第26卷第1期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.1
2006年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2006

**文章编号**: 1000-341X(2006)01-0171-08 **文献标识码**: **A**

# 球面空间中的一类几何不等式

张晗方
(徐州师范大学数学系，江苏 徐州 221116)
(E-mail: zhhf@pub.xz.jsinfo.net)

**摘 要**: 本文首先给出 $n$ 维球面空间的正弦定理，其次得到了一类几何不等式及其应用 (即文中的推论).

**关键词**: 三角形；球面单形；正弦定理；几何不等式.
**MSC(2000)**: 51K05, 51M16
**中图分类**: O178

## 1. 引 言

在欧氏平面上，设 $\Delta ABC$ 的面积为 $\Delta$, 三边的长分别为 $BC=a, CA=b, AB=c$, 则有著名的 Weitzenböck 不等式成立：

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\ \Delta, \tag{1}$$

当且仅当 $\Delta ABC$ 为正三角形时等号成立.
同时还有

$$\Delta \leq \frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{\frac{2}{3}} \tag{2}$$

当且仅当 $\Delta ABC$ 为正三角形时等号成立.

对于不等式 (1), 文 [1] 首先将其推广到 $n$ 维欧氏空间单形的情况. 我们说还可以将其推广到球面三角形的情况，即设球面 $\Delta ABC$ 的三边分别为 $a, b, c$, 并且记

$$\Delta_s = \sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)},$$

这里 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)\in(0,\pi)$. 则有

$$\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c \geq 6\Delta_s, \tag{3}$$

当且仅当该球面三角形的三个角均为直角时等号成立.

**收稿日期**: 2004-02-13
**基金项目**: 国家自然科学基金 (10271071), 江苏省教育厅自然科学基金 (03KJD110209), 徐州师范大学科研基金重点项目 (02AXL002).

同样，我们也可以将 (2) 推广到球面三角形的情形. 这里我们自然要问，是否还可以将它们推广到 $n$ 维球面空间中去呢？回答是肯定的.

## 2. 球面空间的正弦定理

在文 [2] 中，给出了曲率半径为 1 时的球面 $\Delta ABC$ 的正弦定理：

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}=\frac{\sin a\sin b\sin c}{2\Delta_s}, \tag{4}$$

其中 $\Delta_s$ 的意义与 (3) 中的相同.

在这一节里，我们首先将 (4) 推广到曲率为 $K$ 的 $n$ 维球面空间 $S^n(K)$ 中去. 为此，我们给出如下的

**定义** 设 $\mathcal{A}$ 为 $n$ 维球面空间 $S^n(K)$ 中的单形，其顶点集为 $\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$, 又顶点 $A_i$ 与 $A_j$ 所对的 $n-1$ 维球面单形的界面所夹的内二面角为 $\theta_{ij}(1\le i,j\le n+1)$, 记

$$Q=\begin{vmatrix}1 & -\cos\theta_{12} & \cdots & -\cos\theta_{1,n+1}\\ -\cos\theta_{21} & 1 & \cdots & -\cos\theta_{2,n+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\cos\theta_{n+1,1} & -\cos\theta_{n+1,2} & \cdots & 1\end{vmatrix}, \tag{5}$$

令行列式 $Q$ 的第 $i$ 行与第 $i$ 列相交处的元素的余子式为 $Q_{ii}$, 则称 $\arcsin\sqrt{Q_{ii}}$ 为球面单形 $\mathcal{A}$ 的顶点 $A_i(1\le i\le n+1)$ 的 $n$ 维空间角.

设单形 $\mathcal{A}$ 的顶点 $A_i$ 与 $A_j$ 之间的球面距离为 $a_{ij}$, 即 $\overset{\frown}{A_iA_j}=a_{ij}$, 并且令

$$A=\begin{vmatrix}1 & \cos\sqrt{K}a_{12} & \cdots & \cos\sqrt{K}a_{1,n+1}\\ \cos\sqrt{K}a_{21} & 1 & \cdots & \cos\sqrt{K}a_{2,n+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cos\sqrt{K}a_{n+1,1} & \cos\sqrt{K}a_{n+1,2} & \cdots & 1\end{vmatrix}, \tag{6}$$

设 $A_{ij}$ 为 $A$ 中相应元素的代数余子式，则有 [3]

$$\cos\theta_{ij}=-\frac{A_{ij}}{\sqrt{A_{ii}A_{jj}}}. \tag{7}$$

由 (5)–(7) 我们可以给出如下的

**定理 1** 设 $\mathcal{A}$ 为 $n$ 维球面空间 $S^n(K)$ 单形，其顶点集为 $\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$, 则有

$$\frac{\sin\sqrt{K}S_1}{\sin A_1}=\frac{\sin\sqrt{K}S_2}{\sin A_2}=\cdots=\frac{\sin\sqrt{K}S_{n+1}}{\sin A_{n+1}}=\frac{(n-1)!\cdot\prod\limits_{i=1}^{n+1}\sin\sqrt{K}S_i}{(n\cdot\sin\sqrt{K}V)^{n-1}}, \tag{8}$$

其中 $\sin\sqrt{K}S_i=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\sqrt{A_{ii}}\ (1\le i\le n+1)$ , $\sin\sqrt{K}V=\frac{1}{n!}\cdot\sqrt{A}$ .

**证明** 这里我们仅以 $\sin A_{n+1}$ 为例，为此将 (7) 代入 $Q_{n+1,n+1}$ 内可得

$$\sin^2 A_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & -\cos\theta_{12} & \cdots & -\cos\theta_{1n}\\ -\cos\theta_{21} & 1 & \cdots & -\cos\theta_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\cos\theta_{n1} & -\cos\theta_{n2} & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & \frac{A_{12}}{\sqrt{A_{11}A_{22}}} & \cdots & \frac{A_{1n}}{\sqrt{A_{11}A_{nn}}} \\ \frac{A_{21}}{\sqrt{A_{22}A_{11}}} & 1 & \cdots & \frac{A_{2n}}{\sqrt{A_{22}A_{nn}}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{n1}}{\sqrt{A_{nn}A_{11}}} & \frac{A_{n2}}{\sqrt{A_{nn}A_{22}}} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} A_{ii}} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \frac{A^{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{n} A_{ii}} = \frac{(n! \cdot \sin\sqrt{K}V)^{2(n-1)}}{\prod\limits_{i=1}^{n}((n-1)! \cdot \sin\sqrt{K}S_i)^2},
\end{aligned}
$$

即

$$
\sin A_{n+1} = \frac{n!^{n-1} \cdot (\sin\sqrt{K}V)^{n-1}}{(n-1)!^{n} \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} \sin\sqrt{K}S_i}.
$$

由此得

$$
\frac{\sin\sqrt{K}S_{n+1}}{\sin A_{n+1}} = \frac{(n-1)! \cdot \prod\limits_{i=1}^{n+1} \sin\sqrt{K}S_i}{(n \cdot \sin\sqrt{K}V)^{n-1}},
$$

同理可得其它各式. □

在 (8) 中，当 $n=2$ 且曲率 $K=1$ 时即为 (4), 故 (8) 可称为 $n$ 维球面空间的正弦定理. 由定理 1 我们还可以得到如下的

**推论 1** 条件与定理 1 中的相同，则有

$$
\left(\sin\sqrt{K}V\right)^{n-1} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \cdot \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} \sin\sqrt{K}S_j\right) \sin A_i. \tag{9}
$$

**定理 2** 设 $m_1, m_2, \cdots, m_{n+1}$ 为一组正实数， $\mathcal{A}$ 为 $n$ 维球面空间 $S^n(K)$ 中的单形，其顶点集为 $\{A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}\}$, 则有

$$
\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} m_j\right)\sin^2 A_i \le (n+1)\cdot\left(\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{i=1}^{n+1} m_i\right)^n, \tag{10}
$$

当且仅当矩阵 $Q(m)$ 的所有特征值均相等时等号成立. 其中

$$
Q(m) = \begin{pmatrix} m_1 & -\sqrt{m_1m_2}\cos\theta_{12} & \cdots & -\sqrt{m_1m_{n+1}}\cos\theta_{1,n+1} \\ -\sqrt{m_2m_1}\cos\theta_{21} & m_2 & \cdots & -\sqrt{m_2m_{n+1}}\cos\theta_{2,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\sqrt{m_{n+1}m_1}\cos\theta_{n+1,1} & -\sqrt{m_{n+1}m_2}\cos\theta_{n+1,2} & \cdots & m_{n+1} \end{pmatrix}.
$$

**证明** 设 $m = (m_1, m_2, \cdots, m_{n+1})$, 并且当 $m = 1$ 时，设 $1 = (1, 1, \cdots, 1)$, 另外易知 $\mathrm{rank}Q(1) = n+1$, 且 $Q(1)$ 是 $n+1$ 阶正定 Hermite 矩阵，由于 $m_i > 0 (1 \le i \le n+1)$,

所以 $Q(m)$ 也是 $n+1$ 阶正定 Hermite 矩阵. 再设 $I$ 为 $n+1$ 阶单位阵, 则矩阵 $Q(m)$ 的特征方程为 $|Q(m)-xI|=0$, 将其展开得

$$x^{n+1}-q_1x^n+\cdots+(-1)^kq_kx^{n+1-k}+\cdots+(-1)^nq_nx+(-1)^{n+1}q_{n+1}=0, \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned}
q_1 &= \sum_{i=1}^{n+1} m_i,\\
q_k &= \sum\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n+1}\cdots\sum m_{i_1}m_{i_2}\cdots m_{i_k}\sin^2\theta_{i_1i_2\cdots i_k},\\
q_n &= \sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n+1} m_j\right)\sin^2 A_i.
\end{aligned}$$

若设 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 为方程 (11) 的 $n+1$ 个正实数根, 则由根与系数之间关系的 Vieta 定理知:

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = q_1,\quad \sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n+1} x_j\right)=q_n,$$

再由 Maclaurin 不等式 [4] 可得

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} m_i}{n+1}\ge\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1}\left(\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n+1} m_j\right)\sin^2 A_i}{\binom{n+1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}},$$

当且仅当矩阵 $Q(m)$ 的所有特征值均相等时等号成立.
将此式整理之便得到 (10). □

## 3. 一类几何不等式及其应用

**定理 3** 设 $\mathcal{A}$ 为 $n$ 维球面空间 $S^n(K)$ 中的单形, 其顶点集为 $\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$, $m_1,m_2,\cdots,m_{n+1}$ 为一组正实数, 其余记号与定理 1 中的相同, 则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} m_i\right)^n\cdot\frac{\prod\limits_{i=1}^{n+1}\frac{\sin^2\sqrt{K}S_i}{m_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n+1}\frac{\sin^2\sqrt{K}S_i}{m_i}}\ge\frac{n^{2(n-1)}\cdot(n+1)^{n-1}}{(n-1)!^2}\cdot\sin^{2(n-1)}\sqrt{K}V, \tag{12}$$

当且仅当

$$\frac{m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} m_i}=\frac{\cos\theta_{jk}}{(n+1)\cdot(\cos\theta_{jk}+\cos\theta_{ij}\cos\theta_{ik})},\begin{pmatrix}1\le i,j,k\le n+1\\ i\ne j\ne k\end{pmatrix}$$

时等号成立.

**证明** 由 (8) 知

$$\sin A_i = \frac{\left(n\cdot\sin\sqrt{K}V\right)^{n-1}}{(n-1)!\cdot\prod\limits_{i=1}^{n+1}\sin\sqrt{K}S_i}\cdot\sin\sqrt{K}S_i, \tag{13}$$

将 (13) 代入 (10) 内经整理便可得 (12).

而等号成立的充要条件由 (10) 中等号成立的充要条件可知，矩阵 $Q(m)$ 的所有特征值均相等, 设此时所有的特征值为 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1} = \alpha$, 则由 Vieta 定理知，$(n+1)\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n+1} m_i$. 若设矩阵 $Q(m)$ 的行向量依次为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n+1}$, 由于 $\mathrm{rank}Q(m) = 1$, 所以 $\mathrm{rank}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n+1}\} = 1$, 从而知，向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n+1}$ 的对应分量成比例，由此我们可得

$$\frac{-\sqrt{m_i m_j}\cos\theta_{ij}}{m_j-\alpha} = \frac{m_i-\alpha}{-\sqrt{m_j m_i}\cos\theta_{ji}} = \frac{-\sqrt{m_i m_k}\cos\theta_{ik}}{-\sqrt{m_j m_k}\cos\theta_{jk}}, \begin{pmatrix} 1\le i,j,k\le n+1 \\ i\ne j\ne k \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha = \frac{1}{n+1}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n+1} m_i$.

由此我们立即可得等号成立的充要条件的等式. □

不等式 (12) 是一个较强且应用较广的不等式，如下以推论的形式给出它的应用.

**推论 2** 设 $\mathcal{A}$ 为 $n$ 维球面空间 $S^n(K)$ 中的单形，其顶点集为 $\{A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}\}$, 其余记号与定理 1 中的相同，则有

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sin^2\sqrt{K}S_i \ge \frac{n^2\cdot(n+1)}{n!^{\frac{2}{n}}}\cdot\left(\sin\sqrt{K}V\right)^{2-\frac{2}{n}}, \tag{14}$$

当且仅当球面单形 $\mathcal{A}$ 的所有 $n$ 维角均为直角时等号成立.

**证明** 事实上，只需在 (12) 中令 $m_i = \sin^2\sqrt{K}S_i$ $(1\le i\le n+1)$, 然后再利用算术平均与几何平均之间的不等式便可以得到 (14).

如下来证明等号成立的充要条件，由于在 (12) 中令 $m_i = \sin^2\sqrt{K}S_i$ $(1\le i\le n+1)$ 而得到的 (14) 的过程中，所出现的不等式：

$$\prod_{i=1}^{n+1}\sin^2\sqrt{K}S_i \le \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1}\sin^2\sqrt{K}S_i}{n+1}\right)^{n+1},$$

中等号成立的充要条件是 $\sin^2\sqrt{K}S_1 = \sin^2\sqrt{K}S_2 = \cdots = \sin^2\sqrt{K}S_{n+1}$. 因此，由 (12) 中等号成立的充要条件可得：

$$\frac{1}{n+1} = \frac{\cos\theta_{jk}}{(n+1)\cdot(\cos\theta_{jk}+\cos\theta_{ij}\cos\theta_{ik})},$$

由此得，对于所有的 $i,j,k$, 都有 $\cos\theta_{ij}\cos\theta_{ik} = 0$, 亦即 $\cos\theta_{ij} = 0, (i,j = 1,2,\cdots,n+1, i\ne j)$. 从而知，此时的矩阵 $Q(1)$ 实际上就是 $n+1$ 阶单位阵. 故此时等号成立的充要条件是 $\sin A_i = 1, (1\le i\le n+1)$, 即球面单形 $\mathcal{A}$ 的所有角均为直角. □

**推论 3** 对于 $n$ 维球面空间 $S^n(K)$ 中的单形 $\mathcal{A}$, 有

$$\sin\sqrt{K}V \le \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n+1}\sin\sqrt{K}S_i\right)^{\frac{n}{n^2-1}}, \tag{15}$$

当且仅当球面单形 $\mathcal{A}$ 的所有 $n$ 维角均为直角时等号成立.

实际上，在 (12) 中令 $m_i=1$ 可得

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n+1}\sin^2\sqrt{K}S_i}{\sum\limits_{i=1}^{n+1}\sin^2\sqrt{K}S_i} \ge \frac{n^{2n}}{(n+1)\cdot n!^2}\cdot\left(\sin\sqrt{K}V\right)^{2(n-1)}, \tag{16}$$

当且仅当球面单形 $\mathcal{A}$ 的所有 $n$ 维角均为直角时等号成立.
对 (16) 的分母再应用算术平均大于等于几何平均的不等式经整理便可得 (15).

**推论 4** 设 $h_i$ 为 $n$ 维球面单形 $\mathcal{A}$ 的顶点 $A_i$ 所对的 $n-1$ 维界面上的高，其余记号与上面的相同，则有

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{\sin^2\sqrt{K}h_i} \ge \frac{n+1}{n!^{\frac{2}{n}}}\cdot\frac{1}{\left(\sin\sqrt{K}V\right)^{\frac{2}{n}}}, \tag{17}$$

当且仅当

$$\frac{\frac{1}{\sin^2\sqrt{K}h_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n+1}\frac{1}{\sin^2\sqrt{K}h_i}} = \frac{\cos\theta_{jk}}{(n+1)\cdot(\cos\theta_{jk}+\cos\theta_{ij}\cos\theta_{ik})}, \begin{pmatrix} 1\le i,j,k\le n+1 \\ i\ne j\ne k\end{pmatrix}$$

时等号成立.

实际上，由 [3] 中的 (6.1.13) 和本文定理 1 中的记号，立即可得如下的公式:

$$\sin\sqrt{K}V = \frac{1}{n}\cdot\sin\sqrt{K}S_i\sin\sqrt{K}h_i, \quad (1\le i\le n+1). \tag{18}$$

从而在 (12) 中令 $m_i=\frac{1}{\sin^2\sqrt{K}S_i}$ $(1\le i\le n+1)$, 再利用 (18) 便可得 (17).

设 $M_k$ 为所有 $\sin\sqrt{K}V_{i,(k)}$ 的几何平均，即

$$M_k = \left(\prod_{i=1}^{\binom{n+1}{k+1}}\sin\sqrt{K}V_{i,(k)}\right)^{\frac{1}{\binom{n+1}{k+1}}}. \tag{19}$$

**推论 5** 对于 $n$ 维球面单形 $\mathcal{A}$ 的不变量 $M_k$, 有

$$(k!\cdot M_k)^{\frac{1}{k}} \le (l!\cdot M_l)^{\frac{1}{l}}, (1\le l<k\le n). \tag{20}$$

当且仅当所有的 $k$ 维球面子单形的所有 $k$ 维空间角均为直角时等号成立.

**证明** 设 $\mathcal{A}_{i,(k)}$ 为球面单形 $\mathcal{A}$ 的第 $i$ 个 $k$ 维球面子单形，如下对 $\mathcal{A}_{i,(k)}$ 应用不等式 (15)，可得

$$\sin\sqrt{K}V_{i,(k)} \leq \left(\frac{k!}{k^k}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \left(\prod_{j=1}^{k+1} \sin\sqrt{K}V_{ij,(k-1)}\right)^{\frac{k}{k^2-1}}.$$

即

$$\left(k! \cdot \sin\sqrt{K}V_{i,(k)}\right)^{\frac{1}{k}} \leq \left((k-1)! \cdot \left(\prod_{j=1}^{k+1} \sin\sqrt{K}V_{ij,(k-1)}\right)^{\frac{1}{k+1}}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{21}$$

当且仅当 $k$ 维球面子单形 $\mathcal{A}_{i,(k)}$ 的所有 $k$ 维空间角均为直角时等号成立.

因为球面单形 $\mathcal{A}$ 共有 $\binom{n+1}{k+1}$ 个 $k$ 维球面子单形 $\mathcal{A}_{i,(k)}$, 所以，类似于 (21) 的式子共有 $\binom{n+1}{k+1}$ 个，现将它们相乘，则有

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{\binom{n+1}{k+1}} \left(k! \cdot \sin\sqrt{K}V_{i,(k)}\right)^{\frac{1}{k}} &\leq \prod_{i=1}^{\binom{n+1}{k+1}} \left((k-1)! \cdot \left(\prod_{j=1}^{k+1} \sin\sqrt{K}V_{ij,(k-1)}\right)^{\frac{1}{k+1}}\right)^{\frac{1}{k-1}} \\ &= \left((k-1)! \cdot \left(\prod_{i=1}^{\binom{n+1}{k}} \sin\sqrt{K}V_{i,(k-1)}\right)^{\frac{1}{\binom{n+1}{k}}}\right)^{\frac{\binom{n+1}{k+1}}{k-1}},\end{aligned}$$

所以有

$$\left(k! \cdot \left(\prod_{i=1}^{\binom{n+1}{k+1}} \sin\sqrt{K}V_{i,(k)}\right)^{\frac{1}{\binom{n+1}{k+1}}}\right)^{\frac{1}{k}} \leq \left((k-1)! \cdot \left(\prod_{i=1}^{\binom{n+1}{k}} \sin\sqrt{K}V_{i,(k-1)}\right)^{\frac{1}{\binom{n+1}{k}}}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{22}$$

即

$$(k! \cdot M_k)^{\frac{1}{k}} \leq ((k-1)! \cdot M_{k-1})^{\frac{1}{k-1}}, \tag{23}$$

当且仅当所有的 $k$ 维球面子单形的所有 $k$ 维空间角均为直角时等号成立.

由递推公式 (23) 立即可得 (20). □

特别的是，在 (20) 中取 $k=n, l=1$ 时，如果记 $\sin\sqrt{K}V_{(n)} = \sin\sqrt{K}V$, 则可得如下的不等式：

$$\sin\sqrt{K}V \leq \frac{1}{n!} \cdot \left(\prod_{1\leq i<j\leq n+1} \sin\sqrt{K}a_{ij}\right)^{\frac{2}{n+1}}. \tag{24}$$

当且仅当球面单形 $\mathcal{A}$ 的所有 $n$ 维角均为直角时等号成立.

不难看出，在 (14) 中取 $n=2$ 且曲率 $K=1$ 时便是 (3), 而在 (24) 中当取 $n=2$ 且曲率 $K=1$ 时，可得与 (2) 相对应的 2 维球面 $\Delta ABC$ 的不等式：

$$\Delta_s \leq \frac{1}{2} \cdot (\sin a \sin b \sin c)^{\frac{2}{3}}. \tag{25}$$

当且仅当球面 $\Delta ABC$ 的所有角均为直角时等号成立.
其中 $\Delta_s$ 的含义仍与 (3) 中的相同.

容易看出，(14) 与 (24) 可视为 (1) 与 (2) 在 $n$ 维球面空间 $S^n(K)$ 的推广，而 (20) 则又是 (24) 的一般形式.

## 参考文献:

[1] 张景中，杨路，关于质点组的一类几何不等式 [J], 中国科学技术大学学报， 1981, **11**(2): 1–8.
ZHANG Jing-zhong, YANG Lu. *A class of geometric inequalities concerning systems of mass points* [J]. J. China Univ. Sci. Tech., 1981, **11**(2): 1–8. (in Chinese)

[2] 左铨如，季素月. 初等几何研究 [M]. 上海：上海科技教育出版社， 1992, 342–366.
ZUO Quan-ru, JI Su-yue. *Research of Elementary Geometry* [M]. Shanghai: Publisher of Shanghai Science and Technology and Education, 1992, 342–366. (in Chinese)

[3] 张晗方，几何不等式导引 [M], 北京：中国科学文化出版社， 2003, 328-425.
ZHANG Han-fang. *Guiging of Geometric Inequalities* [M]. Beijing: Publisger of China Science and Vivilization, 2003, 328–425. (in Chinese)

[4] Beckenbach E.F. Bellman R., Inequalities[M], Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1983, 11.

# A class of Geometric Inequalities in Spherical Space

*ZHANG Han-fang*
( Dept. of Math., Xuzhou Normal University, Jiangsu 221116, China )

**Abstract**: In this paper, we give the sine law of $n$ dimensinal spherical space, and obtain a class of the geometric inequalities and its applications (that is Corrolaries 1 to 5).

**Key words**: triangle; spherical simplex; spherical sine law; geometric inequality.