关于亚纯函数的唯一性定理*

张丽梅[1]， 赵凯[2]
(1. 大连水产学院基础部，大连 116023； 2. 青岛大学数学系，266071)

摘 要：本文从较特殊的精简密指量出发，在涉及慢增长函数的基础上对 Nevanlinna 的亚纯函数唯一定理做了推广.

关键词：亚纯函数；特征函数；密指量.
分类号：AMS(1991) 30D30/CLC O174.52
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(1999)04-0753-06

1 引言与结论

本文从特殊的精简密指量 $\overline{N}_P[r,f(Z)]$ 出发，在涉及慢增长函数的基础上将 Nevanlinna 的唯一性定理做了广泛意义的推广.

本文采用如下记号：令

$$\bar{n}_P[r,f(Z)]=\left\{\begin{array}{r}f(Z)\text{在}|Z|\leqslant r\text{ 中的极点个数；当极点级 } m\leqslant P\text{ 时，记 } m\text{ 次}\\ \text{当极点 } m>P\text{ 时，仅记 } P\text{ 次}\end{array}\right\},$$

$$\overline{N}_P[r,f(Z)]=\int_0^r\frac{\bar{n}_P[t,f(Z)]-\bar{n}_P[0,f(Z)]}{t}\mathrm{d}t+\bar{n}_P[0,f(Z)]+\log r,$$

特别地有 $\overline{N}_1[r,f(Z)]=\overline{N}[r,f(Z)]$.

$\overline{N}_P[r,\dfrac{1}{f(Z)-a(Z)}]$定义类推.

$$\overline{E}^{(P)}_{f(Z)}[a(Z)]=\left\{\begin{array}{r}Z\,|\,f(Z)-a(Z)=0;\text{若 } Z\text{ 取值重数 } m\leqslant P\text{ 时，记 } m\text{ 次}\\ \text{若 } Z\text{ 取值重数，} m>P\text{ 时，仅记 } P\text{ 次}\end{array}\right\}.$$

下面所用函数 T 均为特征函数，定理条件下的 $a_i(Z)$ 为一类慢增长函数.

定理 1 设 $f_j(Z)$ $(j=1,2)$ 为超越亚纯函数，且满足

$$\Theta[\infty,f(Z)]=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\overline{N}[r,f(Z)]}{T[r,f(Z)]}\geqslant\frac{3}{4}.$$

若有五个判别亚纯函数 $a_\mu(Z)(\mu=1,2,3,4,5)$ 满足

$$T[r,a_\mu(Z)]=\max_{j=1,2}\{T[r,f_j(Z)]\}\quad(\mu=1,2,3,4,5),$$

$$\overline{E}^{(4)}_{f_1(Z)}[a_\mu(Z)]=\overline{E}^{(4)}_{f_2(Z)}[a_\mu(Z)]\quad(\mu=1,2,3,4,5),$$

* 收稿日期：1996-06-10；修订日期：1997-12-23
作者简介：张丽梅(1965-)，女，河北抚宁人，硕士，大连水产学院副教授.

则 $f_1(Z)\equiv f_2(Z)$.

定理 2 设 $f_j(Z)$ $(j=1,2)$ 为超越整函数，若有四个判别亚纯函数 $a_\mu(Z)$ $(\mu=1,2,3,4)$ 满足

$$T[r,a_\mu(Z)]=\max_{j=1,2}\{T[r,f_j(Z)]\}\quad(\mu=1,2,3,4),$$

$$\overline{E}^{(3)}_{f_1(Z)}[a_\mu(Z)]=\overline{E}^{(3)}_{f_2(Z)}[a_\mu(Z)]\quad(\mu=1,2,3,4),$$

则有 $f_1(Z)\equiv f_2(Z)$.

2 几个引理及其证明

引理 1[1] 设 $f(Z)$为非常数的亚纯函数，$a_\mu(Z)$ $(\mu=1,2,3)$为三个判别亚纯函数，且满足 $T[r,a_\mu(Z)]=o\{T[r,f(Z)]\}$ $(\mu=1,2,3)$，则

$$T[r,f(Z)]<\sum_{\mu=1}^{3}\overline{N}[r,\frac{1}{f(Z)-a_\mu(Z)}]+o\{T[r,f(Z)]\}\quad(r\text{ 充分大})$$

可能除去一线性测度为有穷的集.

引理 2[2] 设 $f(Z)$为非常数的亚纯函数，$a_\mu(Z)$是 q 个判别亚纯函数，且满足

$$T[r,a_\mu(Z)]=o\{T[r,f(Z)\}\ (\mu=1,2,\cdots q),$$

则：

$$[q-1-O(1)]T[r,f(Z)]$$
$$<\sum_{\mu=1}^{q}\overline{N}_q[r,\frac{1}{f(Z)-a_\mu(Z)}]+q\,\overline{N}[r,f(Z)]+S[r,f(Z)]\quad(r\text{ 充分大}),$$

其中 $S[r,f(Z)]=O\{\log T[r,f(Z)]+\log r\}$. 当 $f(Z)$是无穷级时，至多除去一线性测度为有穷的集.

引理 3 设 $f(Z)$为非常数的整函数，$a_\mu(Z)(\mu=1,2,3)$ 为三个判别亚纯函数，满足

$$T[r,a_\mu(Z)]=o\{T[r,f(Z)]\}(\mu=1,2,3),$$

则有

$$2T[r,f(Z)]<\sum_{V=1}^{3}\overline{N}_3[r,\frac{1}{f(Z)-a_\mu(Z)}]+S[r,f(Z)],$$

$$T[r,f(Z)]<\overline{N}[r,\frac{1}{f(Z)-a_1(Z)}]+\overline{N}[r,\frac{1}{f(Z)-a_2(Z)}]+$$
$$o\{T[r,f(Z)]\}\quad(r\text{ 充分大}),$$

这里 $S[r,f(Z)]=O\{\log T[r,f(Z)]+\log r\}$. 当 $f(Z)$为无穷级时，需除去一线性测度为有穷的集.

证明 关于前一不等式，在引理 2 中取 $q=3$ 并注意到 $\overline{N}[r,f(Z)]=0$(因为 $f(Z)$为整函数)即得.

关于后一不等式见文献[3]

引理 4 设 $f(Z)$为非常数的亚纯函数，$a_\mu(Z)(\mu=1,2,3,4)$ 为四个判别亚纯函数，且满足

$$T[r,a_\mu(Z)]=o\{T[r,f(Z)]\}(\mu=1,2,3,4).$$

若 $\Theta[\infty,f(Z)]\geqslant\frac{3}{4}$，则有

$$2T[r,f(Z)] < \sum_{\mu=1}^{4} \overline{N}_4[r,\frac{1}{f(Z)-a_\mu(Z)}] + S[r,f(Z)] \quad (r\text{ 充分大}),$$

其中 $S[r,f(Z)]=O\{\log T[r,f(Z)]+\log r\}$. 当 $f(Z)$为无穷集时，需除去一线性测度为有穷的集.

证明 由引理 2 取 $q=4$ 有

$$3T[r,f(Z)] < \sum_{\mu=1}^{4} \overline{N}_4[r,\frac{1}{f(Z)-a_\mu(Z)}] + 4\overline{N}[r,f(Z)] + S[r,f(Z)].$$

由 $\Theta[\infty,f(Z)]\geqslant\frac{3}{4}$，故当 r 充分大时，有

$$4\overline{N}[r,f(Z)] - T[r,f(Z)] \leqslant 0.$$

从而得证.

3 定理的证明

定理 1 的证明 由引理 4 及引理 1 有下列式子成立

$$2T[r,f_1(Z)] < \sum_{\mu=1}^{4} \overline{N}_4[r,\frac{1}{f_1(Z)-a_\mu(Z)}] + S[r,f_1(Z)], \tag{1}$$

$$T[r,f_1(Z)] < \overline{N}_4[r,\frac{1}{f_1(Z)-a_1(Z)}] + \overline{N}_4[r,\frac{1}{f_1(Z)-a_2(Z)}] + \overline{N}_4[r,\frac{1}{f_1(Z)-a_5(Z)}] + o\{T[r,f_1(Z)]\}, \tag{2}$$

$$2T[r,f_2(Z)] < \sum_{\mu=1}^{4} [r,\frac{1}{f_2(Z)-a_\mu(Z)}] + S[r,f_2(Z)], \tag{3}$$

$$T[r,f_2(Z)] < \overline{N}_4[r,\frac{1}{f_2(Z)-a_3(Z)}] + \overline{N}_4[r,\frac{1}{f_2(Z)-a_4(Z)}] + \overline{N}_4[r,\frac{1}{f_2(Z)-a_5(Z)}] + o\{T[r,f_2(Z)]\}. \tag{4}$$

注意在(2)与(4)中，使用了

$$\overline{N}_P[r,\frac{1}{f(Z)-a(Z)}] \leqslant \overline{N}_q[r,\frac{1}{f(Z)-a(Z)}] \quad (P<q)$$

这一事实，以后的证明中还将用到这一事实，不再说明.

(1)与(2)两端分别相加再除 3 得

$$T[r,f_1(Z)] < \frac{2}{3}\sum_{\mu=1,2} \overline{N}_4[r,\frac{1}{f_1(Z)-a_\mu(Z)}] + \frac{1}{3}\sum_{\mu=3,4,5} \overline{N}_4[r,\frac{1}{f_1(Z)-a_\mu(Z)}] + S[r,f_1(Z)]. \tag{5}$$

同样的方法用于(3)与(4)得

$$T[r,f_2(Z)] < \frac{2}{3}\sum_{\mu=3,4} \overline{N}_4[r,\frac{1}{f_2(Z)-a_\mu(Z)}] + \frac{1}{3}\sum_{\mu=1,2,5} \overline{N}_4[r,\frac{1}{f_2(Z)-a_\mu(Z)}] + S[r,f_2(Z)]. \tag{6}$$

由定理 1 的条件，记

$$N_{\mu}^{(4)}(r)=\overline{N}_4[r,\frac{1}{f_1(Z)-a_{\mu}(Z)}]=\overline{N}_4[r,\frac{1}{f_2(Z)-a_{\mu}(Z)}]\quad(\mu=1,2,3,4,5),$$

结合(5)，(6)得

$$T[r,f_1(Z)]+T[r,f_2(Z)]<\sum_{\mu=1}^{4}N_{\mu}^{4}(r)+\frac{2}{3}N_5^{(4)}(r)+S[r,f_1(Z)]+S[r,f_2(Z)].\tag{7}$$

若假定 $f_1(Z)\not\equiv f_2(Z)$，则由(7)及 Nevanlinna 第一基本定理有

$$\begin{aligned}T[r,\frac{1}{f_1(Z)-f_2(Z)}]&=T[r,f_1(Z)-f_2(Z)]+O(1)\\&\leqslant T[r,f_1(Z)]+T[r,f_2(Z)]+O(1)\\&\leqslant\sum_{\mu=1}^{4}N_{\mu}^{(4)}(r)+\frac{2}{3}N_5^{(4)}(r)+S[r,f_1(Z)]+S[r,f_2(Z)].\end{aligned}\tag{8}$$

又 $f_j(Z)-a_{\mu}(Z)$ $(j=1,2;\mu=1,2,3,4,5)$ 的零点必为$[f_1(Z)-f_2(Z)]^{-1}$的极点，故

$$\sum_{\mu=1}^{5}N_{\mu}^{(4)}(r)<N[r,\frac{1}{f_1(Z)-f_2(Z)}]<T[r,\frac{1}{f_1(Z)-f_2(Z)}],$$

结合(8)式有 $N_5^{(4)}(r)<S[r,f_1(Z)]+S[r,f_2(Z)]$. 同理可得

$$N_{\mu}^{(4)}(r)<S[r,f_1(Z)]+S[r,f_2(Z)]\quad(\mu=1,2,3,4).$$

由引理 4 的不等式得

$$T[r,f_1(Z)]+T[r,f_2(Z)]<S[r,f_1(Z)]+S[r,f_2(Z)],\tag{9}$$

这里 $S[r,f_j(Z)]=O[\log T[r,f_j(Z)]+\log r]$，$j=1,2$. 当 $f_j(Z)$为无穷级时，至多除去一线性测度为有穷的集，这与已知 $f_j(Z)$ $(j=1,2)$为超越亚纯函数矛盾，故假设错误，即

$$f_1(Z)\equiv f_2(Z).$$

定理 2 的证明 由引理 3，下列式子成立.

$$2T[r,f_1(Z)]<\sum_{\mu=1}^{3}\overline{N}_3[r,\frac{1}{f_1(Z)-a_{\mu}(Z)}]+S[r,f_1(Z)],\tag{10}$$

$$T[r,f_1(Z)]<\overline{N}_3[r,\frac{1}{f_1(Z)-a_1(Z)}]+\overline{N}_3[r,\frac{1}{f_1(Z)-a_4(Z)}]+S[r,f_1(Z)],\tag{11}$$

$$2T[r,f_2(Z)]<\sum_{\mu=1}^{3}\overline{N}_3[r,\frac{1}{f_2(Z)-a_{\mu}(Z)}]+S[r,f_2(Z)],\tag{12}$$

$$T[r,f_2(Z)]<\overline{N}_3[r,\frac{1}{f_2(Z)-a_2(Z)}]+\overline{N}_3[r,\frac{1}{f_2(Z)-a_4(Z)}]+S[r,f_2(Z)].\tag{13}$$

同定理 1 的证明有

$$\begin{aligned}T[r,f_1(Z)]<{}&\frac{2}{3}\overline{N}_3[r,\frac{1}{f_1(Z)-a_1(Z)}]+\frac{1}{3}\sum_{(\mu=2,3,4)}\overline{N}_3[r,\frac{1}{f_1(Z)-a_{\mu}(Z)}]+\\&S[r,f_1(Z)],\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}T[r,f_2(Z)]<{}&\frac{2}{3}\overline{N}_3[r,\frac{1}{f_2(Z)-a_2(Z)}]+\frac{1}{3}\sum_{\mu=1,2,3}\overline{N}_3[r,\frac{1}{f_2(Z)-a_{\mu}(Z)}]+\\&S[r,f_2(Z)].\end{aligned}\tag{15}$$

由(14)与(15)相加并注意到取

$$N_{\mu}^{(3)}(r)=\overline{N}_3[r,\frac{1}{f_1(Z)-a_{\mu}(Z)}]=\overline{N}_3[r,\frac{1}{f_2(Z)-a_{\mu}(Z)}]\quad(\mu=1,2,3,4),$$

有

$$T[r,f_1(Z)]+T[r,f_2(Z)]\leqslant\sum_{\mu=1,2}N_{\mu}^{(3)}(r)+\frac{2}{3}\sum_{\mu=3,4}N_{\mu}^{(3)}(r)+S[r,f_2(Z)].\tag{16}$$

若假设 $f_1(Z)\not\equiv f_2(Z)$，由(16)及 Nevanlinna 第一基本定理有

$$T[r,\frac{1}{f_1(Z)-f_2(Z)}]\leqslant\sum_{\mu=1,2}N_{\mu}^{(3)}(r)+\frac{2}{3}\sum_{\mu=3,4}N_{\mu}^{(3)}(r)+S[r,f_1(Z)]+S[r,f_2(Z)].\tag{17}$$

又 $f_j(Z)-a_{\mu}(Z)(j=1,2;\mu=1,2,3,4)$ 的零点必为$\frac{1}{f_1(Z)-f_2(Z)}$的极点. 故

$$\sum_{\mu=1}^{4}N_{\mu}^{(3)}(r)\leqslant N[r,\frac{1}{f_1(Z)-f_2(Z)}]\leqslant T[r,\frac{1}{f_1(Z)-f_2(Z)}].$$

结合(17)式有

$$N_3^{(3)}(r)+N_4^{(3)}(r)\leqslant S[r,f_1(Z)]+S[r,f_2(Z)].\tag{18}$$

由引理 3 第二不等式有

$$T[r,f_1(Z)]+T[r,f_2(Z)]\leqslant S[r,f_1(Z)]+S[r,f_2(Z)].\tag{19}$$

这与 $f_j(Z)(j=1,2)$ 为超越整函数矛盾，从而得证.

4 推　论

关于定理 1 有如下推论

推论 1　设 $f_j(Z)$ $(j=1,2)$为超越亚纯函数，且满足 $f_j(Z)$ $(j=1,2)$在∞点取值的重级(即极点级)均$\geqslant 4$. 若对五个判别亚纯函数 $a_{\mu}(Z)$ $(\mu=1,2,3,4,5)$有

$$T[r,a_{\mu}(Z)]=\max_{j=1,2}\{T[r,f_j(Z)]\}\quad(\mu=1,2,3,4,5),$$
$$\overline{E}_{f_1(Z)}^{(4)}[a_{\mu}(Z)]=\overline{E}_{f_2(Z)}^{(4)}[a_{\mu}(Z)]\quad(\mu=1,2,3,4,5),$$

则 $f_1(Z)\equiv f_2(Z)$.

证明　由条件显然有

$$4\overline{N}[r,f(Z)]\leqslant N\ [r,f(Z)]<T[r,f(Z)],$$

故 $4\overline{N}[r,f(Z)]-T[r,f(Z)]<0$，从而引理 4 的结论成立. 余者证明同定理 1 证明.

推论 2　设 $f_j(Z)(j=1,2)$为超越亚纯函数，且满足 $\Theta[\infty,f(Z)]\geqslant\frac{3}{4}$. 若有四个判别亚纯函数 $a_{\mu}(Z)$ $(\mu=1,2,3,4)$满足

$$T[r,a_{\mu}(Z)\ ]=\max_{j=1,2}\{T[r,f_j(Z)\ ]\}\quad(\mu=1,2,3,4),$$

a_5 为任一复数. 若

$$\overline{E}_{f_1(Z)}^{(4)}[a_{\mu}(Z)]=\overline{E}_{f_2(Z)}^{(4)}[a_{\mu}(Z)](\mu=1,2,3,4)$$

及

$$\overline{E}_{f_1(Z)}^{(4)}(a_5)=\overline{E}_{f_2(Z)}^{(4)}(a_5),\ f_1(Z)\equiv f_2(Z),$$

结论显然成立.

同样道理,对于定理 2 也有

推论 3 设 $f_j(Z)(j=1,2)$ 为超越整函数,若有三个判别亚纯函数 $a_\mu(Z)$ ($\mu=1,2,3$) 满足 $T[r,a_\mu(Z)]=\max\limits_{j=1,2}\{T[r,f_j(Z)]\}(\mu=1,2,3)$, a_4 为任意复数,若

$$\overline{E}^{(3)}_{f_1(Z)}[a_\mu(Z)]=\overline{E}^{(3)}_{f_2(Z)}[a_\mu(Z)] \quad (\mu=1,2,3)$$

$$\overline{E}^{(3)}_{f_1(Z)}[a_4]=\overline{E}^{(3)}_{f_2(Z)}[a_4]$$

则 $f_1(Z)\equiv f_2(Z)$,结论显然成立.

事实上,若把定理中的 $a_\mu(Z)$ 部分地退化为复数,结论自然成立,而且是有意义的.

参考文献:

[1] 庄圻泰等. 亚纯函数的不动点与分解论 [M]. 北京: 北京大学出版社,1988. 49—53.

[2] CHUANG Chi-tai. *Une ge'ne'ralisation d'une inegalite' de Nevanlinna* [J]. Sci Sinica, 1964, **13**: 887—895.

[3] 朱经浩. 亚纯函数唯一性定理的推广 [J]. 数学学报, **1987**, 5: 648—652.

On the Uniqueness Theorem of Meromorphic Function

ZHANG Li-mei[1], **ZHAO Kai**[2]

(1. Dept. of Basic Corses Dalfan Fishers University, Dalian 116023

2. Dept. of Math., Qingdao University, 266071)

Abstract: At the base of some solwly increasing functions, Nevanlinna's uniquess theorem is extended by using of a new density index in this paper.

Key words: meromorphic function; characteristic function; density index.