第25卷第2期 数学研究与评论 Vol.25, No.2
2005年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2005

文章编号: 1000-341X(2005)02-0369-07 文献标识码: A

拟极小内射模

毛立新 [1,2], 佟文廷 [2]
(1. 南京工程学院基础部, 江苏 南京 210013; 2. 南京大学数学系, 江苏 南京 210093)
(E-mail: maolx2@hotmail.com)

摘　要: 本文给出了拟极小内射模的概念、刻画和性质, 推广了极小内射环和 P- 拟内射模的一些性质.

关键词: 极小子模; 拟极小内射模; 零化子.
MSC(2000): 16D50, 16D10
中图分类: O153.3

1 引 言

一个环 R 称为右 P- 内射环, 是指对任意 $a \in R$, 有 $lr(a) = Ra$. 关于 P- 内射环的研究近几年来受到了很大的重视 [1,2]. P- 内射环有许多推广, 比如可推广到极小内射环和 P- 拟内射模. 关于它们的刻画和性质, 详见 [3,4]. 本文引进了拟极小内射模的概念, 并证明了: M_R 为拟极小内射模当且仅当若 mR 为 M_R 的极小子模, 则有 $l_M r_R(m) = Sm$, 其中 $S = \mathrm{End}(M_R)$. 拟极小内射模既是极小内射环又是 P- 拟内射模的推广. 本文的主要结果给出了: 拟极小内射模与极小 $C_i (i = 1, 2, 3)$ 模、极小零化子模、极小对称模的一些关系; R 的极大右理想与 $_SM$ 的极小子模集存在双射的条件及性质; $J(S)$ 的一些性质等.

本文中的环均指带单位元的结合环, 模均指酉模, $M_R(_RM)$ 表示右 (左)R- 模. $S = \mathrm{End}(M_R)$. 对于任意一个右 R 模 M_R, 我们都可看作一个双模 $_SM_R$. 我们记 $r_R(m) = \{r \in R | mr = 0\}$, 其中 $m \in M$; $l_M(r) = \{m \in M | mr = 0\}$, 其中 $r \in R$. 对于任意的 $X \subseteq M$, $A \subseteq R$, 记 $r_R(X) = \cap_{x \in X} r_R(x)$, $l_M(A) = \cap_{a \in A} l_M(a)$. $N \leq M$, $N \leq_e M$, $N \leq^{\oplus} M$ 分别表示 N 是 M 的子模、本质子模、直和项. $J(M)$, $\mathrm{Soc}(M)$ 分别表示模 M 的 Jacobson 根和基座, $J(R)$ 表示环 R 的 Jacobson 根. 其它有关术语参见 [5, 6].

2 主要结果与证明

定义 1　一个右 R- 模 M_R 称为拟极小内射模, 是指对于 M_R 的任意极小子模 mR 及任意 R- 模同态 $f: mR \to M$, 都能扩张为 M 的自同态. 类似地可定义左拟极小内射模.

注 2　(1) 一个 R- 模 M_R 称为右 P- 拟内射模 [4], 是指对于 M_R 的任意主子模 mR, 及任意 R- 模同态 $f: mR \to M$, 都能扩张为 M 的自同态. 若 R_R 为拟极小内射模 (P- 拟内射模), 则环 R 就是右极小内射环 [3] (右 P- 内射环 [1]). 显然 P- 拟内射模一定是拟极小内射模. 但反之不然. 事实上, 整数环 Z 是极小内射环, 但 Z 不是 P- 内射环.

收稿日期: 2002-11-22
基金项目: 国家教育部博士点专项基金 (20020284009, 20030284033), 南京工程学院科研基金 (KXJ04095), 江苏省博士后科研资助计划.

(2) 若 M_R 的所有极小子模都是直和项 (例如 Z_2 或者满足 $\mathrm{Soc}(M_R)=0$ 的 M_R), 则 M_R 必为拟极小内射模.

(3) 若 M_R 为拟极小内射模, 则 M_R 的任意直和项都是拟极小内射模.

(4) 若 M_R 为拟极小内射模, 则 M 的任意全不变子模都是拟极小内射模.

(5) 文 [7] 中定义了 (P,M)- 内射模. 显见 M_R 为拟极小内射模 $\Longleftrightarrow$ 对环 R 上所有的单模 T, M_R 为 (T,M)- 内射模.

引理 3 设 $m\in M_R$. 则下列条件是等价的:

(1) M_R 为拟极小内射模;

(2) 若 mR 为 M_R 的极小子模, 则有 $l_Mr_R(m)=Sm$;

(3) 若 mR 为 M_R 的极小子模, 并且 $r_R(m)\subseteq r_R(a)$, $a\in M$, 则有 $Sa\subseteq Sm$.

证明 (1)⇒ (2) $Sm\subseteq l_Mr_R(m)$ 是显然的. 反过来, $x\in l_Mr_R(m)$, 定义一个 R- 模同态 $h:mR\to M$ 为 $h:mr\mapsto xr$. 容易验证此定义是完全确定的. 由条件 (1), 存在 $\alpha\in S$, 使 $h(m)=\alpha(m)=x$, 即 $x\in Sm$. 因此 $l_Mr_R(m)=Sm$.

(2)⇒ (3) 若 $r_R(m)\subseteq r_R(a)$, $a\in M$, 则 $a\in l_Mr_R(m)=Sm$, 即 $Sa\subseteq Sm$.

(3)⇒ (1) 设 mR 为 M_R 的任一极小子模. 任取一个 R- 模同态 $h:mR\to M$, 则 $r_R(m)\subseteq r_R(h(m))$, 由 (3), $h(m)\in Sm$. 即存在 $\alpha\in S$, 使 $h(m)=\alpha(m)$, 因此 M_R 为拟极小内射模.

定义 4[3] 右 R- 模 M 称为极小 C_1 模, 是指对于 M 的任意极小子模 K, 都存在 $N\leq^{\oplus}M$, 使得 $K\leq_e N$.

右 R- 模 M 称为极小 C_2 模, 是指对于 M 的任意极小子模 K, 若 $K\cong N, N\leq^{\oplus}M$, 则 $K\leq^{\oplus}M$.

右 R- 模 M 称为极小 C_3 模, 是指对于 M 的任意极小子模 N, 且 $N\leq^{\oplus}M$, 以及 $L\leq^{\oplus}M$, $N\cap L=0$, 都有 $N\oplus L\leq^{\oplus}M$.

对左 R- 模可类似地定义极小 C_1 模、极小 C_2 模和极小 C_3 模.

命题 5 设 M_R 是拟极小内射模, 则

(1) M_R 为极小 C_2 模.

(2) M_R 为极小 C_3 模.

证明 (1) 设 mR 为 M_R 的极小子模, $N\leq^{\oplus}M$, $\alpha:mR\to N$ 为 R- 模同构. 记 $\pi:M\to N$ 为标准投射. 由题设, 存在 $\beta\in S$ 为 α 的扩张. 令 $\gamma=\alpha^{-1}\pi\beta:M\to mR$. 则 $\gamma(m)=\alpha^{-1}\pi\beta(m)=\alpha^{-1}\pi\alpha(m)=\alpha^{-1}\alpha(m)=m$. 因此包含映射 $\iota:mR\to M$ 可裂, 故 $mR\leq^{\oplus}M$. 即 M_R 为极小 C_2 模.

(2) 设 N 为 M_R 的极小子模, $N\leq^{\oplus}M_R, L\leq^{\oplus}M_R, N\cap L=0$. 则存在 $e,f\in S$, $e^2=e$, $f^2=f$, 使 $L=eM$, $N=fM$. 注意到 $eM\oplus fM=eM\oplus(1-e)fM$, 故有 $(1-e)fM\cong fM$. 由 (1), 存在 $h\in S$, $h^2=h$, 使得 $(1-e)fM=hM$, 因此 $eh=0$. 令 $g=e+h-he$, 则 $g^2=g, eg=e=ge, hg=h=gh$, 从而 $L\oplus N=eM\oplus hM=gM\leq^{\oplus}M$, 即 M_R 为极小 C_3 模.

设 K 为单右 R- 模, M 为右 R- 模, $Tr_M(K)$ 表示 K 在 M 中的迹, [5] 中称它为 $\mathrm{Soc}(M)$ 的 K- 齐次分量, 它是一个左 S 右 R 双模.

命题 6 设 M_R 是拟极小内射模, $m\in M$.

(1) 若 mR 为 M_R 的极小子模, 则有 Sm 为 ${}_SM$ 的极小子模.

(2) $\mathrm{Soc}(M_R)\subseteq\mathrm{Soc}({}_SM)$.

(3) 若 $kR\cong mR$ 为 M_R 的极小子模, $k\in M$, 则有 $Sk\cong Sm$.

(4) 若 mR 为 M_R 的极小子模，则 $Tr_M(mR)=SmR$ 是 ${}_SM_R$ 的极小双子模.

证明 (1) 任取 $0\neq sm\in Sm$, $s\in S$. 则由 mR 为 M_R 的极小子模，知 $s:mR\to s(mR)$ 为同构. 因此存在 $s^{-1}:s(mR)\to mR$. 由题设，存在 s^{-1} 的扩张 $h\in S$, 使 $h(sm)=s^{-1}s(m)=m$, 因此 $m\in Ssm$. 即 Sm 为 ${}_SM$ 的极小子模.

(2) 由 (1) 可得.

(3) 设 $h:kR\to mR$ 为同构， $h(k)=ma$, $a\in R$. 显见 $r(k)=r(hk)$. 由于 $mR=h(kR)$ 为 M_R 的极小子模，由引理 3 可知， $Sk=Sh(k)=(Sm)a$. 容易验证 $\alpha:sm\mapsto(sm)a$ 为 Sm 到 Sk 的同构.

(4) 若 mR 为 M_R 的极小子模，显然有 $SmR\subseteq Tr_M(mR)$. 设 $\alpha:mR\to M$ 为非零 R- 模同态，则 α 为单同态. 故 $r_R(m)=r_R(\alpha m)$. 由引理 3 可知， $Sm=S\alpha m$, 因此 $\alpha(mR)=(\alpha m)R\subseteq SmR$, $Tr_M(mR)\subseteq SmR$, 即 $Tr_M(mR)=SmR$. 下面证明 $Tr_M(mR)$ 是 ${}_SM_R$ 的极小双子模.

假设 $A\neq 0$ 是 $Tr_M(mR)=SmR$ 的一个双子模，则存在单右 R- 模 $L\subseteq A\subseteq Tr_M(mR)$, 使 $L\cong mR$.

$\forall 0\neq f\in \mathrm{Hom}_R(mR,M)$, 显然 $\mathrm{Im}f\in Tr_M(mR)$. 令 $X=\mathrm{Im}f$, 则 $X\cong mR$. 故存在 R- 模同构 $g:L\to X$. 由于 M_R 是拟极小内射模，所以存在 g 的扩张 $h\in S$, 使 $h(L)=g(L)$. 又由于 A 为左 S 模，因此 $X=g(L)=h(L)\subseteq h(A)\subseteq A$. 即 $Tr_M(mR)=A$. 因而 $Tr_M(mR)$ 是 ${}_SM_R$ 的极小双子模.

定义 7 右 R- 模 M_R 称为极小对称模，是指对于 M_R 的任意极小子模 mR, Sm 都是 ${}_SM$ 的极小子模. 对左 R- 模类似地可定义极小对称模.

命题 8 设 M_R 为极小对称模，则 $\mathrm{Soc}(M_R)\subseteq\mathrm{Soc}({}_SM)$.

证明 根据定义直接验证.

命题 9 设 $m\in M_R$. 则下列条件是等价的:

(1) M_R 为极小对称模;

(2) 若 mR 为 M_R 的极小子模，则 $l_S[mR\cap r_M(\alpha)]=l_S(m)+S\alpha,\forall\alpha\in S$.

证明 (1)⇒ (2) 设 mR 为 M_R 的极小子模. $\forall\alpha\in S$.

如果 $\alpha m=0$, 则有 $mR\cap r_M(\alpha)=mR$ 以及 $l_S(m)+S\alpha=l_S(m)$. 因此有

$$l_S[mR\cap r_M(\alpha)]=l_S(m)+S\alpha;$$

如果 $\alpha m\neq 0$, 由于 $Sm\cong S/l_S(m)$, 且 Sm 是 ${}_SM$ 的极小子模，故 $l_S(m)$ 是 S 的极大左理想，从而 $l_S(m)+S\alpha=S$. 再由 mR 为 M_R 的极小子模，知 $mR\cap r_M(\alpha)=0$. 同样有 $l_S[mR\cap r_M(\alpha)]=l_S(m)+S\alpha=S$.

(2)⇒ (1) 设 mR 为 M_R 的极小子模，只需证 $l_S(m)$ 是 S 的极大左理想. 事实上，假设存在 ${}_SH$, 满足 $l_S(m)\subset_S H\subseteq_S S$, 则存在 $h\in H$, 使 $h\notin l_S(m)$, 故有 $mR\cap r_M(h)=0$. 由 (2), $l_S(m)+Sh=S$, 因此 $H=S$, 即 $l_S(m)$ 是 S 的极大左理想，从而 M_R 为极小对称模.

右 R- 模 M_R 称为忠实平衡模，是指标准环同态 $\lambda:R\to\mathrm{End}({}_SM)$ 为同构.

命题 10 设 M_R 是忠实平衡模，且 ${}_SM$ 为极小 C_1 模，则下列条件是等价的:

(1) M_R 是拟极小内射模;

(2) M_R 为极小对称模.

证明 (1)⇒ (2) 由命题 6 可得.

(2)⇒ (1) 设 mR 为 M_R 的极小子模. 由 (2), Sm 是 $_SM$ 的极小子模. 又 $_SM$ 为极小 C_1 模, 所以存在 $_SN \leq^{\oplus} {_SM}$, 使 $Sm \leq_e {_SN}$. 故有 $r_R(N) \leq r_R(m)$, $Sm \subseteq l_Mr_R(m) \leq l_Mr_R(N)$. 由 M_R 是忠实平衡模及 $_SN \leq^{\oplus}_S M$ 知, $l_Mr_R(N) = {_SN}$. 故有 $Sm \leq_e l_Mr_R(m)$.

下面证明 $l_Mr_R(m)$ 是半单 S- 模. 这只需证 $l_Mr_R(m) \leq \mathrm{Soc}(_SM)$. 事实上, $\forall 0 \neq a \in l_Mr_R(m)$, 有 $ar_R(m) = 0$, $r_R(m) \leq r_R(a) \neq R$. 由于 $r_R(m)$ 是 R 的极大右理想, 因此 $r_R(m) = r_R(a)$, $aR \cong mR$ 为 M_R 的极小子模. 由 (2), Sa 是 $_SM$ 的极小子模, 因此 $a \in \mathrm{Soc}(_SM)$, $l_Mr_R(m) \leq \mathrm{Soc}(_SM)$. 再由 $Sm \leq_e l_Mr_R(m)$, 可得 $Sm = l_Mr_R(m)$. 根据引理 3, M_R 是拟极小内射模.

定义 11 右 R- 模 M_R 称为极小零化子模, 是指对于 $_SM$ 的任意极小子模 Sm, 都有 $l_Mr_R(m) = Sm$. 对左 R- 模类似地可定义极小零化子模.

命题 12 设 M_R 为极小零化子模, 则下列条件等价:

(1) M_R 是拟极小内射模;

(2) M_R 为极小对称模;

(3) $\mathrm{Soc}(M_R) \subseteq \mathrm{Soc}(_SM)$.

证明 (1)⇒(2)⇒(3) 由命题 6 和命题 8 可得.

(3)⇒(1) 设 mR 是 M_R 的极小子模, 由 (3) 得, $m \in \mathrm{Soc}(_SM)$, 必定有 $_SM$ 的极小子模 Sk, 使 $Sk \subseteq Sm$, 因此 $r_R(m) \subseteq r_R(k) \neq R$. 由 $r_R(m)$ 是 R 的极大右理想得, $r_R(m) = r_R(k)$. 又 M_R 为极小零化子模, 故有 $Sm \subseteq l_Mr_R(m) = l_Mr_R(k) = Sk$, $Sm = Sk = l_Mr_R(m)$, 即 M_R 是拟极小内射模.

推论 13 设 M_R 为极小零化子模, $\mathrm{Soc}(_SM) \leq_e {_SM}$, 则 M_R 是拟极小内射模.

证明 设 mR 是 M_R 的极小子模, 由 $\mathrm{Soc}(_SM) \leq_e {_SM}$ 得, Sm 包含 $_SM$ 的一个极小子模 Sk, 故有 $r_R(m) \subseteq r_R(k)$, 由 $r_R(m)$ 是 R 的极大右理想得, $r_R(m) = r_R(k)$. 又 M_R 为极小零化子模, 得 $Sm \subseteq l_Mr_R(m) = l_Mr_R(k) = Sk$, 故有 $Sm = Sk = l_Mr_R(m)$, 即 M_R 是拟极小内射模.

引理 14 下列条件是等价的:

(1) M_R 是拟极小内射模;

(2) 对于每个单右 R- 模 N, $\mathrm{Hom}_R(N, M)$ 是单左 S- 模或 0;

(3) 对于环 R 的每个极大右理想 T, $l_M(T)$ 是单左 S- 模或 0.

证明 (1)⇒ (2) 设 N 为任一单右 R- 模, 如果 $\mathrm{Hom}_R(N, M) \neq 0$. $\forall 0 \neq \alpha \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$ 及 $\beta \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$. 注意到 $\alpha: N \to \alpha(N)$ 为同构, 由 (1), $\beta\alpha^{-1}: \alpha(N) \to M$ 可扩张为 M 的自同态. 因此存在 $s \in S$, 对于 $\forall n \in N$, 使 $s\alpha(n) = \beta\alpha^{-1}\alpha(n) = \beta(n)$. 故 $s\alpha = \beta$. 即 $\mathrm{Hom}_R(N, M)$ 是单左 S- 模.

(2)⇒ (3) 只需注意到对 R 的任意右理想 I, 有 $l_M(I) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, M)$ 即可.

(2)⇒(1) 设 mR 为 M_R 的极小子模, 则 $r_R(m)$ 为 R 的极大右理想. 任取一个非零 R- 模同态 $h: mR \to M$, 由 (2), $\mathrm{Hom}_R(mR, M)$ 是单左 S- 模. 设 $\iota: mR \to M$ 为包含映射, 则 $h \in S\iota$. 即 M_R 是拟极小内射模.

按照文 [8] 的定义, M_R 称为 Kasch 模, 是指 $\sigma[M]$ 中的任意单模都能嵌入到 M 中. 这里 $\sigma[M]$ 表示由 M_R 次生成的模范畴. 我们记 $\beta_M = \{I \subseteq R_R | I \text{ 是 } R \text{ 的极大右理想}, R/I \in \sigma[M]\}$, $J_M(R) = \cap\{I \subseteq R_R | I \in \beta_M\}$. 不难证明 $J_M(R)$ 为 $\sigma[M]$ 中的所有单右 R- 模类在 R_R 中的余迹. 因此 $J_M(R)$ 为 R 的双边理想.

命题 15 设 M_R 是拟极小内射模，且 M_R 是 Kasch 模，则 $\theta: I \to l_M(I)$ (其中 $I \in \beta_M$) 为从集合 β_M 到 ${}_SM$ 的极小子模集的单射.

证明 $\forall I \in \beta_M$, 由 M_R 是 Kasch 模，知 $l_M(I) \neq 0$. 根据引理 14, $\theta(I) = l_M(I)$ 是单左 S-模.

设有 $I_1, I_2 \in \beta_M$, 使 $\theta(I_1) = \theta(I_2)$, 即 $l_M(I_1) = l_M(I_2)$. 注意到 $I_1 \subseteq r_R l_M(I_1) \neq R$, 由 I_1 为 R 的极大右理想知 $I_1 = r_R l_M(I_1)$. 同理 $I_2 = r_R l_M(I_2)$, 故 $I_1 = I_2$. 因此 $\theta: I \to l_M(I)$ 为从集合 β_M 到 ${}_SM$ 的极小子模集的单射.

定理 16 设 M_R 是拟极小内射模，且 M_R 是 Kasch 模，则下列两条件是等价的：

(1) M_R 为极小零化子模;

(2) $\theta: I \to l_M(I)$ (其中 $I \in \beta_M$) 为从集合 β_M 到 ${}_SM$ 的极小子模集的双射，且 θ^{-1} 由 $K \to r_R(K)$ 给出 (其中 K 为 ${}_SM$ 的极小子模).

当上述条件之一满足时，下列结论成立：

(3) mR 为 M_R 的极小子模 $\Leftrightarrow$ Sm 为 ${}_SM$ 的极小子模， $m \in M$.

(4) $\mathrm{Soc}(M_R) = \mathrm{Soc}({}_SM)$.

(5) $J_M(R) = r_R(\mathrm{Soc}(M_R))$.

(6) $R/J_M(R)$ 是半单模 $\Leftrightarrow u.\dim({}_SM) < \infty$ (其中 $u.\ \dim({}_SM)$ 表示 ${}_SM$ 的一致维数).

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 任取 ${}_SM$ 的极小子模 Sm, 先证 $r_R(m) \in \beta_M$.

因为 $r_R(m) \neq R$, 所以一定存在 R 的极大右理想 T, 使 $r_R(m) \subseteq T \neq R$. 由 (1), $Sm = l_M r_R(m) \supseteq l_M(T)$. 由于 M_R 是 Kasch 模，可得 $l_M(T) \neq 0$. 故 $Sm = l_M(T)$, $T \subseteq r_R l_M(T) = r_R(m)$, 即 $r_R(m) = T$. 又 $R/r_R(m) \cong mR \in \sigma[M]$, 因此 $r_R(m) \in \beta_M$. 再由 $Sm = l_M(r_R(m))$ 知， θ 是满的. 而根据命题 15, θ 是单的，故 θ 为双射，且 θ^{-1} 由 $K \to r_R(K)$ 给出.

(2)$\Rightarrow$(1) 任取 ${}_SM$ 的极小子模 Sm. 由 (2) 知， $r_R(m) \in \beta_M$, 且有 $l_M r_R(m) = Sm$. 即 M_R 为极小零化子模.

当条件 (1),(2) 之一满足时，我们有：

(3) mR 为 M_R 的极小子模 $\Leftrightarrow r_R(m) \in \beta_M \Leftrightarrow Sm = l_M r_R(m)$ 为 ${}_SM$ 的极小子模.

(4) 由 (3) 可得.

(5) 注意到 $\mathrm{Soc}(M_R)J_M(R) = 0$, 故 $J_M(R) \subseteq r_R(\mathrm{Soc}(M_R))$. 另一方面， $\forall I \in \beta_M$, 由于 $l_M(I) \subseteq \mathrm{Soc}({}_SM) = \mathrm{Soc}(M_R)$, 因此 $r_R l_M(I) \supseteq r_R(\mathrm{Soc}(M_R))$. 由 (2), $r_R l_M(I) = I$, 故 $r_R(\mathrm{Soc}(M_R)) \subseteq I$, 即 $r_R(\mathrm{Soc}(M_R)) \subseteq J_M(R)$. 从而 $J_M(R) = r_R(\mathrm{Soc}(M_R))$.

(6) 的证法与文 [9] 定理 1.4 (5) 类似.

引理 17 设 M_R 为极小对称模， kR 和 mR 是 M_R 的极小子模，则下列条件等价：

(1) 若 $kR \cap mR = 0$, 则 $Sk \cap Sm = 0$;

(2) 若 $Sk = Sm$, 则 $kR = mR$.

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 假设 $kR \neq mR$, 则 $kR \cap mR = 0$. 由 (1) 得， $Sk \cap Sm = 0$, 这与 $Sk = Sm$ 矛盾，所以 $kR = mR$.

(2)$\Rightarrow$(1) 假设 $Sk \cap Sm \neq 0$, 则 $Sk = Sm$. 由 (2) 得， $kR = mR$. 这与 $kR \cap mR = 0$ 矛盾. 所以 $Sk \cap Sm = 0$.

命题 18 设环 R 只有 n 个不同的极大右理想， M_R 是拟极小内射模.

(1) 若 M_R 是 Kasch 模，且是极小零化子模，则 $u.\dim(\mathrm{Soc}({}_SM)) \leq n$.

(2) 若 M_R 满足引理 17 的条件，则 $u.\dim(\mathrm{Soc}(M_R)) \leq n$.

证明 (1) 假设 $\mathrm{Soc}(_SM)$ 存在 $n+1$ 个不同的极小左 S- 子模的直和 $K_1\oplus K_2\oplus\cdots\oplus K_{n+1}$. 根据定理 16, $r_R(K_i)\in\beta_M$, $i=1,2,\cdots,n+1$. 由题设, 必有 $i\neq j$, 使 $r_R(K_i)=r_R(K_j)$. 因此 $K_i=l_Mr_R(K_i)=l_Mr_R(K_j)=K_j$, 矛盾. 故 $u.\dim(\mathrm{Soc}(_SM))\leq n$.

(2) 假设 $\mathrm{Soc}(M_R)$ 有 $n+1$ 个不同的极小右 R- 子模的直和 $k_1R\oplus k_2R\oplus\cdots\oplus k_{n+1}R$. 显然 $r_R(k_i)$ 是 R 的极大右理想, $i=1,2,\cdots,n+1$. 由题设, 必有 $i\neq j$, 使 $r_R(k_i)=r_R(k_j)$. 根据引理 3, $Sk_i=Sk_j$. 而由引理 17 知, $k_iR=k_jR$, 矛盾. 所以 $u.\dim(\mathrm{Soc}(M_R))\leq n$.

我们记 $W_M(S)=\{t\in S|r_M(t)\leq {}_eM_R\}$. 可以证明 $W_M(S)$ 是一个双侧理想 [9], 且 $W_M(S)\subseteq\{t\in S|r_M(1_S-st)=0,\forall s\in S\}$.

命题 19 设 $\mathrm{Soc}(M_R)\subseteq\mathrm{Soc}(_SM)$ (例如 $\mathrm{Soc}(M_R)=0$).

(1) 若 $\mathrm{Soc}(M_R)\leq {}_eM_R$, 则 $J(S)\subseteq W_M(S)$.

(2) 若 S 又是半完全环, 则 $J(S)=W_M(S)$.

证明 (1) 由题设, $J(S)\mathrm{Soc}(M_R)\subseteq J(S)\mathrm{Soc}(_SM)=0$. 因此 $\mathrm{Soc}(M_R)\subseteq r_M(J(S))$. 又由于 $\mathrm{Soc}(M_R)\leq {}_eM_R$, 故有 $r_M(J(S))\leq {}_eM_R$. 可知对于 $\forall t\in J(S)$, 有 $r_M(t)\leq {}_eM_R$, 故 $t\in W_M(S)$, 即 $J(S)\subseteq W_M(S)$.

(2) 若 S 又是半完全环, 则必定有 $W_M(S)\subseteq J(S)$. 否则根据半完全环中的不包含在 $J(S)$ 中的非零右理想必包含非零幂等元的事实以及 $W_M(S)$ 中不包含非零幂等元, 将导致矛盾. 再由 (1) 得, $J(S)=W_M(S)$.

推论 20 设 M_R 是拟极小内射模, $\mathrm{Soc}(M_R)\leq {}_eM_R$, 且 S 是半完全环, 则 $J(S)=W_M(S)$.

证明 若 M_R 是拟极小内射模, 由命题 6, $\mathrm{Soc}(M_R)\subseteq\mathrm{Soc}(_SM)$. 再由命题 19 知, $J(S)=W_M(S)$.

命题 21 设 M_R 是非奇异拟极小内射模, 且 $\mathrm{Soc}(M_R)\leq {}_eM_R$, 则 $J(S)=0$.

证明 根据命题 19, 有 $J(S)\subseteq W_M(S)$. 因此只需证明 $W_M(S)=0$.

$\forall t\in W_M(S)$, 有 $r_M(t)\leq {}_eM_R$. 注意到存在 R- 模正合列 $0\to r_M(t)\to M\to tM\to 0$. 因此 $tM\cong M/r_M(t)$. 又由 M_R 是非奇异模, 可知 $r_M(t)$ 是 M_R 的闭子模. 所以 $r_M(t)=M_R$, $tM=0$, $t=0$. 从而 $J(S)=0$.

$\mathrm{Soc}(M_R)$ 称为 Squarefree 的 [3], 是指 $\mathrm{Soc}(M_R)$ 的每一个非零齐次分量是单 R- 模. 不难验证 $\mathrm{Soc}(M_R)$ 为 Squarefree 的当且仅当对于 M_R 的任意极小子模 mR 及任意的 R- 模同态 $\gamma: mR\to M_R$, 都有 $\gamma(m)\in mR$. 显然若 $\mathrm{Soc}(M_R)$ 为 Squarefree 的, 则 M_R 的任意极小子模都是 M_R 的全不变子模.

M_R 称为分配模 [10], 是指对于 M_R 的任意子模 A,B,C, 都有 $A\cap(B+C)=A\cap B+A\cap C$.

M_R 称为 duo 模 [4], 是指 M_R 的任意子模都是 M_R 的全不变子模.

命题 22 设 M_R 为拟投射的 duo 模, 且 M_R 的任意商模都为拟极小内射模, 则 M_R 为分配模.

证明 我们首先证明对于 M_R 的任意子模 N, M/N 都为 duo 模.

事实上, 设 L/N 为 M/N 的任一个子模, 令 $\pi: M\to M/N$ 为自然投射. $\forall f\in\mathrm{End}_R(M/N)$, 由于 M_R 为拟投射模, 故存在 $g\in S$, 使 $f\pi=\pi g$. 又因为 M_R 为 duo 模, 所以 $g(L)\leq L$, $f(L/N)=(g(L)+N)/N\leq L/N$. 即 M/N 为 duo 模.

任取 M/N 的极小子模 $\bar{k}R$, 令 $T=\mathrm{End}_R(M/N)$. 则由 M/N 为 duo 模知, $T\bar{k}R\leq\bar{k}R\leq Tr_{M/N}(\bar{k}R)$. 由命题 6, $Tr_{M/N}(\bar{k}R)=T\bar{k}R$. 故 $T\bar{k}R=\bar{k}R$. 即 $Tr_{M/N}(\bar{k}R)$ 为单右 R- 模. 因此

Soc(M/N) 为 Squarefree 的，由文 [10] 定理 1, M_R 为分配模.

参考文献：

[1] NICHOLSON W K, YOUSIF M F. *Principally injective rings* [J]. J. Algebra, 1995, **174**: 77–93.
[2] PUNINSKI G, WISBAUER R, YOUSIF M F. *On principally injective rings* [J]. Glasgow Math. J., 1995, **37**: 373–378.
[3] NICHOLSON W K, YOUSIF M F. *Mininjective rings* [J]. J. Algebra, 1997, **187**: 548–578.
[4] NICHOLSON W K, PARK J K, YOUSIF M F. *Principally quasi-injective modules* [J]. Comm. Algebra, 1999, **27**: 1683–1693.
[5] ANDERSON F W, FULLER K R. *Rings and Categories of Modules* [M]. Springer-Verlag, New York, 1974.
[6] 佟文廷. 同调代数引论 [M]. 北京：高等教育出版社，1998.
TONG Wen-ting. *Introduction to Homological Algebra* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1998. (in Chinese)
[7] SHAMSUDDIN A. *n-injectivity and n-flatness* [J]. Comm. Algebra, 2001, **29**: 2039–2050.
[8] AlBU T, WISBAUER R. *Kasch Modules* [M]. Advances in ring theory (Granville, OH, 1996), 1–16, Trends Math., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.
[9] DING Nan-qing, YOUSIF M F, ZHOU Yi-qiang. *Modules with annihilator conditions* [J]. Comm. Algebra, 2002, **30**: 2309–2320.
[10] CAMILLO V. *Distribute modules* [J]. J. Algebra, 1975, **36**: 16–25.
[11] CHEN Jian-long, DING Nan-qing. *On general principally injective rings* [J]. Comm. Algebra, 1995, **23**: 5309–5314.

Quasi-Mininjective Modules

MAO Li-xin[1,2], *TONG Wen-ting*[2]
(1. Dept. of Basic Courses, Nanjing Institute of Technology, Jiangsu 210013, China;
2. Dept. of Math., Nanjing University, Jiangsu 210093, China)

Abstract: In this paper, we introduce the concept of the quasi-mininjective modules, and give its characterizations and properties. Moreover, we generalize some properties of the mininjective rings and p-quasi-injective modules.

Key words: minimal submodules; quasi-mininjective modules; annihilators.