

关键词 两个参数，变系数，显式解.
分类号 AMS(1991) 05A10/CCL O157.1

文献1讨论了单参数的一般三项递推关系的解的表达形式. 本文着重研讨双参数的递归关系的解的结构. 有关结论在其理论与实际方面，都有一定的意义.

首先，对文中某些符号作简单说明：

符号 $N_m=n_1+n_2+\cdots+n_m$($n_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 皆为非负整数；约定 $m=0$ 时，$n_m=N_m=0$. 求和号

$$\sum_{N_m\leqslant l}|=\sum_{n_1=0}^{l}\sum_{n_2=0}^{l-n_1}\cdots\sum_{n_m=0}^{l-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1}}|\quad(m\geqslant 1,l>0),$$

若 $l<0$，则设定 $\sum\limits_{N_m\leqslant l}=0$；若 $m=0$，且 $l\geqslant 0$，则规定 $\sum\limits_{N_m\leqslant l}=1$. 设 $m\leqslant 0$ 时，$\prod\limits_{k=1}^{m}f(n_k)=1$.

为使书写简明，我们还使用如下记号：

$$F(i,m,l,p;j)=\begin{cases}\sum\limits_{N_m\leqslant l}\{\{\prod\limits_{k=1}^{m}\{\prod\limits_{\lambda_k=1}^{n_k}f(i-\lambda_k-p(k-1)+1-N_{k-1},j-k+1)\}\} \\ \quad\cdot\{\prod\limits_{\lambda_{m+1}=1}^{l-N_m}f(i-pm+1-\lambda_{m+1}-N_m,1)\} \\ \quad\cdot\{\prod\limits_{q=1}^{m}g(i-p(q-1)-N_q,j-q+1)\}\}\quad l\geqslant 0, \\ 0\quad l<0,\end{cases}\tag{1}$$

其中 i,j,p 均为非负整数.

现给出本文的主要结论：

定理 依赖于两个参数的定解问题

$$\text{(A)}\quad\begin{cases}u_{i,j}=f(i,j)u_{i-1,j}+g(i,j)u_{i-p,j-1}, & (2)\\ u_{1,1}=c_1,u_{i,j}=0\ (i<1\text{ 或 }j<1\text{ 或 }i<p(j-1)) & (3)\end{cases}$$

(其中 p 为正整数，$f(i,j),g(i,j)(i,j=1,2,\cdots)$ 可取任意常数)的解可表为

$$u_{i,j}=\{F(i,j-1,i-1-p(j-1),p;j)\}c_1$$

* 1992年7月10日收到. 94年4月21日收到修改稿. 国家自然科学基金与博士点基金资助课题.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$= \sum_{N_{j-1}\leqslant i-1-p(j-1)} \{\{\prod_{k=1}^{j-1}\{\prod_{\lambda_k=1}^{n_k} f(i-\lambda_k-p(k-1)+1-N_{k-1}, j+1-k)\}\}$$

$$\cdot\{\prod_{\lambda_j=1}^{i-1-p(j-1)-N_{j-1}} f(i-p(j-1)+1-\lambda_j-N_{j-1},1)\}$$

$$\cdot\{\prod_{q=1}^{j-1} g(i-p(q-1)-N_q, j+1-q)\}\}c_1 \quad (i,j=1,2,\cdots). \tag{4}$$

证明 对(i,j)用数学归纳法证之(取$c_1=1$):

先验证下列归纳基础的正确性:

$$u_{1,j} = F(1,j-1,1-1-p(j-1),p;j) \quad (j\geqslant 1), \tag{5}$$

$$u_{i,1} = F(i,1-1,i-1-p(1-1),p;1) \quad (i\geqslant 1). \tag{6}$$

在(5)式中,当$j=1$时,由(1)知有$u_{1,1}=1$;而当$j>1$时,因$-p(j-1)<0$,亦由(1)知有$u_{1,j}=0$.注意到初始条件(3),便知(5)式满足问题(A).

至于(6)式,由(1)知其展式为

$$u_{i,1} = \prod_{\lambda_1=1}^{i-1} f(i+1-\lambda_1,1). \tag{7}$$

而此时($j=1$),递推关系(2)已退化为

$$u_{i,1} = f(i,1)u_{i-1,1}. \tag{8}$$

注意到(3)中相应条件,易知式(7)为(8)式之解.亦即是(6)也满足问题(A).

于是,可作下述归纳假设:

$$u_{i',j} = F(i',j-1,i'-1-p(j-1),p;j) \quad (i'<i), \tag{9}$$

$$u_{i,j'} = F(i,j'-1,i-1-p(j'-1),p;j') \quad (j'<j). \tag{10}$$

今以此为前提,进行归纳推理:

由问题(A)中递推关系式(2),可得

$$u_{i,j} = f(i,j)u_{i-1,j} + g(i,j)u_{i-p,j-1}$$

$$= f(i,j) \sum_{N_{j-1}\leqslant i-2-p(j-1)} \{\{\prod_{k=1}^{j-1}\{\prod_{\lambda_k=1}^{n_k} f(i-1-\lambda_k-p(k-1)$$

$$+1-N_{k-1}, j+1-k)\}\}$$

$$\cdot\{\prod_{\lambda_j=1}^{i-2-p(j-1)-N_{j-1}} \{f(i-1-p(j-1)+1-\lambda_j-N_{j-1},1)\}$$

$$\cdot\{\prod_{q=1}^{j-1} g(i-1-p(q-1)-N_q, j+1-q)\}\}$$

$$+ g(i,j) \sum_{N_{j-2}\leqslant i-1-p-p(j-2)} \{\{\prod_{k=1}^{j-2}\{\prod_{\lambda_k=1}^{n_k} f(i-p-\lambda_k-p(k-1)$$

$$+1-N_{k-1}, j-k)\}\}$$

$$\cdot\{\prod_{\lambda_{j-1}=1}^{i-p-1-p(j-2)-N_{j-2}} f(i-p-p(j-2)+1-\lambda_{j-1}-N_{j-2},1)\}$$

$$\cdot\{\prod_{q=1}^{j-2} g(i-p-p(q-1)-N_q, j-q)\}\}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n_1=0}^{i-2-p(j-1)} \sum_{n_2=0}^{i-2-p(j-1)-n_1} \cdots \sum_{n_{j-1}=0}^{i-2-p(j-1)-N_{j-2}} \{\{[\prod_{\lambda_1=1}^{n_1+1} f(i-\lambda_1+1,j)] \\
&\quad \cdot \{\prod_{k=2}^{j-1}\prod_{\lambda_k=1}^{n_k} f(i-1-\lambda_k-p(k-1)+1-N_{k-1},j-k+1)\}\}\} \\
&\quad \cdot \{\prod_{\lambda_j=1}^{i-2-p(j-1)-N_{j-1}} \{f(i-1-p(j-1)+1-\lambda_j-N_{j-1},1)\} \\
&\quad \cdot \{\prod_{q=1}^{j-1} g(i-1-p(q-1)-N_q,j-q+1)\}\} \\
&\quad + \sum_{n_1=0}^{i-1-p-p(j-2)} \sum_{n_2=0}^{i-1-p-p(j-2)-n_1} \cdots \sum_{n_{j-2}=0}^{i-1-p-p(j-2)-N_{j-3}} \{\{\prod_{k=1}^{j-2}\{\prod_{\lambda_k=1}^{n_k} \\
&\quad \cdot f(i-p-\lambda_k-p(k-1)+1-N_{k-1},j-k)\}\} \\
&\quad \cdot \{\prod_{\lambda_{j-1}=1}^{i-1-p-p(j-2)-N_{j-2}} f(i-p-p(j-2)+1-\lambda_{j-1}-N_{j-2},1)\} \\
&\quad \cdot \{\prod_{q=0}^{j-2} g(i-p-p(q-1)-N_q,j-q)\}\}\ (i,j\geqslant 1).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

在(11)式中，第一和式利用恒等变换 $\sum_{n_1=0}^{i-2-p(j-1)} = \sum_{n_1=1}^{i-1-p(j-1)} 1$，第二和式前添上 $\sum_{n_1=0}^{0}$，经整理，便有

$$
\begin{aligned}
u_{i,j} &= \sum_{n_1=1}^{i-1-p(j-1)} \sum_{n_2=0}^{i-1-p(j-1)-n_1} \cdots \sum_{n_{j-1}=2}^{i-1-p(j-1)-N_{j-2}} \{\{[\prod_{\lambda_1=1}^{n_1} f(i-\lambda_1+1,j)] \\
&\quad \cdot \{\prod_{k=2}^{j-1}\{\prod_{\lambda_k=1}^{n_k} f(i-1-\lambda_k-p(k-1)+1-(N_{k-1}-1),j-k+1)\}\}\} \\
&\quad \cdot \{\prod_{\lambda_j=1}^{i-2-p(j-1)-(N_{j-1}-1)} f(i-1-p(j-1)+1-\lambda_j-(N_{j-1}-1),1)\} \\
&\quad \cdot \{\prod_{q=1}^{j-1} g(i-1-p(q-1)-N_{j-1}-1),j-q+1)\}\} \\
&\quad + \sum_{n_1=0}^{0} \sum_{n_2=0}^{i-1-p-p(j-2)-n_1} \cdots \sum_{n_{j-1}=0}^{i-1-p-p(j-2)-N_{j-2}} \{\{\prod_{k=1}^{j-1}\cdot\{\prod_{\lambda_k=1}^{n_k} f(i-p \\
&\quad -\lambda_k-p(k-1)+p-1-N_{k-1},j-k+1)\}\} \\
&\quad \cdot \{\prod_{\lambda_j=1}^{i-1-p(j-2)-p-N_{j-1}} f(i-p-p(j-2)+1-\lambda_j-N_{j-1},1)\} \\
&\quad \cdot \{\prod_{q=1}^{j-1} g(i-p(q-1)-N_q,j-q+1)\}\} \\
&= \sum_{n_1=1}^{i-1-p(j-1)} \sum^{i-1-p(j-1)-n_1} \cdots \sum_{n_{j-1}=0}^{i-1-p(j-1)-N_{j-2}} \{\{\prod_{k=1}^{j-1}\{\prod_{\lambda_k=1}^{n_k} f(i-\lambda_k \\
&\quad -p(k-1)+1-N_{k-1},j-k+1)\}\}\{\prod_{\lambda_j=1}^{i-1-p(j-1)-N_{j-1}} f(i-p(j-1)
\end{aligned}
$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$
\begin{aligned}
&+1-\lambda_j-N_{j-1},1)\}\cdot\{\prod_{q=1}^{j-1}g(i-p(q-1)-N_q,j-q+1)\}\\
&+\sum_{n_1=0}^{0}\ \sum_{n_2=0}^{i-1-p(j-1)-n_1}\cdots\sum_{n_{j-1}=0}^{i-1-p(j-1)-N_{j-2}}\cdot\{\prod_{k=1}^{j-1}\{\prod_{\lambda_k=1}^{n_k}f(i-\lambda_k\\
&-p(k-1)+1-N_{k-1},j-k+1)\}\}\\
&\cdot\{\prod_{\lambda_j=1}^{i-1-p(j-2)-N_{j-1}}f(i-p(j-1)+1-\lambda_j-N_{j-1},1)\}\\
&\cdot\{\prod_{q=1}^{j-1}g(i-p(q-1)-N_q,j-q+1)\}\}\ (i,j\geqslant 1).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

根据恒等关系式 $\sum_{n_1=0}^{0}1+\sum_{n_1=1}^{i-1-p(j-1)}1=\sum_{n_1=0}^{i-1-p(j-1)}1$，将上式中的两和式合并，联系到展开式(1)，立知(12)式即为公式(4)(取 $c_1=1$). 证毕.

参 考 文 献

[1] 余长安，三项非齐次变系数递归关系的解的结构，武汉大学学报(自然科学版)，1(1992)：117—119.

[2] L. C. Liu(魏万迪译)，组合学导论，四川大学出版社，1987，56—60.

[3] 居规彰，三项齐次递推式的一般解公式，数学年刊，1981，2(4)：431—436.

[4] H. Levy and F. Lessman, *Finite Difference Equations*, The Macmillan Company, 1961,

A Formula of Solutions For a Class of Recurrence Relation of Variable Coefficients with Two Parameters

Yu Chang'an
(Dept. of Math., Wuhan Univ.)

Abstract

In this paper an explicit formula is given for the solution of a class of recurrence relation with variable coefficients having two parameters

$$u_{i,j}=f(i,j)u_{i-1,j}+g(i,j)u_{i-p,j-1},$$

$$u_{1,1}=c_1,u_{i,j}=0(i<1 \text{ or } j<1 \text{ or } i<p(j-1)),$$

where $i,j=1,2,\cdots;f(i,j)$ and $g(i,j)(i,j\geq 1)$ are variable numbers; $p\geq 1;c_1$ is arbitrary constant.

Keywords recurrence relation, variable coefficients, explicit formula of solution.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.