第25卷第1期 数学研究与评论 Vol.25, No.1
2005年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)01-0183-08 **文献标识码**: A

具有二项式型多项式下三角矩阵的性质

谭明术 [1,2], 王天明 [1]
(1. 大连理工大学应用数学系, 辽宁 大连 116024; 2. 重庆三峡学院数学系, 重庆 404000)
(E-mail: Tan_mingshu@263.net)

摘 要: $n+1$ 阶下三角方阵 $L_n[x]$ 定义为: $(L_n[x])_{ij}=\varphi_{i-j}(x)l(i,j)$(如果 $i\geq j$), 否则为 0, 且满足条件 $l(i,k)l(k,j)=l(i,j)\binom{i-j}{k-j}$ 和 $\varphi_n(x+y)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varphi_k(x)\varphi_{n-k}(y)$, 即二项式型多项式函数矩阵. $n+1$ 阶方阵 L_n 定义为: 当 $i\geq j$ 时, $(L_n)_{ij}=l(i,j)$, 否则为 0. 本文研究了比 Pascal 函数矩阵及 Lah 矩阵更广泛的一类矩阵 $L_n[x]$ 与 L_n, 得到了更一般的结果和一些组合恒等式.

关键词: Pascal 矩阵; 二项式型多项式; 下三角矩阵.
MSC(2000): 05A10, 05A19, 15A23
中图分类: O157

1 引 言

文 [2,4,5,6,7,11] 研究了 Pascal 函数矩阵. 文 [1] 研究了 Stirling 函数矩阵. 它们都是下三角矩阵. 由 Lah 数构成的下三角矩阵称为 Lah 矩阵. Pascal 矩阵与 Lah 矩阵有许多有趣的相似的代数性质 [12]. 本文研究具有二项式型多项式下三角函数矩阵. Pascal 矩阵与 Lah 矩阵都属于此类矩阵的特殊情况.

定义 1.1 设 n 是非负整数, x 是任意实数. 矩阵 L_n 定义为:

$$(L_n)_{ij}=l_{ij}=\begin{cases} l(i,j) & \text{如果 } i\geq j \\ 0 & \text{否则} \end{cases},$$

其中 $l(i,j)$ 满足

$$l(i,k)l(k,j)=l(i,j)\binom{i-j}{k-j},\quad l(i,i)=1(i=1,2,\cdots,n+1), \tag{1.1}$$

$n+1$ 阶方阵 $L_n[x]$ 的一般元素 $l_{ij}(x)=\begin{cases} \varphi_{i-j}(x)l(i,j) & \text{如果 } i\geq j \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$ $(i,j=1,2,\cdots,n+1)$,
其中函数 $\varphi_n(x)$ 是 n 次多项式, 并且任意 x,y 满足 $\varphi_0(x)=1,\varphi_n(0)=0(n>0),\varphi_1(x)=x$,

$$\varphi_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varphi_k(x)\varphi_{n-k}(y), \tag{1.2}$$

称 $\varphi_n(x)$ 为二项式型多项式 [9].

如无特殊说明, 下文的 $L_n[x],\varphi_n(x)$ 均满足此定义.

收稿日期: 2002-03-10; **修改日期**: 2004-03-20

例 1.1 当 $l(i,j)=\binom{i-1}{j-1},\varphi_n(x)=x^n$ 时, $L_n(x)$ 就是文 [4,5,6] 等文研究的 Pascal 函数矩阵. 这时的 $L_n[1]=L_n$ 就是一般的 Pascal 矩阵.

例 1.2 当 $l(i,j)=\binom{i-1}{j-1},\varphi_n(x)=x^{n|\lambda}$, 当 $l(i,j)=L_n[x]$ 时, $L_n[x]$ 就是文 [2] 研究的 Pascal 广义函数矩阵, 其中 λ 是实数.

$$x^{n|\lambda}=\begin{cases} x(x+\lambda)\cdots(x+(n-1)\lambda), & \text{如果 } n>0. \\ 1, & \text{如果 } n=0. \end{cases} \tag{1.3}$$

例 1.3 当 $l(i,j)=\binom{i-1}{j-1},\varphi_n(x)$ 是指数族中的手枚举子发生函数 [10] 时, 就是文 [7] 研究的 Pascal 广义函数矩阵.

例 1.4 当 $l(i,j)=\binom{i+k}{j+k},\varphi_n[x]=x^n$, 其中 k 是正整数时, 便是文 [11] 的研究对象.

例 1.5 当 $l(i,j)=\binom{i-1}{j-1}\frac{i!}{j!}$ 时, 就是文 [12] 研究的 Lah 矩阵.

2 $L_n[x]$ 的一般性质及其应用

下面讨论 $L_n[x]$ 的一般性质及其应用.

定理 2.1 设 x,y 是两任意实数, n 是正整数, 则有

$$L_n[x+y]=L_n[x]L_n[y] \tag{2.1}$$

证明

$$\begin{aligned}(L_n[x]L_n[y])_{ij}&=\sum_{k=j}^{i}l_{ik}(x)l_{kj}(y)=\sum_{k=j}^{i}l(i,k)l(k,j)\varphi_{i-k}(x)\varphi_{k-j}(y)\\&=\sum_{k=j}^{i}l(i,j)\binom{i-j}{k-j}\varphi_{i-k}(x)\varphi_{k-j}(y)=l(i,j)\sum_{k=j}^{i}\binom{i-j}{k-j}\varphi_{i-k}(x)\varphi_{k-j}(y)\\&=l(i,j)\varphi_{i-j}(x+y)=(L_n[x+y])_{ij},\end{aligned}$$

于是有

$$L_n[x+y]=L_n[x]L_n[y].$$

很明显 $L_n[0]=I_{n+1}$(n+1 阶单位矩阵). 且有:

推论 2.1 对任意实数 x, 非负整数 $n,m,j(n,j>0)$, 有

(1) $L_n^{-1}[x]=L_n[-x]$.

(2) $L_n[mx]=L_n^m[x]$.

(3) $(L_n[m/j])^j=L_n[m]=(L_n[1])^m$.

(4) $\{a_n(x)\}_{n\geq 0},\{b_n(x)\}_{n\geq 0}$ 是两个函数序列, $l_{nk}(x)$ 见定义 1.1, 则

$$a_n(x)=\sum_{k=0}^{n}l_{nk}(x)b_k(x) \text{ 等价于 } b_n(x)=\sum_{k=0}^{n}l_{nk}(x)a_k(x). \tag{2.2}$$

由 (2.2) 得出的实际上是一个反演对, 用它可以发现或证明一些组合恒等式.

例 2.1　设 $l_{nk}(x)=(-1)^k\binom{n}{k}, b_k(x)=(-1)^k\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{x+i}{k}(y-1)^i$，则

$$\sum_{k=0}^{n} l_{n,k}(x)b_k(x)=\binom{n+x}{n}y^n.$$

因而可得一个组合恒等式：

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{x+k}{k}y^k=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{x+k}{n}(y-1)^k.$$

定理 2.2　对任意实数 x，有

$$L_n[x]=I_{n+1}+\frac{L_\varphi^{(1)}}{1!}x+\frac{L_\varphi^{(2)}}{2!}x^2+\cdots+\frac{L_\varphi^{(n)}}{n!}x^n, \tag{2.3}$$

其中矩阵元素 $(L_\varphi^{(k)})_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(\varphi_{i-j}(x))|_{x=0}l(i,j) & 如果\ \ i\geq j\\ 0 & 否则\end{cases}\quad (k=1,2,\cdots,n).$

证明　因为在 $\varphi_{i-j}(x)(i,j=1,2,\cdots,n+1)$ 中 x 的最高次数为 n，于是将这一项在 $x=0$ 处展开有 $(i\geq j)$：$(L_n[x])_{ij}=(\varphi_{i-j}(0)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi_{i-j}(x))|_{x=0}\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\varphi_{i-j}(x))|_{x=0}\frac{x^n}{n!})l(i,j)$. 即得结论. □

下面把定义 1.1 推广到多变量情形.

定义 2.1　设 $\varphi_n(x),\varphi_n^{(1)}(x),\varphi_n^{(2)}(x)$ 都满足 (1.2)，$\bar{a}=\{a_n\}_{n\geq 0},\bar{b}=\{b_n\}_{n\geq 0}$ 是两个任意序列，定义矩阵 $L_n^{(1)}[x;\bar{a}],L_n^{(2)}[x;\bar{b}],L_n[x;\bar{a},\bar{b}],L_n^{(1)}[x;\bar{a},y],L_n^{(2)}[x;\bar{b},z],L_n[x;\bar{a},y;\bar{b},z]$ 如下：

$$(L_n^{(1)}[x;\bar{a}])_{ij}=\begin{cases}a_{i-1}\varphi_{i-j}(x)l(i,j) & 如果\ \ i\geq j\\ 0 & 否则\end{cases};$$

$$(L_n^{(2)}[x;\bar{b}])_{ij}=\begin{cases}b_{j-1}\varphi_{i-j}(x)l(i,j) & 如果\ \ i\geq j\\ 0 & 否则\end{cases};$$

$$(L_n[x;\bar{a},\bar{b}])_{ij}=\begin{cases}a_{i-1}b_{j-1}\varphi_{i-j}(x)l(i,j) & 如果\ \ i\geq j\\ 0 & 否则\end{cases};$$

$$(L_n^{(1)}[x;\bar{a},y])_{ij}=\begin{cases}a_{i-1}\varphi_{i-j}(x)\varphi_{i-1}^{(1)}(y)l(i,j) & 如果\ \ i\geq j\\ 0 & 否则\end{cases};$$

$$(L_n^{(2)}[x;\bar{b},z])_{ij}=\begin{cases}b_{j-1}\varphi_{i-j}(x)\varphi_{j-1}^{(2)}(z)l(i,j) & 如果\ \ i\geq j\\ 0 & 否则\end{cases};$$

$$(L_n[x;\bar{a},y;\bar{b},z])_{ij}=\begin{cases}a_{i-1}b_{j-1}\varphi_{i-j}(x)\varphi_{i-1}^{(1)}(y)\varphi_{j-1}^{(2)}(z)l(i,j) & 如果\ \ i\geq j\\ 0 & 否则\end{cases}.$$

引理 2.1　设 x,y,z 是三个实数，$\bar{a}=\{a_n\}_{n\geq 0},\bar{b}=\{b_n\}_{n\geq 0}$ 是两个任意序列，则有

(1) $L_n^{(1)}[x;\bar{a}]=\mathrm{diag}(a_0,a_1,\cdots,a_n)L_n[x]$;

(2) $L_n^{(2)}[x;\bar{b}]=L_n[x]\mathrm{diag}(b_0,b_1,\cdots,b_n)$;

(3) $L_n[x;\bar{a},\bar{b}]=\mathrm{diag}(a_0,a_1,\cdots,a_n)L_n[x]\mathrm{diag}(b_0,b_1,\cdots,b_n)$;

(4) $L_n^{(1)}[x;\bar{a},y]=\mathrm{diag}(a_0,a_1\varphi_1^{(1)}(y),\cdots,a_n\varphi_n^{(1)}(y))L_n[x]$;

(5) $L_n^{(2)}[x;\bar{b},z]=L_n[x]\mathrm{diag}(b_0,b_1\varphi_1^{(2)}(z),\cdots,b_n\varphi_n^{(2)}(z))$;

(6) $L_n[x;\bar{a},y;\bar{b},z]=\mathrm{diag}(a_0,a_1\varphi_1^{(1)}(y),\cdots,a_n\varphi_n^{(1)}(y))L_n[x]\mathrm{diag}(b_0,b_1\varphi_1^{(2)}(z),\cdots,b_n\varphi_n^{(2)}(z))$.

定理 2.3 x_1,x_2,y,z 是四个实数, $\bar{a}=\{a_n\}_{n\geq 0},\bar{b}=\{b_n\}_{n\geq 0}$ 是两个任意序列, 则有

(1) $L_n^{(1)}[x_1+x_2;\bar{a}]=\mathrm{diag}(a_0,a_1,\cdots,a_n)L_n[x_1]L_n[x_2]$;

(2) $L_n^{(2)}[x_1+x_2;\bar{b}]=L_n[x_1]L_n[x_2]\mathrm{diag}(b_0,b_1,\cdots,b_n)$;

(3) $L_n[x_1+x_2;\bar{a},\bar{b}]=\mathrm{diag}(a_0,a_1,\cdots,a_n)L_n^{(2)}[x_1,x_2;\bar{b}]$
$=L_n^{(1)}[x_1+x_2;\bar{a}]\mathrm{diag}(b_0,b_1,\cdots,b_n)=L_n^{(1)}[x_1;\bar{a}]L_n^{(2)}[x_2;\bar{b}]$;

(4) $L_n^{(1)}[x_1+x_2;\bar{a},y]=L_n^{(1)}[x_1;\bar{a},y]L_n[x_2]$;

(5) $L_n^{(2)}[x_1+x_2;\bar{b},z]=L_n[x_1]L_n^{(2)}[x_2;\bar{b},z]$;

(6) $L_n[x_1+x_2;\bar{a},y;\bar{b},z]=\mathrm{diag}(a_0,a_1\varphi_1^{(1)}(y),\cdots,a_n\varphi_n^{(1)}(y))L_n^{(2)}[x_1+x_2;\bar{b},z]$
$=L_n^{(1)}[x_1+x_2;\bar{a},y]\mathrm{diag}(b_0,b_1\varphi_1^{(2)}(z),\cdots,b_n\varphi_n^{(2)}(z))=L_n^{(1)}[x_1;\bar{a},y]L_n^{(2)}[x_2;\bar{b},z]$.

可以看出, 文 [2,7] 中的许多结论都是本定理的特殊情况. 例如文 [2] 中的定理 2.2, 定理 2.3.

引理 2.2 对任意正整数 n, 设 $n+1$ 阶方阵 $A_n(x)=(a_{ij}(x))_{(n+1)\times(n+1)}$ 满足条件: 如果 $i\leq j$, 那么 $a_{ij}=0$, 则有

(1) $(A_n(x))^n$ 中只有 $(A_n(x))^n_{n+1,1}$ 可能不为 0 外, 其余全为 0; (2) $(A_n(x))^{n+1}=0$.

对于 (1), 可用数学归纳法易证; 对于 (2), 可由 (1) 推出.

定理 2.4 对任意正整数 n, 实数 x, 则 $(L_n[x]-I_{n+1})^n=n!x^nM_n$, 其中 M_n 是阶为 $n+1$ 的除 $(M_n)_{n+1,1}=l(n+1,1)$ 外, 其余所有元素均为 0 的方阵.

证明 对 n 施行数学归纳法.

当 $n=1$ 时: $L_1[x]-I_2=\begin{pmatrix}0&0\\l(2,1)x&0\end{pmatrix}$, 显然成立. 设对于 $n-1$ 时, 结论成立. 现考察 n 的情况: 将 $L_n[x],L_n[x]-I_{n+1}$ 分别表示为分块矩阵如下:

$$L_n[x]=\begin{pmatrix}L_{n-1}[x]&0\\Q_n[x]&1\end{pmatrix},L_n[x]-I_{n+1}=\begin{pmatrix}L_{n-1}^{(0)}[x]&0\\Q_n[x]&0\end{pmatrix},$$

其中 $L_{n-1}^{(0)}[x]=L_{n-1}[x]-I_n,Q_n[x]=(l(n+1,1)\varphi_n(x),l(n+1,2)\varphi_{n-1}(x),\cdots,l(n+1,n)\varphi_1(x))$.

于是

$$(L_n[x]-I_{n+1})^n=\begin{pmatrix}L_{n-1}^{(0)}[x]&0\\Q_n[x]&0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}L_{n-1}^{(0)}[x])^n&0\\Q_n[x](L_{n-1}^{(0)}[x])^{n-1}&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\Q_n[x](L_{n-1}^{(0)}[x])^{n-1}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\n!\ l(n+1,1)x^n&0\end{pmatrix}$$
$$=n!x^nM_n \text{ (由引理 2.2)}.$$

由归纳假设, 上式有:

$$Q_n[x](L_{n-1}^{(0)}[x])^{n-1}=(l(n+1,n)\varphi_1(x)(n-1)!l(n,1)x^{n-1},0,\cdots,0).$$

根据数学归纳法原理知: 所证明结论对任意正整数 n 成立.

推论 2.2 n 是正整数, $1\leq p\leq n-1$, 则

(1) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\varphi_n(kx)=n!x^n$; (2.4)

(2) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\varphi_p(kx)=0$. (2.5)

证明 由 $(L_n[x]-I_{n+1})^n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\mathrm{L}_n(kx)=n!x^nM_n$, 比较对应元素，化简可得. 实际上， (2.4),(2.5) 与定理 2.4 是等价的.

例 2.2 如果 (2.4) 中的 $\varphi_n(x)=x^{n|\lambda}$, 对任意实数 x, 得到

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k(kx+\lambda)\cdots(kx+(n-1)\lambda)=n!x^{n-1}, \tag{2.6}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k(kx+\lambda)\cdots(kx+(p-1)\lambda)=0\ \ (1\le p\le n-1). \tag{2.7}$$

当 $\lambda=0$ 时，有

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n=n!, \tag{2.8}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}k^p=0\ \ (1\le p\le n-1). \tag{2.9}$$

例 2.3 n 为正整数， x,a 为实数， $\varphi_n(x)=x(x+na)^{n-1}$, 不难证明

$$\varphi_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varphi_k(x)\varphi_{n-k}(y).$$

因而有

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k(kx+na)^{n-1}=n!x^{n-1}, \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k(kx+pa)^{p-1}=0\ \ (1\le p\le n-1), \tag{2.11}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k(k+na)^{n-1}=n!. \tag{2.12}$$

显然， (2.12) 是 (2.8) 的推广.

3 $L_n[x]$ 的展开式及其应用

设 $n+1$ 阶方阵 M_k 除 $(k+i,i)(i=1,2,\cdots,k+1)$ 处的值为 $l(k+i,i)$ 外，其余值均为 $0(k=1,2,\cdots,n)$. 注意到

$$L_n[x]=I_{n+1}+\varphi_1(x)M_1+\varphi_2(x)M_2+\cdots+\varphi_n(x)M_n. \tag{3.1}$$

引理 3.1

$$M_1M_k=(k+1)M_{k+1}(k=1,2,\cdots,n-1),M_1M_n=0,$$

$$M_k=\frac{(M_1)^k}{k!},\ \ k=1,2,\cdots,n,M_1^{n+1}=0. \tag{3.2}$$

定理 3.1 n 是一个非负整数，则

$$L_n[x]=I_{n+1}+\varphi_1(x)M+\frac{\varphi_2(x)}{2!}M^2+\cdots+\frac{\varphi_n(x)}{n!}M^n, \tag{3.3}$$

$$L_n=I_{n+1}+M+\frac{1}{2!}M^2+\cdots+\frac{1}{n!}M^n, \tag{3.4}$$

其中 $M_1=M$. 从这个展开式很容易得出.

推论 3.1 (1) M 与 $L_n, L_n[x]$ 的乘积是可交换的;

(2) $(L_n[x]-I_{n+1})^n=\varphi_1^n(x)M^n=x^n n!M_n$;

(3) $L_n[x]-I_{n+1})^{n+1}=0$;

(4) 当 $n\geq 2$, 由 $(L_n[x]-I_{n+1}-Mx)^{n-1}=0$, 得

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\binom{n-1}{k}\varphi_n(kx)=\frac{1}{2}n!(n-1)x^{n-2}\varphi_2(x). \tag{3.5}$$

例 3.1 在 (3.5) 中设 $\varphi_n(x)=x^n$ 得

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\binom{n-1}{k}k^n=\frac{n!(n-1)}{2}\quad(n\geq 2). \tag{3.6}$$

例 3.2 对任意实数 x,λ, 若在 (3.5) 中设 $\varphi_n(x)=x^{n|\lambda}(n\geq 2)$, 则

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\binom{n-1}{k}k(kx+\lambda)\cdots(kx+(n-1)\lambda)=\frac{1}{2}n!(n-1)x^{n-2}(x+\lambda). \tag{3.7}$$

推论 3.2 $n+1$ 阶 Pascal 矩阵 P_n 定义为:

$$(P_n)_{ij}=\begin{cases}\binom{i-1}{j-1} & \text{如果 } i\geq j\\ 0 & \text{否则}\end{cases}\quad(i,j=1,2,\cdots,n+1).$$

$n+1$ 阶方阵 M_p 除了 $(M_p)_{i+1,i}=i+1(i=1,2,\cdots,n)$ 外，其余值全为 0. 则

$$P_n=I_n+M_p+\frac{1}{2!}M_p^2+\cdots+\frac{1}{n!}M_p^n. \tag{3.8}$$

例 3.3 4 阶 Pascal 矩阵 P_3 可以表示为

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\end{pmatrix}+$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\end{pmatrix}^2+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\end{pmatrix}^3.$$

推论 3.3 $n+1$ 阶 Lah 矩阵 L_n 定义为:

$$(L_n)_{ij}=\begin{cases}\binom{i-1}{j-1}\frac{i!}{j!} & \text{如果 } i\geq j\\ 0 & \text{否则}\end{cases}\quad(i,j=1,2,\cdots,n+1).$$

$n+1$ 阶方阵 M_L 除了 $(M_L)_{i+1,i}=(i+1)i(i=1,2,\cdots,n)$ 外其余值全为 0, 则

$$L_n=I_n+M_L+\frac{1}{2!}M_L^2+\cdots+\frac{1}{n!}M_L^n. \tag{3.9}$$

例 3.4 4 阶 Lah 矩阵 L_3 可以表示为

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\6&6&1&0\\24&36&12&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&0\\0&6&0&0\\0&0&12&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&0\\0&6&0&0\\0&0&12&0\end{pmatrix}^2+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&0\\0&6&0&0\\0&0&12&0\end{pmatrix}^3.$$

事实上，只要满足 (1.1) 式的 $l(i,j)$ 组成的矩阵都可以得到类似的展开式.

推论 3.4 广义 $n+1$ 阶 Pascal 矩阵 $P_n[x],P_{n,\lambda}[x]$ 分别定义为

$$(P_n[x])_{ij}=\begin{cases}\binom{i-1}{j-1}x^{i-j} & \text{如果 } i\geq j\\ 0 & \text{否则}\end{cases}\quad(i,j=1,2,\cdots,n+1);$$

$$(P_{n,\lambda}[x])_{ij}=\begin{cases}\binom{i-1}{j-1}x^{(i-j)|\lambda} & \text{如果 } i\geq j\\ 0 & \text{否则}\end{cases}\quad(i,j=1,2,\cdots,n+1).$$

则

$$P_n[x]=I_{n+1}+xM_p+\frac{x^2}{2!}M_p^2+\cdots+\frac{x^n}{n!}M_p^n, \tag{3.10}$$

$$P_{n,\lambda}[x]=I_{n+1}+x^{1|\lambda}M_p+\frac{x^{2|\lambda}}{2!}M_p^2+\cdots+\frac{x^{n|\lambda}}{n!}M_p^n. \tag{3.11}$$

推论 3.5 广义 $n+1$ 阶 Lah 矩阵 $L_n[x],L_{n,\lambda}[x]$ 分别定义为:

$$(L_n[x])_{ij}=\begin{cases}\binom{i-1}{j-1}\frac{i!}{j!}x^{i-j} & \text{如果 } i\geq j\\ 0 & \text{否则}\end{cases}\quad(i,j=1,2,\cdots,n+1);$$

$$(L_{n,\lambda}[x])_{ij}=\begin{cases}\binom{i-1}{j-1}\frac{i!}{j!}x^{(i-j)|\lambda} & \text{如果 } i\geq j\\ 0 & \text{否则}\end{cases}\quad(i,j=1,2,\cdots,n+1).$$

则

$$L_n[x]=I_{n+1}+xM_L+\frac{x^2}{2!}M_L^2+\cdots+\frac{x^n}{n!}M_L^n, \tag{3.12}$$

$$L_{n,\lambda}[x]=I_{n+1}+x^{1|\lambda}M_L+\frac{x^{2|\lambda}}{2!}M_L^2+\cdots+\frac{x^{n|\lambda}}{n!}M_L^n. \tag{3.13}$$

推论 3.6 二元函数矩阵 $L_n[x,y]$ 定义为:

$$(L_n[x,y])_{ij}=\begin{cases}\varphi_{i-j}(x)l(i,j)y^{i-j} & \text{如果 } i\geq j\\ 0 & \text{否则}\end{cases}\quad(i,j=1,2,\cdots,n+1).$$

m 为非负正整数, x, y, z 是任意实数, 则

(1) $L_n[x+y, z] = L_n[x, z]L_n[y, z]$;

(2) $L_n[mx, y] = (L_n[x, y])^m$;

(3) $L_n[x, y] = I_{n+1} + \varphi_1(x)yM + \frac{\varphi_2(x)}{2!}y^2M^2 + \cdots + \frac{\varphi_n(x)}{n!}y^nM^n$;

(4) $(L_n[x, y] - I_{n+1})^{n+1} = 0$;

(5) $(L_n[x, y] - I_{n+1})^n = n!(xy)^nM_n$.

参考文献:

[1] CHEON Gi-sang, KIM Jin-soo. *Stirling matrix via Pascal matrix* [J]. Linear Algebra Appl., 2001, **329**: 49–59.
[2] BAYAT M, TEIMOORI H. *The linear algebra of the generalized Pascal functional matrix* [J]. Linear Algebra Appl., 1999, **295**: 81–89.
[3] COMET L. *Advanced Combinatorics* [M]. Boston: D.Reidel Pub. Co., 1974.
[4] BRAWER R, PIROVINO M. *The linear algebra of the Pascal matrix* [J]. Linear Algebra Appl., 1992, **174**: 13–23.
[5] CALL G S, VELLEMAN D J. *Pascal's matrices* [J]. Amer. Math. Monthly, 1993, **100**: 372–376.
[6] ZHANG Zhi-zheng, LIU Mai-xue. *An extension of the generalized Pascal matrix and its algebraic properties* [J]. Linear Algebra Appl., 1998, **271**: 169–177.
[7] ZHAO Xi-qiang, WANG Tian-ming. *The algebraic properties of the generalized Pascal functional matrices associated with the exponential families* [J]. Linear Algebra Appl., 2000, **318**: 45–52.
[8] GOULD H W. *Combinatorial Identities* [M]. Morgantown, West Virginia, 1972.
[9] LOEB D E, ROTA G C. *Formal power series of logarithmic type* [J]. Adv. Math., 1989, **75**: 1–118.
[10] WILF H S. *Generating functionology. Second edition* [M]. San Diego: Academic Press, 1994.
[11] BAYAT M, TEIMOOR H. *Pascal k-eliminated functional matrix and its property* [J]. Linear Algebra Appl., 2000, **308**: 65–75.
[12] TAN Ming-shu, WANG Tian-ming. *Lah matrix and its algebraic properties* [J]. ARS Combinatoria, 2004, **70**: 97–108.

The Properties of Lower Triangular Matrix Associated with Polynomial of Binomial Type

TAN Ming-shu[1,2], *WANG Tian-ming*[1]
(1. Dept. of Appl. Math., Dalian University of Technology, Liaoning 116024, China;
2. Dept. of Math., Chongqing Three Gorges University, Chongqing 404000, China)

Abstract: The properties of the lower triangular functional matrix $L_n[x]$ associated with a polynomial of binomial type are discussed in this paper, in which the entry-(i,j) of $L_n[x]$ is equal to $l_{ij} = \varphi_{i-j}(x)l(i,j)$ if $i \geq j$ and equal to 0 otherwise, with $l(i,k)l(k,j) = l(i,j)\binom{i-j}{k-j}$ and $\varphi_n(x+y) = \sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{k}\varphi_k(x)\varphi_{n-k}(y)$ for integers n, k, i, j and real numbers x, y. Pascal matrix and its generalizations are special cases of $L_n[x]$. More general results and some combinatorial identities are derived.

Key words: Pascal matrix; polynomial of binomial type; lower triangular matrix.