第12卷第1期　　　数 学 研 究 与 评 论　　　Vol. 12 No. 1
1992年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1992

关于 Gauss－Weierstrass 算子线性组合的逼近*

宣 培 才

(浙江绍兴师专，312000)

摘　　要

本文主要讨论了 Gauss－Weierstrass 算子的线性组合的一致逼近问题，给出了逼近阶的估计和特征刻划；即如 $f\in C(-\infty,\infty)$，$L_{n,r}(f,x)$ 表示 Gauss－Weierstrass 算子的线性组合，则当 $\alpha<2r$ 时 $(r>1)$ $\|f-L_{n,r}(f;x)\|\leqslant M[\omega_{2r}(f;n^{-\frac{\alpha}{2}}]$，且有

$$\|L_{n,r}(f;x)-f\|=O(n^{-\frac{\alpha}{2}}\leftrightarrow\omega_{2r}(f;h)=O(h^{\alpha}).$$

§1 引　　言

令 $\langle A,B\rangle$ 表示开的、闭的或半开半闭的区间，在其上连续且有界的函数全体记作 $C_{A,B}$. 1976 年，C. P. May 在[1]中引入了如下指数型算子 $L_\lambda(f;x)$：

$$L_\lambda(f;x)=\int_A^B W(\lambda,x,u)f(u)du. \tag{1.1}$$

这里 $W(\lambda,x,u)\geqslant 0$，称为核函数，它满足

$$\int_A^B W(\lambda,x,u)du, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}W(\lambda,x,u)=\frac{\lambda}{\varphi^2(x)}W(\lambda,x,u)(u-x). \tag{1.3}$$

显然 $L_\lambda(f;x)$ 是从 $C_{\langle A,B\rangle}$ 到 C^∞ 的正线性算子.

1978 年，H. Ismail 和 C. P. May 在[2]中对指数型算子作了进一步的研究，指出当 $\varphi^2(x)$ 为二次函数时，指数型算子总共可分为下列六大类：即 Bernstein 算子，Szász－Mirakjan 算子，Baskakov 算子，Post－Widder 算子，Gauss－Weierstrass 算子和 Ismail－May 算子. 1988 年，V. ToTik 在[3]中研究了这六种算子的一致逼近问题. 给出了逼近的逆定理、饱和定理及特征刻划. 关于指数型算子的线性组合的逼近问题，C. P. May 在[1]曾作了比较详细的讨论，给出了逆定理和饱和定理，但未给出特征刻划. 最近，Z. Ditzian 和 V. ToTik 在[4]中研究了上述前四种算子的线性组合的一致逼近问题，给出了逼近阶的估计和特征刻划. 本文继续这方面的工作，讨论了 Gauss－Weierstrass 算子线性组合的一致逼近问题，给出了逼近阶的估计和特征刻划.

设 $\{L_n(f;x)\}$ 为 Gauss－Weierstrass 算子序列：

$$L_n(f;x)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-n(u-x)^2/2}f(u)du,\quad x\in R, \tag{1.4}$$

* 1990年4月4日收到. 浙江省自然科学基金资助课题.

$$L_{n,r}(f;x)=\sum_{i=1}^{r-1}c_i(n)L_{n_i}(f;x),\quad r>1,\tag{1.5}$$

表示 Gauss — Weierstrass 算子 $L_{n_i}(f;x)$ 的线性组合．这里的 n_i 和 $c_i(n)$ 满足为下条件：

a) $n=n_0<n_1<n_2<\cdots<n_{r-1}\leqslant kn$,($k$ 为常数)；

b) $\sum_{i=1}^{r-1}|c_i(n)|<c$; (1.6)

c) $\sum_{i=1}^{r-1}c_i(n)=1$;

d) $\sum_{i=1}^{r-1}c_i(n)n_i^{-\rho}=0$; $\rho=1,2,\cdots,r-1$.

本文的主要结果是：

定理 1.1 设 $L_{n,r}(f;x)$ 为(1.5) 所定义的 Guass — Weierstrass 算子的线性组合，为 $f\in C_{(-\infty,\infty)}$. 则当 $0<\alpha<2r$ 时，有

$$\|L_{n,r}(f;x)-f\|\leqslant M[\omega_{2r}(f;n^{-\frac{1}{2}})+n^{-\frac{\alpha}{2}},\tag{1.7}$$

$$K_{2r}(f;n^{-r})\leqslant\|L_{h,r}(f;x)-f\|+M(\frac{k}{n})^rK_{2r}(f;k^{-r}),\tag{1.8}$$

且有

$$\|L_{n,r}(f;x)-f\|=O(n^{-\frac{\alpha}{2}}\leftrightarrow\omega_{2r}(f;h)=O(h^\alpha).\tag{1.9}$$

这里 $\|.\|=\sup|.|$, M 表示正常数, $\omega_r(f,t)=\sup\limits_{0<h\leqslant t}\|\Delta_h^r(f;x)\|$, $\Delta_h^r(f;x)=\sum_{k=1}^{r}(-1)^k\times\binom{r}{k}f[x-\frac{hr}{2}-kh]$, $t=n^{-\frac{1}{2}}$, K— 泛函 $K_{2r}(f;t^r)=\inf\limits_{g}\{\|f-g\|+t^r\|g^{(2r)}\|\}$, $g^{(2r-1)}\in$ A. C. Loc. (局部绝对连续函数空间).

§2. 若干引理

在证明定理之前，先引入下列引理：

引理 2.1 $L_{n,r}(f;x)$ 如(1.5) 所定义，如 $f\in C_{(-\infty,\infty)}$，则

$$\|L_{n,r}(f;x)\|\leqslant M\|f\|.\tag{2.1}$$

这里 M 表示常数．(本文总用 M 表示常数，但在不同的地方可能取不同的值．)

证明 由(1.5). 可知

$$\|L_{n,r}(f;x)\|=|\sum_{i=0}^{r-1}c_i(n)L_{n_i}(f;x)|\leqslant\sum_{i=1}^{r-1}|c_i(n)||L_{n_i}(f;x)|,$$

又由(1.1),(1,2)，可知

$$|L_{n_i}(f;x)|\leqslant k\|f\|.$$

因此结合(1.6)(b)，即可得(2.1).

引理 2.2 $L_n(f;x)$ 如(1.4) 所定义，且 $f\in C_{-\infty,\infty}$，则

$$\|L_n^{(2r)}(f;x)\|\leqslant Mn^r\|f\|.\tag{2.2}$$

证明 由(1.4)可知

$$\| L_n^{(2r)}(f;x) \| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{2r}}{\partial x^{2r}} W(n,x,u) f(u) du \right| \leqslant \| f \| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{2r}}{\partial x^{2r}} W(n,x,u) \right| du. \tag{2.3}$$

因此，只要能证得$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{2r}}{\partial x^{2r}} W(n,x,u) \right| du \leqslant Mn^r$ 即可. 令

$$A_m(n,x) = n^m L_n((u-x)^m;x) = n^m \int_{-\infty}^{\infty} W(n,x,u)(u-x)^m du. \tag{2.4}$$

由(1.2)及[1;(3,1),(3.2)]知 $A_0 = 1, A_1 = 0, A_2 = n$. 且由[1;(3.5)]可得

$$A_{m+1}(n;x) = nmA_{m-1}(n;x) + \frac{d}{dx} A_m(n,x). \tag{2.5}$$

根据上述递推关系及初始条件，易知

$$A_{2k+1} = 0; \qquad A_{2k} = (2k+1)!!n^k, k = 1,2,\cdots,r. \tag{2.6}$$

通过直接验算，可知对于 Gauss — Weierstrass 算子 $L_n(f;x)$ 成立着

$$\frac{\partial^{2r}}{\partial x^{2r}} W(n,x,u) = Q_{2r}(n,x,u) W(n,x,u), \tag{2.7}$$

其中

$$Q_{2r}(n,x,u) = \sum_{j=0}^{r} d_{r_j} n^{2r-j} (u-x)^{2r-2j},$$

这里 d_{r_j} 表示与 n,u,x 无关之常数. 于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{2r}}{\partial x^{2r}} W(n,x,u) \right| du = \int_{-\infty}^{\infty} |Q_{2r}(n,x,u) W(n,x,u)| du$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{r} |d_{r_j}| n^{2r-j} \int_{-\infty}^{\infty} W(n,x,u)(u-x)^{2(r-j)} du$$

$$= \sum_{j=0}^{r} |d_{r_j}| n^j |A_{2(r-j)}(n,x)$$

$$= \sum_{j=0}^{r} |d_{r_j}| n^j (2r-2j-1)!! n^{r-j} \leqslant Kn^r.$$

将上式代入(2.3)，即得(2.2).

引理 2.3 设 $L_{n,r}(f;x)$ 如(1.5) 所定义，$f^{(2r-1)} \in$ A. C. Loc. 则

$$\| L_{n,r}(f;x) - f \| \leqslant Mn^{-r} \| f^{2r} \|. \tag{2.8}$$

证明 利用 Taylor 公式，知

$$L_{n,r}(f;x) - f(x) = \sum_{i=1}^{r-1} c_i(n) \int_{-\infty}^{\infty} W(n_i,x,u)[f(u) - f(x)] du$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} c_i(n) \int_{-\infty}^{\infty} W(n_i,x,u) \left[\sum_{m=1}^{2r-1} \frac{f^{(m)}(x)}{m!}(u-x)^m + \frac{f^{(m)}(\xi)}{(2r)!}(u-x)^{2r} \right] du$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} c_i(n) \sum_{m=1}^{2r-1} \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} W(n_i,x,n)(u-x)^m du + \sum_{i=0}^{r-1} c_i(n) \cdot \frac{f^{(2r)}(\xi)}{(2r)!}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(n_i,x,n)(u-x)^{2r} du \stackrel{\triangle}{=} I_1 + I_2, \tag{2.9}$$

这里的 $\xi \in (u,x)$. 显然由(2.6)、(1.6)(b)

$$|I_2| \leqslant \sum_{i=0}^{r-1} |c_i(n)| \frac{\| f^{2r} \|}{(2r)!} \int_{-\infty}^{\infty} W(n_i,x,u)(u-x)^{(2r)} du$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{r-1} |c_i(n)| \frac{\|f^{2r}\|}{(2r)!} n_i^{-2r} A_{2r}(n,x)$$

$$= \|f^{2r}\| \sum_{i=0}^{r-1} |c_i(n)| \cdot \frac{1}{(2r)!} n_i^{-2r}(2r-1)!!n_i^r$$

$$\leqslant K\|f^{(2r)}\| n^{-r}. \tag{2.10}$$

由(2.6)知 $A_1 = 0, A_{2r-2} = 0$，故

$$I_1 = \sum_{i=0}^{r-1} c_i(n) \sum_{m=1}^{2r-1} \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} W(n_i,x,u)(u-x)^m du$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} c_i(n) \sum_{m=1}^{2r-1} \frac{f^{(m)}(x)}{m!} n^{-m} A_m(n,x)$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} c_i(n) n^{-m+[\frac{m}{2}]} \sum_{m=2}^{2r-2} \frac{f^{(m)}(x)}{m!} K(m)$$

$$= K \sum_{i=0}^{r-1} c_i(n) n^{-m+[\frac{m}{2}]},$$

这里 $K(m) = \begin{cases} 0 & m \text{ 为奇数} \\ (m-1)!! & m \text{ 为偶数} \end{cases}$，$K$ 表示与 i 无关之常数. 显然，当 $m = 2,3,\cdots,2r-2$ 时，$-m+[\frac{m}{2}] = -1, -2, \cdots, -(r-1)$，于是由(1.6)($d$)，可得 $I_1 = 0$. 于是结合(2.9)，(2.10)，有 $\|L_{n,r}(f;x) - f\| \leqslant \|I_2\| \leqslant M\|f^{(2r)}\| n^{-r}$，此即(2.8).

引理 2.4 设 $L_n(f;x)$ 如(1.4)所定义，$f^{(2r-1)} \in$ A.C.Loc，则

$$\|L_n^{(2r)}(f;x)\| \leqslant M\|f^{(2r)}\|.$$

证明 由[1;(4.6)]知

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^k} W(n,x,u)(u-x)^i du = 0, (k > i) \tag{2.12}$$

而

$$\frac{d^{2r}}{dx^{2r}} \int_{-\infty}^{\infty} W(n,x,u) f(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{2r}}{\partial x^{2r}} W(n,x,u) f(u) du.$$

又由 Taylor 公式

$$f(u) = \sum_{l=0}^{2r-1} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(u-x)^l + \frac{f^{2r}(\xi)}{(2r)!}(u-x)^{2r}, \quad \xi \in (u,x).$$

所以由(2,12)，可得

$$|L_n^{(2r)}(f;x)| \leqslant \frac{1}{(2r)!} \|f^{(2r)}\| \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{2r}}{\partial x^{2r}} W(n,x,u)(u-x)^{2r} \right| du. \tag{2.13}$$

由(2.7)，

$$\left| \frac{\partial^{2r}}{\partial x^{2r}} W(n,x,u)(u-x)^{2r} \right| \leqslant \sum_{j=0}^{r} |d_{rj}| n^{2r-j} (u-x)^{4r-2j}.$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{2r}}{2x^{2r}} \right| W(n,x,u)(u-x)^{2r} du \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{r} |d_{r_j}| n^{2r-j} \int_{-\infty}^{\infty} W(n,x,u)(u-x)^{4r-2j} du$$

$$= \sum_{j=0}^{r} |d_{r_j}| n^{-(2r-j)} A_{4r-2j}(n,x)$$

$$= \sum_{j=0}^{r} |d_{r_j}| n^{-(2r-j)} [(4r-2j)-1]!! n^{2r-j} \leqslant M_1. \qquad (2.14)$$

将上式代入(2.13)，即得(2.11).

§3 定理的证明

定理 1.1 的证明 作斯切克洛夫型函数 $g_0(x)$：

$$g_0(x) = \frac{1}{\binom{2r}{r} t^{2r}} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \cdots \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} [(-1)^{r-1} \Delta^{2r}_{\sum_{i=1}^{2r} u_i}] f(x) + \binom{2r}{r} f(x)] du_1 du_2 \cdots du_{2r},$$

则由[1;P. 1233]易知 $g_0^{(2r-1)}(x) \in$ A. C. Loc. 且当 $f \in C_{(-\infty,\infty)}$ 时，有($\alpha < 2r$)，

$$\| f - g_0 \| \leqslant Mt^{\alpha} = Mn^{-\frac{\alpha}{2}}, \ \| g_0^{(2r)} \| \leqslant Mt^{-2r} \omega_{2r}(f,t) = Mn^r \omega_{2r}(f, n^{-\frac{1}{2}}). \qquad (3.1)$$

由于 $f = f - g_0 + g_0$，故

$$\| L_{n,r}(f;x) - f \| \leqslant \| L_{n,r}(f - g_0;x) \| + \| f - g_0 \| + \| L_{n,r}(g_0;x) - g_0 \|. \qquad (3.2)$$

由引理 2.1，得

$$\| L_{n,r}(f - g_0;x) \| \leqslant M \| f - g_0 \|.$$

由引理 2.3，得

$$\| L_{n,r}(g_0;x) - g_0 \| \leqslant Mn^{-r} \| g_0^{(2r)} \|.$$

故由(3.1)，可得

$$\| L_{n,r}(f;x) - f \| \leqslant M \| f - g_0 \| + Mn^{(-r)} \| g_0^{(2r)} \|$$

$$\leqslant M[\omega_{2r}(f;n^{-\frac{1}{2}}) + n^{-\frac{\alpha}{2}}]. \qquad (3.3)$$

此即为(1.7). 记 $f = f - L_{k,r}(f;x) + L_{k,r}(f,x)$，$(k \leqslant n)$，则有

$$K_{2r}(f;n^{-r}) \leqslant \| f - L_{k,r}(f;x) \| + n^{-r} L_{k,r}^{(2r)}(f;x) \|. \qquad (3.4)$$

而

$$n^{-r} \| L_{k,r}^{2r}(f;x) \| \leqslant n^{-r} \| L_{k,r}^{(2r)}(f - g_0;x) + n^{-r} \| L_{k,r}^{(2r)}(g_0;x) \|. \qquad (3.5)$$

由引理 2.2 及(1.5)，可知

$$n^{-r} \| L_{k,r}^{(2r)}(f - g_0;x) \| \leqslant M_1 (\frac{k}{n})^r \| f - g_0 \|. \qquad (3.6)$$

由引理 2.4，得

$$n^{-r} \| L_{k,r}^{(2r)}(g_0;x) \| \leqslant M_2 n^{-r} \| g_0^{(2r)} \|. \qquad (3.7)$$

将(3.6)，(3.7)代入(3.5)，得

$$n^{-r} \| L_{k,r}^{(2r)}(f;x) \| \leqslant M(\frac{k}{n})^r [\| f - g_0 \| + K^{-r} \| g_0^{(2r)} \|].$$

上式两边对 g_0 求解，即得

$$n^{-r} \| L_{k,r}^{(2r)}(f;x) \| \leqslant M(\frac{k}{n})^r K_{2r}(f;K^{-r}). \qquad (3.8)$$

将(3.8)代入(3.4)，即得(1.8).

由于 $L_{k,r}(f;x) \in C^{\infty}$，故对于任意给定的 K，

$$K_{2r}(f;n^{-r}) \leqslant \| f - L_{k,r}(f;x) \| + n^{-r} \| L_{k,r}^{(2r)}(f;x) \|$$
$$\leqslant \| f - L_{n,r}(f;x) \| + \| L_{n,r}(f;x) - L_{k,r}(f;x) \| + n^{-r} \| L_{k,r}^{(2r)}(f;x) \| \quad (3.9)$$

由(1.7),可知

$$\| L_{n,r}(f;x) - L_{k,r}(f;x) \| \leqslant M[\omega_{2r}(L_{k,r}(f;x);n^{-\frac{1}{2}}) + n^{-\frac{a}{2}}].$$

由[5;(2.120)],知

$$\omega_{2r}(L_{k,r}(f;x);n^{-\frac{1}{2}}) \leqslant n^{-r} \| L_{kr}^{(2r)}(f;x) \| .$$

因此

$$\| L_{n,r}(f;x) - L_{k,r}(f;x) \| \leqslant M[n^{-r} \| L_{kr}^{(2r)}(f;x) \| + n^{-\frac{a}{2}}].$$

将上式代入(3.9),得

$$K_{2r}(f;n^{-r}) \leqslant \| f - L_{n,r}(f;x) \| + Mn^{-\frac{a}{2}} + Mn^{-r} \| L_{k,r}^{(2r)}(f;x) \| , \quad (3.10)$$

结合(3.8),即有

$$K_{2r}(f;n^{-r}) \leqslant \| f - L_{n,r}(f;x) \| + O(n^{-\frac{a}{2}}) + M(\frac{k}{n})^r K_{2r}(f;k^{-r}). \quad (3.11)$$

又由[4;定理 2.1.1],存在 M 使

$$\frac{1}{M}\omega_{2r}(f;n^{-\frac{1}{2}}) \leqslant K_{2r}(f;n^{-r}) \leqslant M\omega_{2r}(f;n^{-\frac{1}{2}}). \quad (3.12)$$

因此,如令 $\psi(n) \stackrel{\triangle}{=} K_{2r}(f;n^{-r})$,则对某一 $n_0 \in N$,有

$$\psi(n) = K_{2r}(f;n^{-r}) \leqslant M\omega_{2r}(f;n_0^{-\frac{1}{2}}) \leqslant M2^{2r} \| f \| \stackrel{\triangle}{=} A_1,$$

于是,结合(3.11),由 Berens—Lorentz 引理[4,引理 9.3.4],可知,当 $a < 2r$ 时,有

$$K_{2r}(f;n^{-r}) \leqslant \| f - L_{n,r}(f;x) \| + O(n^{-\frac{a}{2}}).$$

于是由(3.12)和(1.7)立得(1.9).

作者谨向导师郭竹瑞教授的悉心指导并仔细审阅原稿表示衷心感谢.

参考文献

[1] C. P. May, Can. J. Math. Vol. XXVII, No. 6, 1976, pp. 1225—1250.

[2] E. H. Ismail and C. P. May, J. Math. Anal. Appl. 63(1978)446—462.

[3] V. ToTik, J. Math Anal. Appl, 132(1988)238—246.

[4] Z. Ditzian and V. ToTik, *Moduli of Smoothness*, Springer—Verleg, 1987, New York

[5] L. L. Schumaker, *Spline Functions.*, *Basic Theory*, JohnWiley & Sous, 1981, New york.

Uniform Approximation By Combinations of Gauss–Weierstrass Operators

Xuan Peicai

(Shaoxing Teachers' College, Zhejiang, China)

Abstract

In this paper, the uniform approximation by a linear combination of Gauss– Weierstrass operators is considered, the direct and converse results of approximation are given.