第21卷第2期 2001年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 21 No. 2 May 2001

具非负曲率完备非紧曲面的几何性质*

詹华税
(集美大学基础部，福建 厦门 361021)

摘　要：本文证明了单连通完备非紧具非负曲率之曲面的任一测地线 $\gamma:[0,+\infty)\to M$ 均趋于∞处这一几何性质，指出了一般的高维流形不具有此性质. 本文还证明了单连通完备非紧具非负曲率的曲面的割迹与第一共轭轭迹是一致的；并且讨论了一般高维流形的共轭点与测地线的关系.

关键词：曲面；非负曲率；测地线；割迹.
分类号：AMS(1991) 53C20/CLC O186.16
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2001)02-0305-06

1 引　言

六十年代末到七十年代初，D. Gromoll 和 W. Meyer, J. Cheeger 和 D. Gromoll 等对具非负曲率的完备非紧的黎曼流形 M 的拓扑性质等作了系统的研究，得到了诸如具正曲率完备非紧流形与 R^n 微分同胚；具非负曲率的完备非紧流形与其核心的法丛微分同胚等经典结果，参见[1]. 从中还知道，对于具正曲率的完备非紧流形，其上任意测地线 $\gamma:[0,+\infty)\to M$ 都趋于∞处. 但这个性质对于具非负曲率的流形显然不对. 不过，如果还限制流形是单连通的，那情况又将如何？本文在 $dim M=2$ 即是曲面的情况下证明了上述每一测地线都趋于∞处的性质；同时指出当维数≥3 时，单连通的流形也不具有此性质.

由[1]还知道，单连通完备非紧曲面的核心退化为一点(因此曲面与 R^2 微分同胚，但同胚映射一般不是不是指数映射)，且由该点即核心出发的测地线均趋于∞，因此本文之上述结果是对这一事实加以推广，即该曲面上任何点均有此性质.

本文要讨论的另一个主要问题是割迹与第一共轭迹的关系(参见 [7],[8],[9]).

2 无共轭点测地线

首先引入

* 收稿日期：1998-04-08；修订日期：1999-12-02
基金项目：集美大学科研基金资助项目(Z. 39911)
作者简介：詹华税(1966-)，男，硕士，副教授.
E-mail：huashui@263.net

引理 1 设 M 为完备非紧具非负曲率的黎曼流形，$\sigma,\tau:[0,+\infty)\to M$ 为 M 中之测地线，$\sigma(0)=\tau(0)$，而且 σ 是一测地射线，则

(i) 若 $\langle\dot\sigma(0),\dot\tau(0)\rangle>0$，则 τ 趋于 ∞.

(ii) 若 $\langle\dot\sigma(0),\dot\tau(0)\rangle>0$ 且 τ 不趋于 ∞；记 V 是由 $\dot\sigma$ 生成的沿 τ 平移而得到的向量场，则

$$[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to\exp_{\tau(t)}sV(t)$$

定义了一平坦的全测地长方形.

引理 2 设 M 为完备非紧具非负曲率的曲面，$\gamma:(-\infty,+\infty)\to M$ 是一无共轭点测地线（即 $\forall\, p\in\gamma$，p 在 γ 上无共轭点）的充要条件是其上之截曲率 $k(\gamma)=0$.

其中，引理 1 是 [1] 之定理 8·22，引理 2 是[10] 的一个明显推论. 下面将证明

定理 1 设 M 为完备非紧具非负曲率之曲面，$S\subset M$ 为 M 中之紧集，若 $\gamma:(-\infty,+\infty)\to M$ 为一测地线且 $\gamma\subset S$，则截曲率 $k(\gamma)=0$，即 γ 为无共轭点测地线.

证明 因为 M 为非紧，熟知对 $\forall\, p\in\gamma$，有测地射线 $\sigma_p:[0,+\infty)\to M,\sigma(0)=p$. 若 $\langle\dot\sigma_p(0),\dot\gamma(p)\rangle\neq 0$，则

$$\langle\dot\sigma_p(0),\dot\gamma(p)\rangle>0\text{ 或 }\langle-\dot\sigma_p(0),\dot\gamma(p)\rangle>0.$$

不论哪种情况，由引理 1 之(i) 知 γ 都不可能包含于 S 之中，故

$$\langle\dot\sigma_p(0),\dot\gamma(p)\rangle=0.$$

所以由引理 1 之(ii) 知 $k(p)=0$. 又由 p 之任意性知 $k(\gamma)=0$，所以由引理 2 知 γ 为无共轭点测地线.

注 1 定理 1 的结论不能推广到 3 维或 3 维以上的流形. G. Walschap 在[6] 中证明了：设 n 维($n\geqslant 2$) 球面 S^n 配有具正曲率的黎曼度量，则 S^n 上的任一 2 维向量丛都允许一具非负曲率的黎曼度量使得该向量丛的核心 S 与 S^n 等距. 此时 $\gamma:(-\infty,+\infty)\to S\subset M$ 当然不是无共轭点测地线. 又利用[5]、[10、11] 等，易证明如下

引理 3 设 M 为 3 维具非负曲率的单连通完备非紧黎曼流形，则 $M=R\times N$ 或与 $\mathbf{R}^3$ 微分同胚. 其中 N 是具非负曲率曲面.

现进一步分析，设 M 为满足引理 3 之流形，熟知其核心 S 满足 $O=\dim S\leqslant 2$. 若 M 不与 R^3 微分同胚，则 $\dim S>O$. 又由于 M 单连通及 $i:S\to M$ 是同伦映射，S 亦为单连通且为紧致具非负曲率，由单值化定理 S 只能是标准球面 S^2. 因此此时 S^2 中的任一测地线 $\subset M$ 都不是无共轭点测地线.

3 具非负曲率非紧曲面

引理 4 设 M 为完备非紧具非负曲率单连通之曲面，$S\subset M$ 是紧致全凸的，则存在常数 $L=L(S)>0$ 使得任意包含于 S 中的正规测地线都有长度 $\leqslant L$.

证明 显然，若设结论不成立，则存在正规测地线序列 $\{\gamma_n:[-n,n]\to S\}$ 具长度 $2n$，由 S 之紧致性无妨设 $\gamma_n(0)\to p\in S$. 并且由于 $|\dot\gamma(0)|=1$，所以无妨设 $\dot\gamma_n(0)\to Z$. 令

$$\gamma(t)=\exp_p(tZ),\forall\, t\in(-\infty,+\infty),$$

则由 S 之紧致凸性知 $\gamma\subset S$. 从而由定理 1 知 γ 为无共轭点测地线. 由于 $\gamma\subset S$，因此 $\gamma|_0^{+\infty}$ 不

可能是射线，即存在 $q \in \gamma|_0^{+\infty}$ 为 p 之割点，此时熟知存在着另一条正规测地线 γ_1 连接 p,q 且

$$L(\gamma_1|_p^q) = L(\gamma_1|_p^q) = t_o > 0.$$

于是当限制 $t \in [0,t_0]$ 时，γ 与 γ_1 便范围出 M 中的一面积有限的部分，现记其闭包为 $I(\gamma,\gamma_1)$；并无妨设其直径 $dia\ I(\gamma,\gamma_1) = A > 0$. 同时由定理 1 之分析知，由 p 出发的射线 σ_p，由 q 出发之射线 σ_q 分别与 $\dot\gamma(0),\dot\gamma(t_0)$ 垂直. 而 $\dot\gamma_1(0)$ 与 $\dot\sigma_p(0)$ 之夹角（记之为 $\angle(\dot\gamma_1(0),\dot\sigma_p(0))$），$-\dot\gamma_1(t_0)$ 与 $\dot\sigma_q(0)$ 夹角只有以下三种可能.

(a) $\angle(\dot\gamma_1(0),\dot\sigma_p(0)) > \frac{\pi}{2}$ 且 $\angle(-\dot\gamma_1(t_0),\dot\sigma_p(0)) > \frac{\pi}{2}$. 此时由引理 1 之(i) 知 γ_1 的两端必将都趋于 ∞，现对任意给定的正数 $\varepsilon > 0$，选取 $S_0 > 0$ 使得

$$d(p,\gamma_1(S_0)) > A + \varepsilon. \tag{1}$$

由 M 之单连通性，可选取由 p 出发的正规测地线序列 δ_n 使得对足够大的 n 有

$$\dot\delta_n(0) \neq \dot\gamma_1(0), \dot\delta_n(0) \neq \dot\gamma(0). \tag{2}$$

$$0 < \angle(\dot\delta_n(0),\dot\gamma(0)) < (\dot\gamma_1(0),\dot\gamma(0)).$$

并且当 $n \to \infty$ 时有 $\dot\delta_n(0) \to \dot\gamma_1(0)$，从而 $\delta_n \to \gamma_1$. 所以对上述的 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时有

$$\varepsilon > d(\delta_n(s_0),\gamma_1(s_0)) \geqslant d(\gamma_1(s_0),p) - d(p,\delta_n(s_0)),$$

$$d(p,\delta_n(s_0)) > d(\gamma_1(s_0),p) - \varepsilon > A + \varepsilon - \varepsilon = A, (\text{由}(1)).$$

即 δ_n 必交于 γ 或 γ_1 的某一点而离开 $I(\gamma,\gamma_1)$. 无妨设 δ_n 都与 γ 或 γ_1 相交（必要时选取子列）. 下面仅讨论都与 γ 相交之情形（都与 γ_1 相交情形完全类似讨论）. 设 $\delta_n > 0, t_n > 0$ 满足

$$\delta_n(s_n) = \gamma(t_n), \quad t_n \leqslant t_0,$$

因此

$$\exp_p(s_n\dot\delta_n(0)) = \delta_n(s_n) = \dot\gamma(t_n) = \exp_p(t_n\dot\gamma(0)) \to \exp_p(t_0\dot\gamma(0)) = q;$$

$$s_n\dot\delta_n(0) \neq t_n\dot\gamma(0), (\text{由}(2))$$

此即说明在 $t_0\dot\gamma(0)$ 的任何邻域内 $\exp_p$ 都非一对一的，从而 $d\exp_p$ 在 $t_0\dot\gamma(0)$ 处奇异，即 q 为 p 之共轭点，这便与 γ 为无共轭点测地线矛盾.

(b) $\angle(\dot\gamma_1(0),\dot\sigma_p(0)) < \frac{\pi}{2}$ 与 $\angle(-\dot\gamma_1(t_0),\dot\sigma_q(0)) < \frac{\pi}{2}$ 中至少成立一个式子. 下面我们讨论第一个式子成立的情况（另外一个式子成立的情况可完全类似讨论），此时由引理 1 之(i) 知，对任意由 p 出发的测地线 δ 只要满足

$$0 < \angle(\dot\delta(0),\dot\gamma(0)) < \angle(\dot\gamma_1(0),\dot\gamma(0)),$$

则 δ 都将趋于 ∞，即 δ 必将与 γ 或 γ_1 相交而离开 $I(\gamma,\gamma_1)$. 于是可选取子列 δ_n，用与(a) 一样的方法可证得 q 为 p 之共轭点，这同样与 γ 为无共轭点测地线矛盾.

(c) $\angle(\dot\gamma_1(0),\dot\sigma_p(0)) = \frac{\pi}{2} = \angle(-\dot\gamma_1(t_0),\dot\sigma_q(0))$，即 γ_1 与 γ 构成闭测地线 γ_{10}，此时可记 $I(\gamma,\gamma_1) = I(\gamma_{10})$. 若对任意由 p 出发经 $I(\gamma_{10})$ 的测地线都离开 $I(\gamma_{10})$，则用与(a)、(b) 中一样的方法可证得 q 为 p 之共轭点，这同样与 $\gamma = \gamma_{10}$ 为无共轭点测地线矛盾. 所以可假定存在由 p 出发的正规测地经 $\delta_{10}:[0,+\infty) \to M$ 停留于 $I(\gamma_{10})$ 之中. 现在令 $\delta_{1n}:[-n,n] \to M$ 为

$$\delta_{1n}(t) = \delta_{10}(t+n), t \in [-n,n],$$

则可设当 $n \to \infty$ 时有 $\delta_{1n}(0) \to p_1, \dot\delta_n(0) \to Z$. 令

$$\gamma_{11} = \exp_{p_1} tZ, \quad t \in (-\infty,+\infty)$$

则 $\gamma_{11} \subset I(\gamma_{10})$，于是由定理 1 知 γ_{11} 亦为无共轭点测地线. 重复(a)、(b) 之讨论知此时只能是 γ_{11} 为闭测地线，且有由 p_1 出发地测地线 $\delta_{11}:[0, +\infty) \to M$ 停留于 $I(\gamma_{11})$ 之中，因此又知在 $I(\gamma_{11})$ 之中有闭测地线 γ_{12}. 如此循环我们便得到一闭测地线序列 $\gamma_{10}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \cdots, \gamma_{1n}, \cdots$. 而且，因 γ_{1n+1} 与 γ_{1n} 都是闭测地线 $\gamma_{1n} \subset I(\gamma_{1n+1})$，所以 $\gamma_{1n} \cap \gamma_{1n-1} = \phi$. 所以若记 $I(\gamma_{1n})$ 之面积为 S_{1n}，则 S_{1n} 是 n 的严格单调下降数列. 若 S_{1n} 不趋于 0，即有闭曲线 $\gamma_{1\infty}$ 使得 $S_{1n} \to I(\gamma_{1\infty})$ 之面积 $S_{1\infty} > 0$，则显然 $\gamma_{1\infty} = \lim\limits_{n \to M} \gamma_{1n}$ 亦为闭测地线，于是又可以重复前面之讨论，如此循环往复，我们必可找到闭测地线序列 $\{\gamma_n^* \mid \gamma_n^* \subset I(\gamma_{10}), n \in N\}$ 使得其所对应的 $I(\gamma_n^*)$ 之面积 S_n^* 严格单调下降是趋于 0，但这显然是不可能的，因为我们知道对 $\forall\, x \in M$，指数映射在 x 附近总是一对一的，至此引理得征.

由引理 4 显然有

定理 2　设 M 为完备非紧具非负曲率单连通曲面，则对 M 中任一非平凡测地线 $\gamma:[0, +\infty) \to M$ 有 $d(\gamma(0), \gamma(t)) \to \infty$ 当 $t \to \infty$. 特别地，M 中不含闭测地线.

注 2　由注 1 显然定理 2 的结论在高维时不成立. 又由 Cohn-Vossen 定理：具非负曲率完备非紧曲面或与 R^2 微分同胚或 M 是平坦的；所以单连通的这种曲面与 R^2 微分同胚. 于是可提出如下的

猜测：设 M 为完备非紧具非负曲率的 n 维流形，若 M 与 $\mathbf{R}^n$ 微分同胚，则 M 中不含闭测地线.

4　割迹与共轭轨迹

设 M 为具非负曲率完备非紧单连通之曲面，$\forall\, p \in M$. 若 $q \in C(p) = p$ 之割迹，则 $q \in K(p)$ 或存在二正规测地线 γ_1, γ_2 连接 p, q 且

$$L(\gamma_1) = L(\gamma_2) = t_0$$

从而当限制 $t \in [0, t_0]$ 时 γ_1, γ_2 便范围出 M 中一面积有限的部分 $I(\gamma_1, \gamma_2)$. 由定理 2 知，对 $\forall$ 由 p 出发的测地线都得趋于 ∞，于是用引理 4 中的(b) 之方法便可证得 q 为 p 之共轭点. 综上所述 $C(p) \subset K(p)$.

现在设 $q \in K(p)$ 即 q 为 p 沿某一测地线 γ_0 之第一共轭点，设 $\gamma_0(0) = p, \gamma_0(t_0) = q$. 若 q 不是 p 沿 γ_0 之割点，则熟知有 $t_1 < t_0$，$\gamma_0(t_1)$ 为 p 沿 γ_0 之割点. 但由上面之分析又知 $\gamma_0(t_1)$ 是 p 之共轭点，这便与 q 是第一共轭点矛盾，因此 $q \in C(p)$，即 $K(p) \subset C(p)$，因此证明了

定理 3　设 M 为完备非紧具非负曲率单连通曲面，$\forall\, x \in M$，则 $K(x) = C(x)$.

在本文的最后，我们讨论一般流形之共轭点与测地线的关系. 首先引入

引理 5　设 M 为具非负曲率的完备非紧流形，$\forall\, p \in M$，则存在一全凸紧致的集合族 C_t，$t \geqslant 0$ 使得 $t_2 \geqslant t_1$ 隐含 $C_{t_2} \supset C_{t_1}$ 且 $\bigcup\limits_{t \geqslant 0} C_t = M$.

引理 6　设 M 为完备黎曼流形，p、$q \in M$ 是 M 中之非退化点偶(即 q 不是 p 之共轭点)，若存在 $k_0 \in N$，$\pi_{k_0} M \neq 0$，则 p 与 q 可用无究多条测地线连接.

引理 7　设 M 为具正曲率完备非紧流形，则引理 4 中的结论成立.

其中引理 5 是[1] 之命题 8.5；引理 6 是[9] 中的结论；引理 7 见[4] 之第三章.

定理 4 设 M 为具正曲率完备非紧流形或者是具非负曲率完备非紧单连通的曲面，任意 p、$q \in M$，若 p、q 可用无究多条测地线连接，则 q 是 p 之共轭点.

证明 设无究多条的正规测地线 $\delta_n:[0,s_n] \to M$ 连接 p、q，即

$$\delta_n(0) = p, \quad \delta_n(s_n) = q \quad \forall_n \in \mathbf{N}.$$

由引理 5 知 M 中有全凸紧致子集 C 使得 $p,q \in C$，由 C 之全凸性知 $\delta_n \subset C, \forall n \in \mathbf{N}$. 而且由引理 4 和引理 7 知存在常数 $L > 0$ 使得 $s_n \leqslant L, \forall n \in N$. 无妨设当 $n \to \infty$ 时有 $s_n \to s_0$；并且由于 $|\dot{\delta}_n(0)| = 1$，我们同样无妨设（必要时可取子列）$\dot{\delta}_n(0) \to Z$. 设 γ 是测地线满足 $\dot{\gamma}(0) = Z$，$\gamma(0) = p$，则

$$\gamma(s_0) = \lim_{n\to\infty}\delta_n(s_n) = q,$$

即 γ 亦为连接 p、q 之测地线. 当然可以假定当 n 足够大时有 $\delta_n \neq \gamma$，所以

$$\dot{\delta}_n(0) \neq \dot{\gamma}(0), |\dot{\delta}_n(0)| = |\dot{\gamma}(0)| = 1,$$

但同时又有

$$\exp_p(s_n\dot{\delta}_n(0)) = \delta_n(s_n) = q = \gamma(s_0) = \exp_p(s_0\dot{\gamma}(0)),$$

$$s_n\dot{\delta}_n \neq s_0\dot{\gamma}(0),$$

所以在 $s_0\dot{\gamma}(0)$ 的任何邻域中 $\exp_p$ 都不是一对一的，从而 $d\exp_p$ 在 $s_0\dot{\gamma}(0)$ 处奇异，即 q 为 p 之共轭点.

注 3 定理 4 中的条件单连通不可少，否则如柱面；又当流形为紧致时定理 4 的结论也不成立，例如具平坦度量的环面；较一般的例子可见[3].

作者衷心感谢 Z. Shen（沈忠民）教授在 95 年南开国际微分几何会议期间及后来的有关此文的有益讨论.

参考文献：

[1] CHEEGER J and EBIN D. *Comparison Theorems in Riemannian Geometry* [M]. North-Holland Publishing Company, Amesterdan, 1975.

[2] GUIJARRO L and PETERSEN P. *Rigidity in non-negative curvature* [J]. Ann. Scient. EC. Norm. Sup., 1997, **30**(4): 595-603.

[3] 贺龙光，邱超捷. 实 Grassmann 流形上的道路空间 [J]. 数学学报，1995，**38**：127－133.
HE Long-guang, QIU Chao-jie. *The path space of a real Grassmann manifold* [J]. Acta. Math. Sinica, 1995, **38**: 127－133. (in Chinese)

[4] KLINGENBERG W. *Riemannian Geometry* [M]. Berlin, NewYork: de Gruyter, 1982.

[5] PERELMAN G. *Proof of the Soul Conjecture of Cheeger and Gromoll* [J]. J. Diff. Geom., 1994, **40**: 209－212.

[6] WALSCHAP G. *Nonnegatively curved manifold with souls of Codimension* 2 [J]. J. Diff. Geom., 1988, **27**: 525－537.

[7] WARNER F. *Conjugate loci of finite order* [J]. Ann. of Math., 1967, **86**: 192－212.

[8] WEINSTEIN A D. *The cut locus and Conjugate locus of a Riemannian manifold* [J]. Ann. of Math., 1968, **87**: 29－41.

[9] 伍鸿熙，沈纯理，虞言林. 黎曼几何初步 [M]. 北京：北京大学出版社，1989.

WU Hong-xi, SHEN Chun-li, YU Yan-lin. *The introduction of Riemannian geomery* [M]. Beijing: Peking University Press, 1989. (in Chinese)
[10] 詹华税. 完备流形之共轭点 [J]. 数学学报, 1994, **37**: 414—419.
ZHAN Hua-shui. *The conjugate points in a complete Riemannian manifold* [J]. Acta. Math. Sinica, 1994, **37**: 414—419. (in Chinese)
[11] 詹华税. 局部对称流形上的数量曲率 [J]. 数学杂志, 1997, **19**: 257—260.
ZHAN Hua-shui. *The scalar curvature of a locally symmetric manifold* [J]. J. of Math., 1997, **19**: 257—260. (in Chinese)
[12] 詹华税. 完备非紧具非负曲率流形之拓扑结构 [J]. 数学研究与评论(增刊), 1999, 315—316.
ZHAN Hua-shui. *The topology of an open complete Riemann manifold* [J]. J. of Math. Res & Expo. (sup), 1999, 315—316. (in Chinese)

The Geometric Properties of the Complete Noncompact Surface with Nonnegative Curvature

ZHAN Hua-shui
(Dept. of Basic Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: For a simply connected open surface with nonnegative curvature, we prove that every geodesic $\gamma:[0,+\infty)\to M$ goes to infinity, its cut locus is just the same as its first conjugate locus. But all above characters are not true for a manifold with dim$\geqslant$3. We also discuss the relation between the conjugate points and the geodesic, in an n-dimensional Riemannian manifold.
Key words: surface; nonnegative curvature; geodesic; cut locus.