第24卷第2期
2004年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 24 No. 2
May 2004

模糊推理全蕴涵算法及其还原性*

裴道武[1,2]
(1.同济大学计算机科学与工程系，上海 200092；2.盐城师范学院数学系，江苏 盐城 224002)

摘　要：模糊推理是模糊控制的逻辑基础.然而通用的模糊推理CRI算法却缺乏严格的逻辑依据，近期问世的模糊推理全蕴涵三I算法有效地改进了CRI算法.本文研究了全蕴涵三I算法的一般计算公式及其还原性问题，并且得到了一些新的算法，也提出了一些新的观点，文献中已有的结果大多数是本文结果的特例.从而为模糊推理提供了一种新方法.

关键词：模糊逻辑；模糊推理；模糊控制；CRI算法；全蕴涵三I算法；还原性.
分类号：AMS(2000) 03B52,93C42/CLC number：O141.1
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2004)02-0359-10

1 引 言

模糊控制的理论和技术自二十世纪七十年代诞生[1]以来，已经取得了举世公认的成功，模糊控制的原理和方法已经被广泛地应用于工业控制、交通管理、国防建设以及科学研究的许多领域，在控制、管理和决策自动化、科学化进程中发挥了重要的作用[2-4].

如所周知，模糊控制系统的核心部分是模糊控制器，而模糊控制器的主要组成部分是模糊规则库，其中的模糊规则具有以下形式：

$$\text{若 } x_1 \text{ 是 } A_{1i} \text{ 且} \cdots \text{且 } x_n \text{ 是 } A_{ni}\text{，则 } y \text{ 是 } B_i, i=1,\cdots,m, \tag{1}$$

其中 A_{ki} 是论域 X_k 上的模糊集，B_i 是论域 Y 上的模糊集，$k=1,\cdots,n;i=1,\cdots,m$.在实际应用中，通常取 $n=2$，x_1 表示系统输出与标准输出之误差，x_2 表示系统输出误差之变化率，y 表示模糊控制器的输出。模糊控制器的推理功能表现在对于一组模糊输入

$$x_1 \text{ 是 } A_1^*\text{，且} \cdots \text{且 } x_n \text{ 是 } A_n^*\text{，}$$

其中 A_k^* 为 X_k 上的模糊集，应有相应的输出"y 是 B^*"，其中 B^* 为 Y 上的模糊集.以上推理机制可归结为以下数学模型：

* 收稿日期：2001-01-22
作者简介：裴道武(1956-)，博士，教授.

$$
\begin{array}{lllll}
\text{已知} & A_{11}\wedge\cdots\wedge A_{n1} & \to & B_1 & \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \\
 & A_{1m}\wedge\cdots\wedge A_{nm} & \to & B_m & \\
\text{输入} & A_1^*\wedge\cdots\wedge A_n^* & & & \\
\hline
\text{输出} & & & B^* &
\end{array} \tag{2}
$$

其中 A_{ki},A_k^* 以及 B_i,B^* 的含义同上,运算 $\wedge$ 为模糊集的交运算,模型(2)简记为 FMP(n,m),其中 n 是前提中模糊集的个数,m 表示模糊规则的条数.

特别地,当 $n=1$ 或者 $m=1$ 时,模型(2)简化为以下两个模型:

$$
\begin{array}{llll}
\text{已知} & A_1 & \to & B_1 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & A_m & \to & B_m \\
\text{输入} & A^* & & \\
\hline
\text{输出} & & & B^*
\end{array} \tag{3}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\text{已知} & A_1\wedge\cdots\wedge A_n & \to & B \\
\text{输入} & A_1^*\wedge\cdots\wedge A_n^* & & \\
\hline
\text{输出} & & & B^*
\end{array} \tag{4}
$$

而最基本的模糊推理模型是 FMP(1,1),简称为 FMP 问题:

$$
\begin{array}{llll}
\text{已知} & A & \to & B \\
\text{输入} & A^* & & \\
\hline
\text{输出} & & & B^*
\end{array} \tag{5}
$$

由于模型(3)和模型(4)乃至最一般的模型(2)均可通过适当的数学处理化归模型(5),因此本文重点讨论 FMP 问题(即模型(5))的求解.

1973 年,美国控制论专家及模糊数学创始人 Zadeh 提出了求解 FMP 问题的合成推理方法(compositional rule of inference,简记作 CRI)[5],其基本思想是将 $A\to B$ 通过模糊蕴涵算子 R 转化为 $X\times Y$ 上的模糊关系 $\overline{R}$,其隶属函数在(x,y)处的值为 $R(A(x),B(y))$,然后将 A^* 与 R 进行合成即得 B^*:

$$B^* = A^* \circ \overline{R}, \tag{6}$$

其中的合成运算"$\circ$"在当今模糊控制中也叫 sup-$*$ 运算,$*$ 为 T-范数。Zadeh 建议运算"$*$"取下确界运算 $\wedge$,目前在模糊控制中通常取 $\wedge$ 或实数乘法为多。如果我们采用 $\wedge$ 作为 $*$,则有以下的计算公式:

$$B^*(y) = \bigvee_{x\in X}\{A^*(x) \wedge R(A(x),B(y))\}, y \in Y. \tag{7}$$

这里 $\vee$ 为上确界运算,B^* 叫做 FMP 问题相对于算子 R 的 CRI 解,或简称为 R-型 CRI 解,当 R 取不同的蕴涵算子时,我们可得到各种不同的结论,有时这种差异还是相当大的. Zadeh 最初建议使用以下的蕴涵算子:

$$R_Z(a,b) = a' \vee (a \wedge b), a,b \in [0,1]. \tag{8}$$

这里 $a'=1-a$. 而模糊控制的创始人 Mamdani 建议使用以下的蕴涵算子[1]：

$$R_M(a,b) = a \wedge b, \quad a,b \in [0,1]. \tag{9}$$

目前在模糊控制中使用最多的是算子 R_M.

值得指出的是，FMP 问题的 R-型 CRI 解中使用的 sup-∧合成运算具有随意的成分，尽管这种算法在计算上是简便的，但是它缺乏严格的逻辑依据，因而不可避免地受到学术界以及领域专家的怀疑与批评[3,6]. 因此，近年来模糊推理逻辑基础问题受到极大关注，经过诸多学者的共同努力，已取得了一系列有意义的成果[3,7-15]，其中我国学者王国俊教授在模糊逻辑与模糊推理的结合研究方面取得的成果备受关注，1999 年，文[8-10]提出了模糊推理的全蕴涵三 I 算法(简称为三 I 算法)，有效地改进了经典的 CRI 算法，文[3]还使用部分赋值理论从语义上将三 I 算法纳入了模糊逻辑的框架之中.

本文在简要地介绍三 I 算法的基本思想和基本原则后，将对相当一般的情形给出三 I 算法的计算公式，并且相应地讨论了算法的还原性问题. 我们还专门讨论了相对于几个重要的蕴涵算子的三 I 算法，如 R_Z 和 R_M 等. 文献中已有的许多结果都是本文结果的特例.

2 三 I 算法的计算公式

我们已经提及，在 CRI 算法中，合成运算“∘”过于随意，并没有明确的逻辑含义，致使该方法所得结果令人怀疑[3,6]. 鉴于这种情形，文[9]于 1999 年提出了以下的模糊推理三 I 原则.

三 I 原则 FMP 问题的解 B^* 应该是论域 Y 上使下式取最大值的最小模糊集：

$$(A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y)), \quad x \in X, y \in Y, \tag{10}$$

其中使(10)式取最大值的依据是让 $A \to B$“尽全力支持”$A^* \to B^*$，而让 B^* 最小的依据是使推理最“紧凑”，“不含空隙”，因为当→关于后件不减时，Y 上任何不小于 B^* 的模糊集均可使(10)式取得最大值，特别是 Y 上的最大模糊集 1_Y. 但是，这些使(10)式取最大值的模糊集明显比 B^* 差.

由三 I 原则求得的 FMP 问题的解叫做该问题的关于蕴涵算子 $R=\to$ 的三 I 解，或简称为 R-型三 I 解，记作 B^*.

关于(10)式的最大值以及三 I 解存在的条件，有以下结论.

引理[3] (i) 若 $R=\to: [0,1]^2 \to [0,1]$ 关于第二变量不减，则(10)式的最大值为

$$M(x,y) = (A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to 1).$$

(ii) 若进一步 R 关于第二变量是右连续的，则 FMP 问题(5)的 R-型三 I 解存在且唯一.

相对于不同的蕴涵算子，已有了若干不同的三 I 算法[3,8-11]. 以下定理对于一类相当广泛的蕴涵算子给出了统一的三 I 算法，使得大多数已有结果成为本定理给出算法的特例.

定理 1 设⊗，R 是[0,1]上的两个二元运算. 若([0,1]，⊗，R)构成剩余格，即以下条件成立：

(i) (⊗，R)构成[0,1]上的伴随对，也就是说，⊗关于每个变量不减，R 关于第一变量不增，关于第二变量不减，并且以下的伴随条件成立：

$$a \otimes b \leqslant c \text{ 当且仅当 } a \leqslant b \to c; \tag{11}$$

(ii) ([0,1],⊗)构成以 1 为单位元的交换半群，

则 FMP 问题的三 I 解 B^* 唯一存在，且由下式给出：

$$B^*(y) = \bigvee_{x \in X} \{R(A(x), B(y)) \otimes A^*(x)\}, \quad y \in Y. \tag{12}$$

证明 首先注意到剩余格具有以下性质[16]：

(P1) $a \to b = 1$ 当且仅当 $a \leqslant b$；

(P2) $a \to (b \to c) = a \otimes b \to c$；

(P3) $a \to (b \to a \otimes b) = 1$.

其次我们证明(12)式给出的 B^* 是论域 Y 上对任何 $x \in X, y \in Y$ 使得(10)式取最大值 1 的最小模糊集.

事实上，B^* 显然是论域 Y 上的模糊集，且对任何 $x \in X, y \in Y$，由剩余格的性质(P3)可得，

$$(A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to (A(x) \to B(y)) \otimes A^*(x)) = 1.$$

从而再由 R 关于第二变元不减可得

$$(A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to \bigvee_{x \in X} \{(A(x) \to B(y)) \otimes A^*(x)\} = 1.$$

又，为使(10)式恒为 1，模糊集 B^* 不能再减小，这就完成了定理的证明.

附注 1 由定理 1 的证明可知，只要[0,1]上的伴随对(⊗,→)满足条件(P1,P2)，即使⊗不满足交换律，定理 1 的结论仍成立. 另外，不难证明[3]，对于伴随对(⊗,→)，关于⊗的单位元律 $1 \otimes a = a$ 等价于(P1)，而关于⊗的结合律等价于(P2).

为了证明许多已有结论是本定理的特例，我们在[0,1]上引入以下几个伴随对. 不难验证，它们都使[0,1]构成剩余格[3,13-16].

(i) R_0 伴随对($\otimes_0, R_0$)

$$R_0(a,b) = \begin{cases} 1, & a \leqslant b, \\ a' \vee b, & a > b, \end{cases}$$

$$\otimes_0(a,b) = \begin{cases} 0, & a + b \leqslant 1, \\ a \wedge b, & a + b > 1, \end{cases}$$

(ii) Lukasiewicz 伴随对($\otimes_{Lu}, R_{Lu}$)

$$R_{Lu}(a,b) = 1 \wedge (1 - a + b). \quad \otimes_{Lu}(a,b) = 0 \vee (a + b - 1).$$

(iii) Godel 伴随对($\otimes_G, R_G$)

$$R_G(a,b) = \begin{cases} 1, & a \leqslant b, \\ b, & a > b, \end{cases}$$

$$\otimes_G(a,b) = a \wedge b.$$

(iv) Goguen 伴随对($\otimes_{Go}, R_{Go}$)

$$R_{Go}(a,b) = \begin{cases} 1, & a \leqslant b, \\ b/a, & a > b, \end{cases}$$

$$\otimes_{Go}(a,b) = ab.$$

另外，以下的伴随对尽管不使[0,1]构成剩余格，但由附注 1 可知，它们也使定理 1 的结论成立：

(v) Gaines-Rescher 伴随对($\otimes_{GR}, R_{GR}$)

$$R_{GR}(a,b) = \begin{cases} 1, & a \leqslant b, \\ 0, & a > b, \end{cases}$$

$$\otimes_{GR}(a,b) = \begin{cases} 0, & a = 0, \\ b, & a > 0. \end{cases}$$

推论 1[3,8-10] FMP 问题的 R-型三 I 解 B^* 由以下公式给出：

$$B^*(y) = \bigvee_{x \in E_y} \{R_0(A(x),B(y)) \wedge A^*(x)\}, \quad y \in Y. \tag{13}$$

其中 $E_y = \{x \in X \mid A^*(x))' < R_0(A(x),B(y))\}$.

证明 由伴随对($\otimes_0, R_0$)的性质可知，当 $x \notin E_y$ 时，

$$(A^*(x))' \geqslant R_0(A(x),B(y)), \text{或} R_0(A(x),B(y)) + A^*(x) \leqslant 1,$$

从而 $R_0(A(x),B(y)) \otimes_0 A^*(x) = 0$. 又，当 $x \in E_y$ 时，$R_0(A(x),B(y)) + A^*(x) > 1$，于是

$$R_0(A(x),B(y)) \otimes_0 A^*(x) = R_0(A(x),B(y)) \wedge A^*(x).$$

由以上讨论以及公式(12)可知，FMP 问题的 R_0-型三 I 解 B^* 由(13)式给出。

推论 2[11] FMP 问题的 R_{Lu}-型三 I 解 B^* 由以下公式给出：

$$B^*(y) = \bigvee_{x \in E_y} \{R_{Lu}(A(x),B(y)) + A^*(x) - 1\}, \quad y \in Y. \tag{14}$$

其中 $E_y = \{x \in X \mid (A^*(x))' < R_{Lu}(A(x),B(y))\}$.

证明 由伴随对($\otimes_{Lu}, R_{Lu}$)的性质可知，当 $x \notin E_y$ 时，

$$(A^*(x))' \geqslant R_{Lu}(A(x),B(y)), \quad R_{Lu}(A(x),B(y)) + A^*(x) \leqslant 1.$$

从而，

$$R_{Lu}(A(x),B(y)) \otimes_{Lu} A^*(x) = 0 \vee (R_{Lu}(A(x),B(y)) + A^*(x) - 1) = 0.$$

又，当 $x \in E_y$ 时，$R_{Lu}((x)(y)) + A^*(x) > 1$. 从而，

$$R_{Lu}(A(x),B(y)) \otimes_{Lu} A^*(x) = R_{Lu}(A(x),B(y)) + A^*(x) - 1.$$

由以上讨论及公式(12)可知，FMP 问题的 R_{Lu}-型三 I 解 B^* 由(14)式给出。

推论 3 FMP 问题的 R_G-型三 I 解 B^* 由以下公式给出：

$$B^*(y) = \bigvee_{x \in X} \{A^*(x) \wedge R_G(A(x),B(y))\}, \quad y \in Y. \tag{15}$$

事实上，由 $\otimes_G = \wedge$ 可知，当 $R = R_G$ 时，(12)式就是(15)式.

值得指出的是，当 $R = R_G$ 时，公式(15)恰好与公式(7)一致. 这表明按照三 I 原则，R-型 CRI 算法中应取 $R = R_G$. 但遗憾的是，在通常的模糊推理中，却取 $R = R_M$ 或 $R = R_Z$.

类似地，我们有以下结论成立。

推论 4 FMP 问题的 R_{Go}-三 I 解 B^* 由下式给出：

$$B^*(y) = \bigvee_{x \in X} \{A^*(x) \cdot R_{Go}(A(x),B(y))\}, \quad y \in Y. \tag{16}$$

同样值得指出的是，当 $R = R_{Go}$时，由通常的 sup-* 运算给出的 FMP 问题的 R_{Go}- 型 CRI 解恰好与 R_{Go}-型三 I 解一致. 这表明按照三 I 原则，在这样的算法中应取 $R = R_{Go}$. 但遗憾的是，在通常的模糊推理中，却取 $R = R_M$ 或 $R = R_Z$.

推论 5[11] FMP 问题的 R_{GR}-型三 I 解 B^* 由下式给出：

$$B^*(y) = \bigvee_{x \in E_y} \{A^*(x)\}, \quad y \in Y, \tag{17}$$

其中 $E_y=\{x\in X\mid A(x)\leqslant E(y)\}$.

证明 由定理 1 以及附注 1,FMP 问题的 R_{GR}-型三 I 解 B^* 为

$$B^*(y)=\bigvee_{x\in X}\{R_{GR}(A(x),B(y))\otimes_{GR}A^*(x)\}$$
$$=(\bigvee_{x\in E_y}\{1\otimes_{GR}A^*(x)\})\vee(\bigvee_{x\notin E_y}\{0\otimes_{GR}A^*(x)\}))$$
$$=\bigvee_{x\in E_y}\{A^*(x)\}.$$

关于 FMP 问题的 R_Z 和 R_M-型三 I 解,我们有以下结论.

定理 2[3,8-10] FMP 问题的 R_Z-型三 I 解 B^* 由下式给出:

$$B^*(y)=\bigvee_{x\in E_y}\{R_Z(A(x),B(y))\wedge A^*(x)\},\quad y\in Y, \tag{18}$$

其中 $E_y=\{x\in X\mid (A^*(x))'\vee(1/2)<R_Z(A(x),B(y))\}$.

定理 3 FMP 问题的 R_M-型三 I 解 B^* 由下式给出:

$$B^*(y)=B(y)\wedge(\bigvee_{x\in X}\{(A(x)\wedge A^*(x))\}),\quad y\in Y. \tag{19}$$

证明 根据引理知,FMP 问题的 R_M-型三 I 解 B^* 唯一存在,且(10)式的最大值为

$$M(x,y)=(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to 1)=A(x)\wedge B(y)\wedge A^*(x),\ x\in X,y\in Y.$$

于是,

$$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to A(x)\wedge B(y)\wedge A^*(x))$$
$$=A(x)\wedge B(y)\wedge A^*(x)\wedge A(x)\wedge B(y)\wedge A^*(x)$$
$$=A(x)\wedge B(y)\wedge A^*(x)=M(x,y).$$

从而,

$$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y))$$
$$=(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to\bigvee_{x\in X}\{A(x)\wedge B(y)\wedge A^*(x)\})$$
$$=M(x,y).$$

进一步,设 C 是论域 Y 上任意满足 $C<B^*$ 的模糊集,即对任何 $y\in Y$,恒有 $C(y)\leqslant B^*(y)$,且存在 $y_0\in Y$,使得 $C(y_0)<B^*(y_0)$. 于是,存在 $x_0\in X$,使得 $C(y_0)<A(x_0)\wedge B(y_0)\wedge A^*(x_0)$. 从而

$$(A(x_0)\to B(y_0))\to(A^*(x_0)\to C(y_0))=C(y_0)<M(x_0,y_0).$$

这就证明了由公式(19)给出的 B^* 就是 FMP 问题的 R_M-型三 I 解.

附注 2 我们注意到,定理 3 中给出的 FMP 问题的 R_M-型三 I 解与 R_M-型 CRI 解恰好一致.

在模糊控制系统中,还有人提议使用如下的 Kleene 蕴涵算子 R_K[3,4]:

$$R_K(a,b)=a'\vee b,\quad a,b\in[0,1].$$

不难验证,算子 R_K 的伴随算子$\otimes_K$ 为:

$$\otimes_K(a,b)=\begin{cases}0, & a+b\leqslant 1,\\ a, & a+b>1.\end{cases}$$

由于伴随对($\otimes_K,R_K$)不满足关于$\otimes_K$ 的单位元律,故条件(P1)不成立。这样,尽管由引理可知,FMP 问题的 R_K-型三 I 解唯一存在,但也不能使用定理 1 给出的算法。不过,我们有以下

算法。

定理 4 FMP 问题的 R_K-型三 I 解 B^* 由以下公式给出：

$$B^*(y)=\begin{cases}1, & \bigwedge_{x\in X}\{(A^*(x))'\vee(A(x)\wedge(B(y))')\}<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{20}$$

证明 由引理可知，(10)式对于算子 R_K 的最大值为

$$\begin{aligned}M(x,y)&=(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to 1)\\&=(A(x)-B(y))'\vee(A^*(x))'\vee 1=1,\quad x\in X,y\in Y.\end{aligned}$$

于是

$$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y))=(A(x)\wedge B'(y))\vee((A^*(x))'\vee B^*(y).$$

再由(20)式可知，上式在任何情形的值都为 1。

另一方面，容易看出，模糊集 B^* 的值不能减小. 因此，由(20)式给出的 B^* 就是 FMP 问题的 R_K-型三 I 解。

3 三 I 算法的还原性

在模糊推理理论中，对于推理方法的优劣，目前尚没有公认的系统标准. 但是，算法的还原性是对算法的最基本的要求，这种要求体现了算法的相容性或和谐性，这已成为诸多专家学者的共识.

定义[3] 如果当 A 和 B 满足条件(P)时，对于求解 FMP 问题的一种算法，由 $A^*=A$ 求得 $B^*=B$，则称这种算法为 P-还原算法.

特别地，如果条件(P)为：A 是正规模糊集，即，存在 $x_0\in X$，使得 $A(x_0)=1$，那么 P-还原算法简称为还原算法.

在模糊控制理论中，输入 A,B 通常均取正规模糊集[2]，因而正规性是一种比较合理的也是最基本的要求.

我们知道，Zadeh 的 R_Z-型 CRI 算法不是还原算法，这可从以下例子得到证实.

例 1 设 $X=Y=[0,1]$，$A(x)=x$，$B(y)\equiv 0$，$A^*(x)=x$，$x\in X$，$y\in Y$.

由 R_Z-型三 I 算法可得

$$B^*(y)=\bigvee_{x\in[0,1]}\{x\wedge(1-x)\}\equiv 1/2,\quad y\in[0,1].$$

对于三 I 算法，我们有以下一般的结论.

定理 5 若$([0,1],\otimes_R,R)$构成剩余格，则 FMP 问题的 R-型三 I 算法是还原算法.

证明 由定理 1 可知，FMP 问题的 R-型三 I 解 B^* 由(12)式给出，即

$$B^*(y)=\bigvee_{x\in X}\{R(A(x),B(y))\otimes_R A^*(x)\},\quad y\in Y.$$

设 $A^*=A$ 为 X 上的正规模糊集，下证 $B^*=B$.

首先，由剩余格的性质可知，对于任何 $z\in X$，

$$(A(x)\to B(y))\to(A(x)\to B(y))=1.$$

再由 B^* 的最小性，$B^*\leqslant B$.

反之，由剩余格的性质亦有，对于任何 $x\in X$，$y\in Y$，

$$
\begin{aligned}
A(x) &\leqslant B(y) \to B(y) \otimes_R A(x) \\
&\leqslant B(y) \to (A(x) \to B(y)) \otimes_R A(x) \\
&\leqslant B(y) \to \bigvee_{x\in X}\{A(x) \to B(y)) \otimes_R A(x)\} \\
&= B(y) \to B^*(y).
\end{aligned}
$$

从而有

$$1=\bigvee_{x\in X}\{A(x)\}\leqslant B(y)\to B^*(y).$$

这表明 $B(y)\leqslant B^*(y)$, $y\in Y$.

综上所述,我们得到 $B^*=B$.

推论 当 $R\in\{R_0,R_{Lu},R_G,R_{Go}\}$时,FMP 问题的 R-型三 I 算法都是还原算法.

附注 3 根据定理 5 和它的推论,文献中已有的关于三 I 算法还原性的结论基本上都是定理 5 的特例[3,8-11].

对于 $R\in\{R_{GR},R_Z,R_M\}$的情形下 FMP 问题 R-型三 I 算法的还原性,有以下几个结论.

定理 6[11] FMP 问题的 R_{GR}-型三 I 算法是 P-还原算法,这里的性质(P)为:

$$B(y)\leqslant\bigvee_{x\in E_y}\{A(x)\},\quad y\in Y, \tag{21}$$

其中 $E_y=\{x\in X\mid A(x)\leqslant B(y)\}$.

定理 7 FMP 问题的 R_Z-型三 I 算法是 P-还原算法,这里的条件(P)为:

$$\bigvee_{x\in E_y}\{A(x)\}=1, \tag{22}$$

其中 $E_y=\{x\in X\mid A(x)\wedge B(y)>(A(x))'\vee 1/2\}$.

证明 设 $A^*=A$,根据定理 2,此时 FMP 问题的 R_Z-型三 I 解 B^*由(18)式给出,即

$$B^*(y)=\bigvee_{x\in F_y}\{R_Z(A(x),B(y))\wedge A^*(x)\},\quad y\in Y,$$

其中 $F_y=\{x\in X\mid (A(x))'\vee(1/2)<R_Z(A(x),B(y))\}$.

由 F_y 的构成可知,当 $x\in F_y$ 时,$R_Z(A(x),B(y))=A(x)\wedge B(y)$. 由此及(22)可得,

$$
\begin{aligned}
B^*(y) &= \vee\ \{A(x)\ \wedge\ B(y)\mid(A(x))'\ \vee\ (1/2)<A(x)\ \wedge\ B(y))\} \\
&= B(y)\ \wedge\ (\vee\ \{A(x)\mid(A(x))'\ \vee\ (1/2)<R_Z(A(x),B(y))\}) \\
&= B(y),\quad y\in Y.
\end{aligned}
$$

因此,FMP 问题的 R_Z-型三 I 算法是 P-还原算法.

附注 4 对于例 1,不难求得其 R_Z-型三 I 解 $B^*=B$. 这表明三 I 算法在还原性方面确实优于 CRI 算法,另外,在例 1 中,条件(22)并不成立,这说明条件(22)只是 R_Z-型三 I 算法还原性的充分条件,而非必要条件.

定理 8 FMP 问题的 R_M-型三 I 算法是还原算法.

证明 设 $A^*=A$ 是论域 X 上的正规模糊集,则由定理 3,此时 FMP 问题的 R_M-型三 I 解 B^*由(19)式给出,即

$$B^*(y)=B(y)\wedge(\bigvee_{x\in X}\{(A(x)\wedge A^*(x))\}),\quad y\in Y.$$

于是,

$$B^*(y)=B(y)\wedge(\bigvee_{x\in X}\{A(x)\})=B(y),\quad y\in Y.$$

即,$B^*=B$.

附注 5 尽管蕴涵算子 R_M 在模糊控制中发挥了重要的作用，许多学者仍对使用 R_M 表示不能接受，因为算子 R_M 在 $\{0,1\}^2$ 上的限制并不是经典的蕴涵[17]. 这里的定理 8 却表明，算子 R_M 形成的三 I 算法(亦即 CRI 算法)除了具有运算简便的优点外，还具有优良的还原性. 加之计算机的运算速度越来越快，实时调控在很大程度上弥补了由算子 R_M 带来的一些负面影响，这恐怕也是模糊控制中至今仍在使用算子 R_M 的原因之一吧.

4 结束语

模糊控制是一种具有发展前途的智能控制的理论和方法，其核心部分是模糊推理机制. 传统的 CRI 推理方法存在许多不足，全蕴涵三 I 推理方法有效地改进了 CRI 方法，本文在相当一般的情形讨论了 FMP 问题的三 I 算法的计算公式及其还原性问题，还讨论了与具有较多实际应用的几个蕴涵算子相关的三 I 算法. 文[14]进一步讨论了 FMT 问题的三 I 算法及其还原性。

可以证明，在许多方面三 I 算法优于 CRI 算法. 然而，在实际的模糊控制中以全蕴涵三 I 算法代替 CRI 算法进行模糊推理方面，仍未见到相应的研究成果. 作者相信，这是一项具有重要意义的工作，我们将进一步对此展开讨论.

参考文献：

[1] MAMDANI E H. *Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguictic synthesis* [J]. TEEE Trans. Comput., 1977, **26**(12): 1182—1191.

[2] LEE C C. *Fuzzy logic in control systems: Fuzzy logic controller* [J]. TEEE Trans. Sys. Man Cybern., 1990, **20**(2): 405—435.

[3] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理 [M]. 北京：科学出版社，2000.
WANG Guo-jun. *Nonclassical Mathematical Logic and Approximate Reasoning* [M]. Beijing: Science Press, 2000. (in Chinese)

[4] 吴望名. 模糊推理的原理和方法 [M]. 贵阳：贵州科技出版社，1994.
WU Wang-ming. *The Principles and Methods of Fuzzy Reasoning* [M]. Guiyang: Guizhou Sci. Tech. Press, 1994. (in Chinese)

[5] ZADEH L A. *Outhne of new approach to the analysis of complex systems and decision processes* [J]. TEEE Trans. Sys. Man Cybern., 1973, **3**(1): 28—33.

[6] 吴望名. 关于模糊逻辑的一场争论 [J]. 模糊系统与数学，1995, **9**(2): 1—9.
WU Wang-ming. *A controversy on fuzzy logic* [J]. Fuzzy Systems Math., 1995, **9**(2): 1—9. (in Chinese)

[7] WANG Guo-jun. *A formal deductive system for fuzzy propositional calculus* [J]. Chinese Sci. Bull., 1997, **42**(10): 1041—1045.

[8] WANG Guo-jun. *On the logic foundation of fuzzy reasoning* [J]. Inform. Sci., 1999, **117**(1): 47—88.

[9] 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法 [J]. 中国科学(E 辑)，1999, **29**(1): 43—53.
WANG Guo-jun. *Full implication triple* I *method for fuzzy reasoning* [J]. Sci. China (Ser. E), 1999,

29(1): 43—53. (in Chinese)

[10] 王国俊. 模糊推理的一个新方法 [J]. 模糊系统与数学, 1999, **13**(3): 1—10.
WANG Guo-jun. *A new method for fuzzy reasoning* [J]. Fuzzy Systems Math., 1999, **13**(3): 1—10. (in Chinese)

[11] 周保魁,王国俊. 不同蕴涵算子下的三 I 算法 [J]. 陕西师范大学学报(自), 1998, **26**(4): 1—5.
ZHOU Bao-kui, WANG Guo-jun. *The triple* I *methods under diferent implications* [J]. J. Shaanxi Normal Univ., (Nat. Sci. Edu.), 1998, **26**(4): 1—5. (in Chinese)

[12] PEI Dao-wu, WANG Guo-jun. *The completeness and applications of the formal system* $\mathscr{L}^*$ [J]. Sci. China (Ser. F), 2002, **45**(1): 40—50.

[13] 裴道武. 剩余格和正则剩余格的几个特征定理 [J]. 数学学报, 2002, **45**(2): 271—278.
PEI Dao-wu. *The characterization of residuated lattices and regular residuated lattices* [J]. Acta Math. Sinica, 2002, **45**(2): 271—278. (in Chinese)

[14] 裴道武. FMT 问题的两种三 I 算法及其还原性 [J]. 模糊系统与数学, 2001, **15**(4): 1—7.
PEI Dao-wu. *Two triple* I *methods for FMT problem and their reductivity* [J]. Fuzzy Systems Math., 2001, **15**(4): 1—7. (in Chinese)

[15] PEI Dao-wu. *R_0 implication: characteristics and applications* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, **131**(3): 297—302.

[16] PAVELKA J. *On fuzzy logic* (I , II , III) [J]. Z. Math. Logik Grund. Math., 1979, **25**: 45—52; 119—134; 447—464.

[17] HAJEK P. *Metamathematics of Fuzzy Logic* [M]. Dordrecht: Kluwer, 1998.

Full Implication Triple I Algorithms and Their Consistency in Fuzzy Reasoning

PEI Dao-wu[1,2]

(1. Dept. of Comp. Sci. & Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;
2. Dept. of Math., Yancheng Teachers' College, Jiangsu 224002, China)

Abstract: Fuzzy reasoning is the mathematical and logical foundation of fuzzy control. However, the conventional CRI algorithms of fuzzy reasoning are short of solid logic foundation. The full implication triple I algorithms proposed recently efficiently improve CRI algorithms. In this paper, computing formulas and consistency of the triple I algorithms are studied generally, so that the most existing results are included as the special cases of the results given out here. Some new results are obtained with new ideas.

Key words: fuzzy logic; fuzzy reasoning; fuzzy control; CRI algorithm; full implication triple I algorithm; consistency.