第20卷第2期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 2
2000年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2000

复正定矩阵的张量积*

刘 桂 香
(扬州教育学院数学系，江苏 225002)

摘 要:本文给出了多个复正定矩阵的张量积仍为复正定矩阵的充要条件,推广了文[2]的主要结果.

关键词:复正定矩阵；张量积.
分类号:AMS(1991) 15A/CLC O151.21
文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2000)02-0295-04

本文约定,$C^{m\times n}$表示全体$m\times n$阶复矩阵,A^*表示矩阵A的共轭转置矩阵,$i=\sqrt{-1}$.

文[1]研究了下述意义下的复正定矩阵:$A\in C^{n\times n}$,若对任意的$0\neq X\in C^{n\times 1}$,均有$\mathrm{Re}(X^*AX)>0$,则称A为复正定矩阵.给出了复正定矩阵的合同标准形,即

引理1[1] $A\in C^{n\times n}$,则A为复正定矩阵的充要条件为存在一复可逆矩阵P,使得

$$P^*AP=\mathrm{diag}(1+b_1i,1+b_2i,\cdots,1+b_ki,1,\cdots 1),\tag{1}$$

其中$b_j\neq 0(j=1,2\cdots,k)$为实数.

仿文[2]中定理1的证法可证,(1)式中的$b_1,b_2,\cdots,b_k$由A唯一确定.这里将其中的正实数称为A的正合同根,负实数称为A的负合同根.若(1)式中$k<n$或$k=n$但$b_1,b_2,\cdots,b_k$不全大于零(小于零),我们称A为(Ⅰ)—类复正定矩阵.本文给出了多个(Ⅰ)—类复正定矩阵的张量积仍为复正定矩阵的充要条件,推广了文[2]的主要结果.

引理2[2] 设实函数$f(x,y)=\dfrac{x+y}{1-xy}$,且记$f(x_1)=x_1$,$f(f(x_1,\cdots,x_{n-1}),x_n)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.当$x_j>0(j=1,2\cdots,n)$,$f(x_1,x_2,\cdots,x_{k-1})x_k<1(k=2,3,\cdots,n)$时,有

(1) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$关于每个$x_j(j=1,2,\cdots,n)$是递增的;

(2) $f_{\varepsilon^{(n)}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=|f(\varepsilon_1x_1,\varepsilon_2x_2,\cdots,\varepsilon_nx_n)|\leq f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,其中$\varepsilon_j=\pm 1(j=1,2,\cdots,n)$;

(3) $f(x_1,x_2,\cdots,x_k)\geq max\{f(x_1,\cdots,x_{k-1}),x_k\}(k=2,3,\cdots,n)$.

引理3 设$x_j>0(j=1,2,\cdots,n)$,且$f(x_1,\cdots,x_{k-1})x_k<1(k=2,3,\cdots,n)$.则对任意的$|x_j'|\leq x_j(j=1,2,\cdots,k)$均有$f(x_1',x_2',\cdots,x_{k-1}')x_k'<1$.

证明 由引理2得

$$|f(x_1',x_2',\cdots,x_{k-1}')x_k'|=|f(\varepsilon_1|x_1'|,\varepsilon_2|x_2'|,\cdots,\varepsilon_{k-1}|x_{k-1}'|)x_k'|$$

---

* 收稿日期:1997-02-28
作者简介:刘桂香(1962-),男,江苏省姜堰市人,讲师.

$$\leq f(|x_1'|,|x_2'|,\cdots,|x_{k-1}'|)|x_k'|\leq f(x_1,x_2,\cdots,x_{k-1})x_k<1,$$

故 $f(x_1',x_2',\cdots,x_{k-1}')x_k'\leq|f(x_1',x_2',\cdots,x_{k-1}')x_k'|<1$.

引理 4 设乘积 $(1+x_1i)(1+x_2i)\cdots(1+x_ni)$ 的实部为 $G(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，虚部系数为 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则

$$G(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(1-f(x_1)x_2)(1-f(x_1,x_2)x_3)\cdots(1-f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})x_n);$$

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=G(x_1,x_2,\cdots,x_n)f(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

其中 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 均为实数.

只需对乘积因子的个数 k 用数学归纳法即可证得.

由引理 4 得

引理 5 对任意的 $j(j=2,3,\cdots,n)$ 均有 $G(x_1,x_2,\cdots,x_j)>0$ 的充要条件为对任意的 $j(j=2,3,\cdots,n)$ 均有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{j-1})x_j<1$.

由引理 3、引理 5 得

引理 6 设 $x_j>0(j=1,2,\cdots,n)$，$G(x_1,x_2,\cdots,x_k)>0(k=2,3,\cdots,n)$，则对任意的 $|x_j'|\leq x_j(j=1,2,\cdots,n)$，均有 $G(x_1',x_2',\cdots,x_k')>0$.

引理 7 设 $x_j>0(j=1,2,\cdots,n)$，$G(x_1,x_2,\cdots,x_p)>0(p=2,3,\cdots,n)$，则对任意的 $\{x_{l_1},x_{l_2},\cdots,x_{l_k}\}\subset\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}(1\leq l_1<l_2<\cdots<l_k\leq n)$，有 $G(x_{l_1},x_{l_2},\cdots,x_{l_k})>0$.

证明 由于对任意的 $p(p=2,3,\cdots,n)$ 有 $G(x_1,x_2,\cdots,x_p)>0$，故由引理 5 知，对任意的 p 亦有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{p-1})x_p<1$. 反复应用引理 2，对任意的 $t(t=2,3,\cdots,k)$

$$\begin{aligned}f(x_{l_1},x_{l_2},\cdots,x_{l_{t-1}})x_{l_t}&\leq f(f(x_1,x_2,\cdots,x_{l_1}),x_{l_2},\cdots,x_{l_{t-1}})x_{l_t}\\&\leq f(f(x_1,x_2,\cdots,x_{l_1},x_{l_1+1}),x_{l_2},\cdots,x_{l_{t-1}})x_{l_t}\\&\leq\cdots\leq f(x_1,x_2,\cdots,x_{l_t-1})x_{l_t}<1,\end{aligned}$$

故由引理 5 知，$G(x_{l_1},x_{l_2},\cdots,x_{l_t})>0(t=2,3,\cdots,k)$. 从而，$G(x_{l_1},x_{l_2},\cdots,x_{l_k})>0$.

引理 8 设 A、B 均为 n 阶复矩阵，$A\otimes B$ 为复正定矩阵，$B(A)$ 为(Ⅰ)—类复正定矩阵，则 $A(B)$ 为复正定矩阵.

证明 因为 B 为(Ⅰ)—类复正定矩阵，故存在复可逆矩阵 P，使得

$$P^*BP=\mathrm{diag}(1+b_1i,1+b_2i,\cdots,1+b_ki,1,\cdots,1),$$

其中 $k<n$ 或 $k=n$ 但 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 不全大于零(小于零).

当 $k<n$ 时，取 $Y=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^*\in C^{n\times1}$，其中 1 是第 $k+1$ 个分量，则 $PY\neq0$，且 $(PY)^*B(PY)$ 的虚部系数 $(PY)^*(-i\cdot\frac{1}{2}(B-B^*))(PY)=0$. 对任意的 $0\neq X\in C^{n\times1}$，$X\otimes(PY)\neq0$，且 $\mathrm{Re}[(X\otimes PY)^*(A\otimes B)(X\otimes PY)]=\mathrm{Re}[(X^*AX)((PY)^*B(PY))]=\mathrm{Re}(X^*AX)\cdot Re[(PY)^*B(PY)]$，由于 $A\otimes B$，B 均复正定，故 $\mathrm{Re}[(X\otimes PY)^*(A\otimes B)(X\otimes PY)]>0$，$\mathrm{Re}[(PY)^*B(PY)]>0$，从而 $\mathrm{Re}(X^*AX)>0$，即 A 为复正定矩阵.

当 $k=n$，但 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 不全大于零(小于零)时，不妨设 $b_1>0$，$b_2<0$. 取 $Y=(\sqrt{-b_2}i,\sqrt{b_1},0,\cdots,0)^*\in C^{n\times1}$，则 $PY\neq0$，且 $(PY)^*B(PY)$ 的虚部系数 $(PY)^*(-i\frac{1}{2}(B-B^*))(PY)=0$. 再仿上可证，$A$ 为复正定矩阵.

引理 9 设 $D=\mathrm{diag}(a_1+b_1i,a_2+b_2i,\cdots,a_k+b_ki,1,\cdots,1)$，则 D 为复正定矩阵的充要

条件为 $a_j > 0(j = 1,2,\cdots,k)$.

由于 $A \otimes B$ 与 $B \otimes A$ 合同，故不妨设前 $l(0 \le l \le m)$ 个矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_l$ 含有正合同根，后 $m - t(0 \le t \le m)$ 个矩阵 $A_{t+1}, A_{t+2}, \cdots, A_m$ 含有负合同根.

若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 中至少有两个矩阵含有正合同根，至少有两个矩阵含有负合同根，则有

定理 1 设 $A_j(j = 1,2,\cdots,m)$ 为 n 阶(I)— 类复正定矩阵，且设 $A_1, A_2, \cdots, A_l(2 \le l \le m)$ 含有正合同根，其最大正合同根分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_l, A_{t+1}, A_{t+2}, \cdots, A_m(0 \le t \le m-2)$ 含有负合同根，其绝对值最大的负合同根分别为 $b_{t+1}, b_{t+2}, \cdots, b_m$. 则 $\bigotimes_{j=1}^{m} A_j$ 为复正定矩阵的充要条件为对任意的 $k(k = 2,3,\cdots,l)$，有 $f(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1})a_k < 1$，对任意的 $s(s = t+2, t+3, \cdots, m)$，有 $f(|b_{t+1}|, |b_{t+2}|, \cdots, |b_{s-1}|)|b_s| < 1$.

证明 由于 $A_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为复正定矩阵，故存在复可逆矩阵 u_j，使得

$$u_j^* A_j u_j = diag(1+b_{j1}i, 1+b_{j2}i, \cdots, 1+b_{jk_j}i, 1, \cdots, 1).$$

若 $\bigotimes_{j=1}^{m} A_j$ 为复正定矩阵，则 $\bigotimes_{j=1}^{m} A_j^*$ 也为复正定矩阵，再由引理 8 知，对任意的 $k = 2,3,\cdots,l, s = t+2, t+3, \cdots, m$, $\bigotimes_{j=1}^{k} A_j$, $\bigotimes_{j=t+1}^{s} A_j^*$ 均为复正定矩阵，故 $(\bigotimes_{j=1}^{k} u_j)^* (\bigotimes_{j=1}^{k} A_j)(\bigotimes_{j=1}^{k} u_j) = \bigotimes_{j=1}^{k}(u_j^* A_j u_j)$, $(\bigotimes_{j=t+1}^{s} u_j)^* (\bigotimes_{j=t+1}^{s} A_j^*)(\bigotimes_{j=t+1}^{s} u_j) = \bigotimes_{j=t+1}^{s}(u_j^* A_j u_j)^*$ 主对角线上元素的实部均大于零. 从而，$(1 + a_1 i)(1 + a_2 i)\cdots(1 + a_k i)$ 的实部 $G(a_1, a_2, \cdots, a_k) > 0$, $(1 + |b_{t+1}| i)(1 + |b_{t+2}| i)\cdots(1 + |b_s| i)$ 的实部 $G(|b_{t+1}|, |b_{t+2}|, \cdots, |b_s|) > 0$. 再由引理 5 知，对任意的 $k = 2,3,\cdots,l, s = t+2, t+3, \cdots, m$，有 $f(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1})a_k < 1$, $f(|b_{t+1}|, |b_{t+2}|, \cdots, |b_{s-1}|)|b_s| < 1$.

反之，由引理 5 知，对任意的 $k = 2,3,\cdots,l, s = t+2, t+3, , \cdots, m$，有 $G(a_1, a_2, \cdots, a_k) > 0$, $G(|b_{t+1}|, |b_{t+2}|, \cdots, |b_s|) > 0$. 设 $\bigotimes_{j=1}^{m}(u_j^* A_j u_j)$ 主对角线上的元素为 $C_1 C_2 \cdots C_m$，其中 $C_j = 1$ 或 $1 + b_{jr_j} i$ 或 $1 - b_{jr_j} i(b_{jr_j} > 0, j = 1,2,\cdots,m)$.

(1) 当 $C_j = 1$ 或 $1 + b_{jr_j} i$ 时，对任意的 $j(j = 2,3,\cdots,m)$，由于 $|b_{1r_1}| \le a_1, |b_{2r_2}| \le a_2, \cdots, |b_{jr_j}| \le a_j$，故由引理 6 知，$(1 + b_{1r_1} i)(1 + b_{2r_2} i)\cdots(1 + b_{jr_j} i)$ 的实部 $G(b_{1r_1}, b_{2r_2}, \cdots, b_{jr_j}) > 0$，再由引理 7 知，$C_1 C_2 \cdots C_m$ 的实部大于零.

(2) 当 $C_j = 1$ 或 $1 - b_{jr_j} i$ 时，由 (1) 的证法知，$C_1 C_2 \cdots C_m$ 的共轭复数的实部大于零；从而 $C_1 C_2 \cdots C_m$ 的实部大于零.

(3) 当 $C_j = 1$ 或 $1 + b_{jr_j} i$ 或 $1 - b_{jr_j} i$ 时，$C_1 C_2 \cdots C_m$ 可分为两部分，一部分 d_1 为某个 $1 + b_{jr_j} i$ 或某些 $1 + b_{jr_j} i$ 之积，若 d_1 为某个 $1 + b_{jr_j} i$，显然 d_1 的实部大于零、虚部系数大于零. 若 d_1 为某些 $1 + b_{jr_j} i$ 之积，结合 (1) 的证法，由数学归纳法可证，d_1 的实部大于零，虚部系数大于零. 另一部分 d_2 为某个 $1 - b_{jr_j} i$ 或某些 $1 - b_{jr_j} i$ 之积. 由上述证明可知，d_2 的共轭复数 $\overline{d_2}$ 的实部大于零，虚部系数大于零，故 d_2 的实部大于零，虚部系数小于零. 即 $C_1 C_2 \cdots Cm$ 最终为一实部大于零，虚部系数大于零的复数与一实部大于零，虚部系数小于零的复数之积，从而 $C_1 C_2 \cdots Cm$ 的实部大于零.

综上所述，$\bigotimes_{j=1}^{m}(u_j^* A_j u_j)$ 的主对角线上的元素的实部均大于零. 因此 $\bigotimes_{j=1}^{m} A_j$ 为复正定矩阵.

当 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 中只有一个含有正合同根或只有一个含有负合同根时，仿定理 1 的证法可得

定理 2 设 $A_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为(Ⅰ)—类复正定矩阵,且只有 A_m 含有负合同根,$A_1,A_2,\cdots,A_r(r=m-1$ 或 $m)$ 的最大正合同根分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_r$,则 $\bigotimes\limits_{j=1}^{m}A_j$ 为复正定矩阵的充要条件为,对任意的 $k(k=2,3,\cdots,r)$,有 $f(a_1,a_2,\cdots,a_{k-1})a_k<1$.

定理 3 设 $A_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为(Ⅰ)—类复正定矩阵,且只有 A_m 含有正合同根,$A_1,A_2,\cdots,A_r(r=m-1$ 或 $m)$ 的绝对值最大的负合同根分别为 $b_1,b_2,\cdots,b_r$,则 $\bigotimes\limits_{j=1}^{m}A_j$ 为复正定矩阵的充要条件为,对任意的 $k(k=2,3,\cdots,r)$,有 $f(|b_1|,|b_2|,\cdots,|b_{k-1}|)|b_k|<1$.

当 $A_j(j=1,2,\cdots,m)$ 只含有正合同根或只含有负合同根时,仿定理 1 的证法可得

定理 4 设 $A_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为 n 阶(Ⅰ)—类复正定矩阵,A_j 只含有正合同根,a_j 为 A_j 的最大正合同根,则 $\bigotimes\limits_{j=1}^{m}A_j$ 为复正定矩阵的充要条件为对任意的 $k(k=2,3,\cdots,m)$,有 $f(a_1,a_2,\cdots,a_{k-1})a_k<1$.

定理 5 设 $A_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为(Ⅰ)—类复正定矩阵,A_j 只含有负合同根,b_j 为 A_j 的绝对值最大的负合同根. 则 $\bigotimes\limits_{j=1}^{m}A_j$ 为复正定矩阵的充要条件为对任意的 $k(k=2,3,\cdots,m)$,有 $f(|b_1|,|b_2|,\cdots,|b_{k-1}|)|b_k|<1$.

当 A 为实正定矩阵时,存在可逆矩阵 T,使得 $T'AT=diag(1+a_1i,1-a_1i,\cdots,1+a_ki,1-a_ki,1,\cdots,1)$,故实正定矩阵的正、负合同根成对出现,且互为相反数. 此时,由定理 3 得

推论 设 $A_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为实正定矩阵,a_j 为 A_j 的最大正合同根,则 $\bigotimes\limits_{j=1}^{m}A_j$ 为实正定矩阵的充要条件为,对任意的 $k(k=2,3,\cdots,m)$,$f(a_1,a_2,\cdots,a_{k-1})a_k<1$.

另外,当 A 为实正定矩阵时,不难证得文[2]中的合同根即为本文的正合同根. 因此,上述推论即为文[2]中的主要结果.

参考文献:

[1] 李俊杰. 论复矩阵的正定性 [J]. 数学的认识与实践, 1995, **2**: 59—63.
[2] 谭国律. 正定方阵的张量积 [J]. 数学研究与评论, 1996, **2**: 275—280.

The Tensor Product of Complex Positive Definite Matrices

LIU Gui-xiang
(Dept. of Math., Yangzhou Education College, Jiangsu 225002)

Abstract: Necessary and sufficent conditions are proved for the tensor product of complex positive definite matrices to complex positive definite, the result of[2]is extended.

Key words: complex positive definite matrix; tensor product.