第17卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 17 No. 4
1997年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1997

一类非线性拟变分不等式*

刘 振 海
(长沙电力学院数学系, 410077)

摘 要 本文利用伪单调算子理论研究如下变分不等式问题: 求 $x\in M$, 使得
$$\langle Ax, y-x\rangle+\langle Gx, y-x\rangle\ge\langle f, y-x\rangle,\ \forall y\in M.$$
并将所得结果应用于拟线性椭圆型边值问题的求解

关键词 变分不等式, 伪单调映射, 拟线性方程
分类号 AMS(1991) 49R20/CCL O176.3

1 引 言

变分不等式理论日臻完善, 它的研究与能量泛函的凸性密切相关. 事实上, 变分不等式解的存在性是基于单调方法. 本文的目的是研究非线性拟变分不等式.

假设 X 是可分自反Banach 空间, X^* 是其对偶空间. 对偶积用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示. X 和 X^* 中范数均用 $\|\cdot\|$ 表示. 这根据上下文将不致引起混淆. M 是 X 中的一个任意非空闭凸子集. 设 A、G 是 M 到 X^* 的算子, $f\in X^*$. 研究如下非线性拟变分不等式:

寻求 $x\in M$, 使得
$$\langle Ax, y-x\rangle+\langle Gx, y-x\rangle\ge\langle f, y-x\rangle,\ \forall y\in M. \tag{1}$$
如果(1)中 A 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性单调算子, G 是非线性单调映象且 Lipschitz 连续, [2]利用Banach 压缩映象原理, 证明了问题(1)解的存在唯一性. 不同于[2]的证明方法, 现利用伪单调算子理论推广[2]的结果. 考虑 A 是Banach 空间的非线性单调算子, 而算子 G 的条件也将给予放宽. 并将所得结果应用于拟线性椭圆型偏微分算子的不等式.

如果对于任何 $x_n\in M$, x_n(强)$\to x$, 可推出 Tx_n(弱)$\to Tx$, 则称算子 $T: M\to X^*$ 是次连续的. 假设

(i) 算子 $A, G: M\to X^*$ 次连续.

(ii) 强单调条件 $\langle Ax-Ay, x-y\rangle\ge c_1\|x-y\|^p,\ \forall x, y\in M$, 其中 c_1, p 是正常数, $1<p<+\infty$.

(iii) 存在正常数 c_2, 使 $\|Ax\|\le c_2(\|x\|^{p-1}+1),\ \forall x\in M$.

(iv) 存在正常数 c_3, c_4, ϵ, 使得 $\|Gx\|\le c_3(\|x\|^{p-1}+1),\ \forall x\in M$;
$$\langle Gx, x\rangle\ge-(c_1-\epsilon)\|x\|^p-c_4,\ \forall x\in M.$$

* 1995年5月8月收到. 1997年3月4日收到修改稿. 国家教委留学回国人员资助金和电力部电力新星基金资助课题.

(v) 对于$\forall x_n\in M$, x_n(弱)$\to x$, 有$\overline{\lim}\langle Gx_n, x_n- x\rangle\ge 0$.

2 变分不等式解的存在性与唯一性

首先, 给出

定义 算子 $T: M\to X$ 称为伪单调的, 若它满足以下条件

(a) T 有界, 即 T 把M 中的有界集变到X 中的有界集;

(b) 当 $x_n, x\in M$, x_n(弱)$\to x$ 且$\overline{\lim}\langle Tx_n, x_n- x\rangle\le 0$, 则有$\underline{\lim}\langle Tx_n, x_n- y\rangle\ge\langle Tx, x- y\rangle$, $\forall y\in X$.

引理 设算子A, G 满足条件(i)-(v), 那么$A+G: M\to X$ 是伪单调算子. 如果M 无界, 则$A+G$ 是强制的, 即存在 $x_0\in M$, 当 $x\in M$, $\|x\|\to+\infty$时, 有

$$\frac{\langle (A+G)x, x-x_0\rangle}{\|x\|}\to+\infty. \tag{2}$$

证明 首先证明伪单调性. 由假设(iii), (iv)知, $A+G$ 是有界的. 设 $x_n\in M$, x_n(弱)$\to x$ 且

$$\overline{\lim}\langle (A+G)x_n, x_n-x\rangle\le 0, \tag{3}$$

就有

$$x_n(\text{强})\to x. \tag{4}$$

要不然, 存在 $\delta>0$和子序列$\{x_{n_k}\}\subseteq\{x_n\}$, 使得

$$\|x_{n_k}-x\|\ge\delta,\quad \forall n_k. \tag{5}$$

由上极限的定义, 可以选取子序列$\{x_{n_k'}\}\subseteq\{x_{n_k}\}$, 使

$$\overline{\lim}\langle Gx_{n_k}, x_{n_k}-x\rangle = \lim\langle Gx_{n_k'}, x_{n_k'}-x\rangle. \tag{6}$$

利用(3)和(6), 有

$$\begin{aligned}\overline{\lim}\langle Ax_{n_k'}, x_{n_k'}-x\rangle &\le \overline{\lim}\langle Ax_{n_k'}, x_{n_k'}-x\rangle + \overline{\lim}\langle Gx_{n_k'}, x_{n_k'}-x\rangle\\ &= \overline{\lim}\langle Ax_{n_k'}, x_{n_k'}-x\rangle + \lim\langle Gx_{n_k'}, x_{n_k'}-x\rangle\\ &= \overline{\lim}\langle (A+G)x_{n_k'}, x_{n_k'}-x\rangle\le 0.\end{aligned}$$

又由$x_{n_k'}$(弱)$\to x$, 可得$\overline{\lim}\langle Ax_{n_k'}-Ax, x_{n_k'}-x\rangle\le 0$. 从算子$A$ 的强单调性, 有$x_{n_k'}$(强)$\to x$, 这与(5)式矛盾, 故(4)式成立. 根据假设(i), 又有

$$(A+G)x_n(\text{弱})\to(A+G)x. \tag{7}$$

利用(4)和(7)式, 对任何$y\in X$, 有

$$\begin{aligned}\underline{\lim}\langle (A+G)x_n, x_n-y\rangle &= \underline{\lim}\langle (A+G)x_n, x_n-x\rangle + \langle (A+G)x_n, x-y\rangle]\\ &= \langle (A+G)x, x-y\rangle.\end{aligned}$$

这样就证明了$A+G: M\to X$ 是伪单调算子.

往证强制性. 任取$x_0\in M$, 对任何$x\in M$, 有

$$\begin{aligned}\langle (A+G)x, x-x_0\rangle &= \langle Ax, x-x_0\rangle + \langle Gx, x-x_0\rangle\\ &= \langle Ax-Ax_0, x-x_0\rangle + \langle Ax_0, x-x_0\rangle + \langle Gx, x\rangle - \langle Gx, x_0\rangle\\ &\ge c_1\|x-x_0\|^p - \|Ax_0\|\|x-x_0\|\\ &\quad - (c_1-\epsilon)\|x\|^p - c_4 - c_3(\|x\|^{p-1}+1)\|x_0\|,\end{aligned} \tag{8}$$

这里利用了假设(ii)-(iv). 由(8)式, 可以直接推出(2)式 □

往下证明主要定理

定理1 在假设(i)-(v)下, 拟变分不等式(1)至少存在一个解 如果将假设(v)换成

$$G: M \to X' \text{ 单调},$$

而其它条件不变, 那么, 变分不等式(1)存在唯一解, 且解连续依赖于 $f \in X'$.

证明 定理中第一部分结论由引理及文献[1]中第33页定理2推出

下证第二部分结论 显然, 算子 G 的单调性可直接推出条件(v). 故拟变分不等式(1)的解存在 设 x_i 是(1)的相应于 $f_i \in X'$ $(i=1,2)$ 的解, 则有

$$\langle Ax_1, x_2 - x_1\rangle + \langle Gx_1, x_2 - x_1\rangle \geq \langle f_1, x_2 - x_1\rangle,$$

$$\langle Ax_2, x_1 - x_2\rangle + \langle Gx_2, x_1 - x_2\rangle \geq \langle f_2, x_1 - x_2\rangle.$$

两式相加得

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2\rangle + \langle Gx_1 - Gx_2, x_1 - x_2\rangle \leq \langle f_1 - f_2, x_1 - x_2\rangle.$$

由 G 的单调性, 得

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2\rangle \leq \langle f_1 - f_2, x_1 - x_2\rangle.$$

再利用 A 的强单调性得

$$c_1 \|x_1 - x_2\|^p \leq \|f_1 - f_2\| \|x_1 - x_2\|$$

因此, 立刻得到解的唯一性和解对 f 的连续依赖性 □

注 文献[2]的结果是定理1的一个特例 事实上, 如果 $a(u, v)$ 是 Hilbert 空间 H 上的强制连续双线性型, 由 Riesz 定理, 存在有界线性算子 A, 使得

$$a(u, v) = \langle Au, v\rangle, \quad \forall u, v \in H.$$

显然, 有界线性算子 A 自然满足本文中假设条件(i)-(iii). 而算子 G 的限制已本质上得到了减弱

3 应 用

本节利用前面所得结果, 研究非线性二阶椭圆型偏微分算子的不等式 对于高阶情形可以类似考虑

记

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega a_0(x, u, u_x) v\, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega a_i(x, u, u_x) v_{x_i} dx, \tag{9}$$

$$\langle Gu, v\rangle = \int_\Omega g(x, u, u_x) v\, dx, \tag{10}$$

其中 $u_x \equiv (u_{x_1}, \cdots, u_{x_n})$, Ω 是 R^n 中有界区域且 $\partial\Omega \in C^1$.

假设

(F_1) 函数 $a_i(x, \xi) = a_i(x, \xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$, $g(x, \xi) = g(x, \xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$, $x \in \Omega$, $\xi \in R^{n+1}$, 满足 Caratheodory 条件, 即对固定的 $\xi \in R^{n+1}$, 是 x 的可测函数; 而对几乎所有 $x \in \Omega$, 是 ξ 的连续函数

(F_2) 存在正常数 c_1, p, 且 $1 < p < +\infty$, 使得

$$\sum_{i=0}^{n}[a_i(x,\xi)-a_i(x,\xi')](\xi_i-\xi_i')\geq c_1|\xi-\xi'|^p,$$

$$\text{a.e. } x\in\Omega,\quad \forall\xi,\xi'\in R^{n+1}.$$

(F$_3$) 存在正常数 c_2, $k_1(x)\in L^{p'}(\Omega)$, $p'=\dfrac{p}{p-1}$, 使得

$$|a_i(x,\xi)|\leq c_2|\xi|^{p-1}+k_1(x),$$

$$\text{a.e. } x\in\Omega,\quad \forall\xi\in R^{n+1},\quad i=0,1,\cdots,n.$$

(F$_4$) 存在正常数 c_3, ϵ, $k_2(x)\in L^{p'}(\Omega)$, $\varphi(x)\in L^1(\Omega)$, 使得

$$|g(x,\xi)|\leq c_3|\xi|^{p-1}+k_2(x),$$

$$g(x,\xi)\xi_0\geq-(c_1-\epsilon)|\xi|^p-\varphi(x),$$

$$\text{a.e. } x\in\Omega,\quad \forall\xi=(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n)\in R^{n+1}.$$

众所周知(例如[3],[4]),如果条件(F$_1$)-(F$_4$)满足,算子 A, G 就定义了从 $W^{1,p}(\Omega)$ 到它的对偶空间的一个有界连续映象,即条件(i)满足.具体形式为

$$Au=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,u,u_x)+a_0(x,u,u_x),$$

$$Gu=g(x,u,u_x),\quad \forall u\in W^{1,p}(\Omega).$$

往下验证算子 A, G 满足定理1的条件(ii)-(v).而条件(ii)-(iv)可以从(F$_1$)-(F$_4$)直接推出.仅证明(v)成立.任取 $u_n\in W^{1,p}(\Omega)$, u_n(弱)$\to u$.由紧嵌入定理(参见[5]),存在子序列 $\{u_{n_k}\}\subseteq\{u_n\}$, 使得在 $L^p(\Omega)$ 中

$$u_{n_k}(\text{强})\to u.$$

故由 G 的有界性,有

$$\lim\langle Gu_{n_k},u_{n_k}-u\rangle=\lim\int_\Omega g(x,u_{n_k},(u_{n_k})_x)(u_{n_k}-u)dx=0.$$

由此可得 $\overline{\lim}\langle Gu_n,u_n-u\rangle\geq0$, 即条件(v)成立.从而有

定理2 设 M 是 $W^{1,p}(\Omega)$ 中非空闭凸集,且 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$, g 满足条件(F$_1$)-(F$_4$),则对任何 $f\in(W^{1,p}(\Omega))'$, 存在 $u\in M$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega a_i(x,u,u_x)(v_{x_i}-u_{x_i})dx+\int_\Omega a_0(x,u,u_x)(v-u)dx$$

$$+\int_\Omega g(x,u,u_x)(v-u)dx\geq\langle f,v-u\rangle,\quad \forall v\in M.$$

特别地,对任何 $f\in W^{-1,p'}(\Omega)$, $p'=\dfrac{p}{p-1}$, 非线性椭圆型方程

$$\begin{cases}-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,u,u_x)+a_0(x,u,u_x)+g(x,u,u_x)=f, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

存在广义解 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

参 考 文 献

[1] 王耀东，变分不等方程，高等教育出版社，北京，1987。

[2] 向方霓，一类非线性拟变分不等式及其应用，数学研究与评论，15: 1(1995)，101- 104.

[3] M. M. Vainberg, *Variational methods for the study of nonlinear operators*, Holden-Day, Inc., San Francisco 1964.

[4] P. Drabek, A. Kufner, F. Nicolosi, *On the solvability of degenerated quasilinear elliptic equations of higher order*, J. Differential Equations, 109(1994), 325- 347.

[5] R. A. Adams, 索伯列夫空间，叶其孝等译，人民教育出版社，1983.

A Class of Nonlinear Quasi-Variational Inequalities

Liu Zhenhai

(Dept. of Math., Changsha Univeristy of Electric Power, Hunan 410077)

Abstract

In virtue of the theory of pseudomonotone operators, we deal with the following nonlinear quasi-variational inequalities: Find $x \in M$, such that

$$\langle Ax, y - x\rangle + \langle Gx, y - x\rangle \geq \langle f, y - x\rangle, \ \forall y \in M.$$

As applications of the above theorem, boundary value problems for quasi-linear elliptic equations have been solved.

Keywords variational inequalities, pseudomonotone operators, quasilinear equations