第 24 卷第 1 期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 24 No. 1
2004 年 2 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 2004

四元数矩阵的惯性定理与稳定性*

蔡永裕[1]，　黄礼平[2]

(1. 湖南科技大学数学与计算科学学院，湖南 湘潭 411201；2. 长沙理工大学应用数学研究所，湖南 长沙 410076)

摘　要：本文给出了四元数矩阵惯性的定义，讨论了四元数体上 Lyapunov 矩阵方程的唯一解，推广了一般惯性定理、Lyapunov 稳定性定理、Carlson-Schneider 定理、Stein 稳定性定理等一些重要的结果到四元数矩阵，同时得出了四元数体上稳定矩阵的一些判别条件.

关键词：四元数矩阵；惯性；一般惯性定理；稳定性；稳定矩阵.

分类号：AMS(2000) 15A/CLC number：O151.23，O151.21

文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2004)01-0127-07

1 引　言

复矩阵的惯性与稳定性理论在控制论、微分方程等学科中有着重要的应用，将它们推广到四元数矩阵无疑具有重要的意义. 由于四元数乘法的非交换性带来的困难，在目前文献中只见到对自共轭四元数矩阵的惯性的初步讨论[1]，尚无一般性的结果. 本文应用复表示方法，将复矩阵的惯性与稳定性理论推广到四元数矩阵.

设 R 为实数域，$C=R+Ri$ 为复数域，$H=C+Cj$ 为 R 上的四元数体 $(ij=-ji)$. 用 $K^{m\times n}$ 表示体 K 上 $m\times n$ 矩阵的集合，K^n 表示体 K 上 n 维列向量构成的右向量空间. 显然有 $R^{m\times n}\subset C^{m\times n}\subset H^{m\times n}$. 记 $\overline{A}$ 为 $A\in H^{m\times n}$ 的共轭矩阵，A^* 为 $A\in H^{m\times n}$ 的共轭转置矩阵. 用 $SH^{n\times n}$ 表示 n 阶自共轭四元数矩阵的集合，$SH_{>}^{n\times n}$($SH_{\geqslant}^{n\times n}$) 表示 n 阶正定(半正定) 自共轭四元数矩阵的集合，$A>0$($A\geqslant 0$) 表示 A 为正定(半正定) 自共轭四元数矩阵[2].

设 $A\in H^{n\times n}$，如果存在 $\lambda\in H$，$0\neq X\in H^n$ 使得 $AX=X\lambda$，则称 λ 为 A 的一个右特征值. 如果虚部非负的复数 $\lambda=\alpha+bi(a,b\in R,b\geqslant 0)$ 是 A 的一个右特征值，则称 λ 为 A 的一个右特征值代表元.

设 $A\in H^{m\times n}$，则 A 可以唯一地写成 $A=A_1+A_2j$，其中 $A_1,A_2\in C^{m\times n}$，我们定义 A 的复表示矩阵 $A_C\in C^{2m\times 2n}$ 为

$$A_C=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ -\overline{A}_2 & \overline{A}_1\end{bmatrix}. \tag{1}$$

* 收稿日期：2001-03-05

基金项目：湖南省教育厅科研基金资助项目(02C468)

作者简介：蔡永裕(1956-)，副教授.

由体上的矩阵理论[3,4]，不难得到下列引理：

引理 1　设 $A,B\in H^{m\times n}$，$D\in H^{n\times l}$，$a,b\in R$，那么

1)　$(aA+bB)_c=aA_c+bB_c$，$(AD)_c=A_cD_c$.

2)　$(A^*)_c=(A_c)^*\ \underline{\underline{\mathrm{def}}}\ A_c^*$.

3)　$(aA+bB)_c^*=aA_c^*+bB_c^*$，$(AD)_c^*=D_c^*A_c^*$.

引理 2　设 $A\in H^{n\times n}$，那么 A 是可逆的充分必要条件是 A_c 可逆，并且有

$$(A^{-1})_c=(A_c)^{-1}\underline{\underline{\mathrm{def}}}\,A_c^{-1}.$$

引理 3[5]　设 $A\in H^{n\times n}$，那么

1)　A 是自共轭矩阵 $\Leftrightarrow A_c$ 是 Hermite 矩阵.

2)　$A>0(\geqslant 0)\Leftrightarrow A_c$ 是正定(半正定)Hermite 矩阵.

引理 4[6]　设 $A\in H^{n\times n}$，则存在可逆矩阵 $P\in H^{n\times n}$ 使得

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(J_{n_1}(\lambda_1),J_{n_2}(\lambda_2),\cdots,J_{n_s}(\lambda_s))\stackrel{\Delta}{=}J,\tag{2}$$

这里 $\lambda_i\in C$ 是 A 的右特征值代表元，$J_{n_i}(\lambda_i)$ 是对应于 λ_i 的 $n_i\times n_i$Jordan 块，$i=1,2,\cdots s$. 并且，除其中 Jordan 块的排列顺序外 J 是由 A 唯一确定的，把它称之为 A 的复 Jordan 标准形.

在 $A\in H^{n\times n}$ 的复 Jordan 标准形 J 中，如果 A 的一个右特征值代表元 λ 在主对角线上出现了 m 次，则称 m 为 λ 的代数重数. 根据引理 4 知，$A\in H^{n\times n}$ 恰有 n 个右特征值代表元(计算重数).

2　四元数矩阵的惯性与稳定性

定义 1　设 $A\in H^{n\times n}$，用 $\pi(A)$，$\gamma(A)$，$\delta(A)$ 分别表示 A 的具有正实部、负实部、零实部的右特征值代表元个数(计算重数)，把三元整数组

$$\mathrm{IN}(A)=(\pi(A),\gamma(A),\delta(A))\tag{3}$$

称为矩阵 A 的惯性.

定义 2　设 $A\in H^{n\times n}$，用 $\pi^0(A)$，$\gamma^0(A)$，$\delta^0(A)$ 分别表示在复平面的单位开圆内、单位闭圆外、单位圆周上 A 的右特征值代表元个数(计算重数)，把三元整数组

$$\mathrm{IN}^0(A)=(\pi^0(A),\gamma^0(A),\delta^0(A))\tag{4}$$

称为矩阵 A 关于单位圆周的惯性.

定义 3　设 $A\in H^{n\times n}$，若 $\mathrm{IN}(A)=(0,n,0)$，则称 A 为稳定矩阵. 若 $\mathrm{IN}^0(A)=(n,0,0)$，则称矩阵 A 关于单位圆周是稳定的.

因为 n 阶复矩阵不一定有 n 个对应于复特征向量的虚部非负的复特征值，所以上述定义 1，2，3 与复矩阵论中相应的概念是有区别的. 对于 $A\in H^{n\times n}$，我们用 $\mathrm{In}(Ac)$，$\mathrm{In}^0(Ac)$ 分别表示 A_c 的按复矩阵论中通常定义的惯性[7] 和关于单位圆周的惯性[8].

定理 1(惯性转化定理)　设 $A\in H^{n\times n}$，那么

$$\mathrm{IN}(A)=\frac{1}{2}\mathrm{In}(A_c),\tag{5}$$

$$\mathrm{IN}^0(A)=\frac{1}{2}\mathrm{In}^0(A_c).\tag{6}$$

证明 由引理1,2和引理4知:如果$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的$n$个右特征值代表元,那么$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\cdots,\bar{\lambda}_n$就是$A_c$的$2n$个复特征值(按复矩阵论中的定义),因此(5),(6)式成立.

根据稳定矩阵的定义和定理1立即得到

定理2 设$A\in H^{n\times n}$,那么

(1) A为稳定矩阵的充分必要条件是A_c为稳定矩阵.

(2) A关于单位圆周是稳定的充分必要条件是A_c关于单位圆周是稳定的.

引理5 设$A\in H^{n\times n}$且$A+I$可逆,令$C=(A+I)^{-1}(A-I)$,那么

$$\mathrm{IN}^0(A)=(\gamma(C),\pi(C),\delta(C)). \tag{7}$$

证明 设J为A的复Jordan标准形,它的主对角线上元素亦即A的n个右特征值代表元为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则存在可逆矩阵$P\in H^{n\times n}$使得$P^{-1}AP=J$,于是有

$$P^{-1}CP=(J+I)^{-1}(J-I).$$

显然$P^{-1}CP$是上三角形复矩阵,其主对角线上元素为$\mu_k=\dfrac{\lambda_k-1}{\lambda_k+1},k=1,2,\cdots n$.因为

$$\mu_k=\frac{(\lambda_k\bar{\lambda}_k-1)+(\lambda_k-\bar{\lambda}_k)}{(\lambda_k+1)(\bar{\lambda}_k+1)}=\frac{(|\lambda_k|^2-1)+2\mathrm{Im}(\lambda_k)i}{|\lambda_k+1|^2)},$$

这里$i^2=-1$,所以由上式易知$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$为C的n个右特征值代表元,且(7)式成立.

由引理5直接得到

定理3 设$A\in H^{n\times n}$,即么

(1) A关于单位圆周是稳定的当且仅当$C=(A+I)^{-1}(A-I)$为稳定矩阵.

(2) $B=(I-A)^{-1}(I+A)$关于单位圆周是稳定的当且仅当A为稳定矩阵.

3 四元数体上 Lyapunov 矩阵方程

考虑四元数体上A. M. Lyapunov矩阵方程:

$$AX+XA^*=-W, \tag{8}$$

其中$A\in H^{n\times n},W\in SH_{\geqslant}^{n\times n},X\in H^{n\times n}$为未知矩阵.

定理4 如果$A\in H^{n\times n}$为稳定矩阵,$W\in SH_{\geqslant}^{n\times n}\ (SH_{>}^{n\times n})$,那么Lyapunov矩阵方程(8)有唯一解$X\in SH_{\geqslant}^{n\times n}\ (SH_{>}^{n\times n})$,并且$X$可以写成:

$$X=[\sum_{k=1}^{2n}\sum_{j=0}^{k-1}P_kA^jW(A^*)^{k-j-1}][\triangle(A^*)]^{-1}, \tag{9}$$

其中$\triangle(\lambda)=\det(\lambda I_{2n}-A_c)=P_{2n}\lambda^{2n}+P_{2n-1}\lambda^{2n-1}+\cdots+P_0\in R[\lambda]$.

证明 由引理3和定理2知,W_c为半正定(正定)Hermite矩阵,A_c为稳定矩阵,并且A_c与$-A_c$没有公共的特征值(按复矩阵论中的定义).应用[8]中P. 154推论7知,Lyapunov矩阵方程

$$A_cY+YA_c^*=-W_c \tag{10}$$

有唯一解$Y\in C^{2n\times 2n}$,并且Y为半正定(正定)Hermite矩阵,再应用[9,10](Jameson定理)知,(10)的唯一解Y可以写成:

$$Y=[\sum_{k=1}^{2n}\sum_{j=0}^{k-1}P_kA_c^jW_c(A_c^*)^{k-j-1}][\triangle(A_c^*)]^{-1},$$

其中 $\triangle(\lambda)=\det(\lambda I_{2n}-A_c)=P_{2n}\lambda^{2n}+P_{2n-1}\lambda^{2n-1}+\cdots+P_0$.

由(2)式易知,$\triangle(\lambda)\in R[\lambda]$,因而 $P_i\in R, i=0,1,\cdots,2n$. 应用引理1,2得

$$Y=[\sum_{k=1}^{2n}\sum_{j=0}^{k-1}P_kA^jW(A^*)^{k-j-1}]_c[\triangle(A^*)]_c^{-1}.$$

令 $X=[\sum_{k=1}^{2n}\sum_{j=0}^{k-1}P_kA^jW(A^*)^{k-j-1}][\triangle(A^*)]^{-1}$, 则 $Y=X_c$, 由引理3知,$X\in SH_{\geqslant}^{n\times n}$ $(SH_{\geqslant}^{n\times n})$,根据(10)与引理1得

$$(AX+XA^*)_c=(-W)_c,$$

从而有 $AX+XA^*=-W$,即 X 是(8)的解. 显然,这样的 X 是(8)的唯一解(否则,(10)的解不唯一,矛盾). 故定理得证.

4 惯性与稳定性主要定理的推广

以下用 $A<0(\leq 0)$ 表示 $-A>0(\geqslant 0)$. 我们将关于复矩阵的惯性与稳定性的几个重要结果推广到四元数矩阵.

定理 5 (一般惯性定理推广) 设 $A\in H^{n\times n}$,那么 $\delta(A)=0$ 的充分必要条件是存在 $B\in SH^{n\times n}$ 使得 $AB+BA^*>0$. 此时,$\mathrm{IN}(A)=\mathrm{IN}(B)$.

证明 如果 $\delta(A)=0$,则可设 $\mathrm{IN}(A)=(p,n-p,0)$,而 A 的复 Jordan 标准形为

$$P^{-1}AP=J=\mathrm{diag}(J_1,J_2),$$

其中 $J_1\in C^{p\times p}, J_2\in C^{(n-p)\times(n-p)}, \mathrm{IN}(J_1)=(p,0,0), \mathrm{IN}(J_2)=(0,n-p,0)$.

因为 $-J_1,J_2$ 均为稳定矩阵,所以根据定理4知,存在唯一的 $H_1\in SH_{\geqslant}^{p\times p}$ 以及 $H_2\in SH_{\geqslant}^{(n-p)\times(n-p)}$ 使得

$$-J_1H_1-H_1J_1^*=-I_p,$$
$$J_2H_2+H_2J_2^*=-I_{n-p}.$$

令 $B=P\mathrm{diag}(H_1,-H_2)P^*\in SH^{n\times n}$,则有

$$AB+BA^*=P\mathrm{diag}(J_1H_1+H_1J_1^*,-J_2H_2-H_2J_2^*)P^*=PP^*>0,$$

此时,由[1]中的推论2知 $\mathrm{IN}(B)=(p,n-p,0)$,从而有 $\mathrm{IN}(A)=\mathrm{IN}(B)$.

反之,如果存在 $B\in SH^{n\times n}$ 使得 $AB+BA^*>0$,则由引理3知 B_c 是 Hermite 矩阵,使得 $A_cB_c+B_cA_c^*$ 为正定 Hermite 矩阵,由一般惯性定理[8]知 $\delta(A_c)=0$ 且 $In(A_c)=In(B_c)$,因此由定理1知 $\delta(A)=0$ 且 $IN(A)=IN(B)$.

推论 1 (A. M. Lyapunov 稳定性定理的推广) 设 $A\in H^{n\times n}$,那么 A 为稳定矩阵的充分必要条件是存在 $B\in SH_{\geqslant}^{n\times n}$ 使得 $AB+BA^*<0$.

仿照定理5的充分性证明,并应用[7]中P447命题1,2得

定理 6 设 $A\in H^{n\times n}$,那么

1) 如果存在 $B\in SH^{n\times n}$ 使得 $AB+BA^*\geqslant 0$,并且 $\delta(A)=0$,则 $IN(A)\geqslant \mathrm{IN}(B)$.

2) 如果存在可逆矩阵 $B\in SH^{n\times n}$ 使得 $AB+BA^*\geqslant 0$,则 $\mathrm{IN}(A)\leqslant \mathrm{IN}(B)$.

由定理6立即得到

定理 7 (Carlson-Schneider 定理的推广)　设 $A \in H^{n\times n}$，且 $\delta(A) = 0$，若有可逆矩阵 $B \in SH^{n\times n}$ 使得 $AB + BA^* \geqslant 0$，则 $\mathrm{IN}(A) = \mathrm{IN}(B)$.

定理 8　设 $A \in H^{n\times n}$，且 $A + A^* > 0$，则对任一 $B \in SH^{n\times n}$ 都有 $\mathrm{IN}(AB) = \mathrm{IN}(B)$.

证明　由引理 1,3 知 $A_C + A_C{}^*$ 是 $2n$ 阶正定 Hermite 矩阵，且 B_c 是 $2n$ 阶 Hermite 矩阵，应用 H. Wielandt 定理(见[7],P450) 得到

$$\mathrm{In}(A_cB_c) = \mathrm{In}[(AB)_C] = \mathrm{In}(B_c),$$

因此由定理 1 得 $\mathrm{IN}(AB) = \mathrm{IN}(B)$.

定理 9　设 $A \in H^{n\times n}$，那么 $\delta^0(A) = 0$ 的充分必要条件是存在 $B \in SH^{n\times n}$ 使得 $B - ABA^* > 0$. 此时，$\mathrm{IN}^0(A) = \mathrm{IN}(B)$.

证明　若存在 $B \in SH^{n\times n}$ 使得 $B - ABA^* > 0$，则 A^* 的任一右特征值 λ 与对应的特征向量 $Y \neq 0$ 必满足：

$$Y^*(B - ABA^*)Y = (1 - |\lambda|^2)Y^*BY > 0,$$

所以 $\delta^0(A^*) = 0$. 由引理 4 易知 $\delta^0(A) = \delta^0(A^*) = 0$.

反之，若 $\delta^0(A) = 0$，则 $A + I$ 可逆，由引理 5 知 $\delta(C) = 0$，其中 $C = (A + I)^{-1}(A - I)$. 于是由定理 5，存在 $B \in SH^{n\times n}$ 使得 $-CB - BC^* \overset{\triangle}{=} W > 0$，且 $\mathrm{IN}(-C) = \mathrm{IN}(B)$. 由此可得

$$B - ABA^* = \frac{1}{2}(A + I)W(A^* + I) > 0.$$

此时，再由引理 5 得 $\mathrm{IN}^0(A) = \mathrm{IN}(-C) = \mathrm{IN}(B)$.

由定理 9 以及定理 3,4 易得

推论 2 (Stein 稳定性定理的推广)　设 $A \in H^{n\times n}$, $V \in SH^{n\times n}_{>}$，如果 A 关于单位圆周是稳定的，那么四元数体上 Stein 矩阵方程

$$X - AXA^* = V \tag{11}$$

必有唯一解 $X > 0$. 反之，如果方程(11) 有解 $X > 0$，那么 A 关于单位圆周是稳定的.

5　四元数体上稳定矩阵的等价条件

应用前面的结果可得以下关于四元数体上稳定矩阵的基本定理.

定理 10　设 $A \in H^{n\times n}$, $B = (I - A)^{-1}(I + A)$，那么下列诸命题彼此等价：

1)　A 为稳定矩阵.

2)　A_C 为稳定矩阵(按复矩阵论中的定义).

3)　B 存在，且 B 关于单位圆周是稳定的.

4)　存在 $X > 0$ 使得 $AX + XA^* < 0$.

5)　存在 $X > 0$ 使得 $AX + XA^* = -I$.

6)　对任意 $V > 0$，矩阵方程 $AX + XA^* = -V$ 有解 $X > 0$.

7)　存在 $W > 0$ 使得 $WAW^{-1} + W^{-1}A^*W < 0$.

8)　存在可逆矩阵 $T \in H^{n\times n}$ 使得 $TAT^{-1} + (T^*)^{-1}A^*T^* < 0$.

9)　B 存在，且存在 $X > 0$ 使得 $X - BXB^* > 0$.

10)　B 存在，且矩阵方程 $X - BXB^* = I$ 有解 $X > 0$.

11) B 存在,且对任意 $V>0$,矩阵方程 $X-BXB^*=V$ 有解 $X>0$.

12) 存在 $P,Q\in SH_{>}^{n\times n}$ 和斜自共轭四元数矩阵 S(即 $S^*=-S$) 使得 $A=P(S-Q)$.

证明 由定理 2,3,4 以及推论 1 易知 1),2),3),4),5),6) 彼此等价;又由定理 9 以及推论 2 易知 3),9),10),11) 彼此等价.

若 6) 成立,则令 $W=X^{-\frac{1}{2}}>0$[11],显然有 7) 成立.

若 7),则 8) 是显然的.

若 8) 成立,则对 A^* 的任一右特征值代表元 λ,存在 $0\neq X\in H^n$ 使得 $AX=X\lambda$. 令 $Y=TX$,于是有 $Y\neq 0$,而 $Y^*[TAT^{-1}+(T^*)^{-1}A^*T^*]Y=(\lambda+\bar{\lambda})Y^*Y<0$,所以 $\mathrm{Re}(\lambda)<0$,即 A 为稳定矩阵,从而 6) 成立.

故 1) — 11) 彼此等价.

最后证明 1) 与 12) 等价:

若 12) 成立,则 $P^{-1}A=S-Q,P^{-1}>0$,所以 $A^*P^{-1}=-S-Q$,于是有

$$P^{-1}A+A^*P^{-1}=-2Q<0,$$

由此易知 4) 成立,从而 1) 成立.

反之,若 1) 成立,则显然 A^* 为稳定矩阵,由 5) 知存在 $X>0$ 使得 $A^*X+XA=-I$. 令 $S=\frac{1}{2}I+XA,P=X^{-1},Q=\frac{1}{2}I$,则有 $S^*=-S$,并且 $P,Q\in SH_{>}^{n\times n}$,使得 $A=P(S-Q)$,即 12) 成立. □

参考文献:

[1] 庄瓦金. 四元数矩阵的特征值与奇异值不等式 [J]. 数学进展, 1988, **17**(4): 403—407.
ZHUANG Wa-jin. *Inequalities of eigenvalues and singular values for quaternion matrices* [J]. Advances in Mathematics, 1988, **17**(4): 403—407. (in Chinese)

[2] 谢邦杰. 四元数自共轭矩阵与行列式 [J]. 吉林大学自然科学学报, 1980, **2**: 19—35.
XIE Bang-jie. *Self-conjugate quaternions matrices and its determinants* [J]. Acta. Sci. Natur. Univ. Jilin, 1980, **2**: 19—35. (in Chinese)

[3] 谢邦杰. 抽象代数学 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1982.
XIE Bang-jie. *Abstract Algebra* [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1982. (in Chinese)

[4] HUNGERFORD T W. *Algebra* [M]. New York, Springer-Verlag, 1974.

[5] HUANG Li-ping. *Transformation theorems of quaternion matrices and their applications*[J]. Northeast. Math. J., 1993, **9**(1): 69—80.

[6] HUANG Li-ping. *Jordan canonical form of a matrix over the quaternion field* [J]. Northeast. Math. J., 1994, **10**(1): 18—24.

[7] LANCASTER P, TISMENETSKY M. *The Theory of Matrices with Applications* [M]. Second Edition, New York: Acdemic Press, 1985.

[8] 陈公宁. 矩阵理论与应用 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1990.
CHEN Gong-ning. *The Theory of Matrices with Applications* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1990. (in Chinese)

[9] JAMESON A. *Solution of the equation $AX-XB=C$ by inversion of an $M\times M$ or $N\times N$ matrix* [J]. SIAM J. Appl., 1968, **16**: 1020—1023.

[10] HERNANDEZ V. *Explicit solution of the matrix equation $AXB-CXD=E$* [J]. Linear Algebra Appl., 1989, **121**: 333—344.

[11] 黄礼平. 四元数矩阵的特征值与奇异值估计 [J]. 数学研究与评论, 1992, **12**(3): 449—454.
HUANG Li-ping. *Estimation of eigenvalues and singular values for quaternions matrices* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1992, **12**(3): 449—454. (in Chinese)

Inertia Theorems and Stability of Quaternion Matrix

CAI Yong-yu[1], HUANG Li-ping[2]

(1. College of Math., Hunan Unversity of Science and Technology, Xiangtan 411201, China;
2. Inst. of Appl. Math., Changsha University of Technology, Hunan 410076, China)

Abstract: In this paper, we give the definitions of inertia of quaternion matrix and discuss the unique solution of Lyapunov matrix equation over quaternion field. We extend the general inertia theorem, Lyapunov stability theorem, Carlson-Schneider theorem, Stein stability theorem and some results to quaternion matrices. We obtain some conditions for stable matrix over quaternion.

Key words: quaternion matrix; inertia; eneral inertia theorem; stability; stable matrix.