第23卷第4期　数学研究与评论　Vol. 23 No. 4
2003年11月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Nov. 2003

关于 Dirichlet L- 函数的倒数的偶次幂的加权均值*

高　丽
(延安大学数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000)

摘　要：本文利用特征和与三角和的一些恒等式及其估计式与解析方法讨论了 Dirichlet L-函数的倒数的偶次幂的加权均值，得到一个均值分布的渐近公式.

关键词：Dirichlet L-函数；特征；Gauss 和；均值分布；渐近公式；
分类号：AMS(2000) 11M20/CLC number：O156.4
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2003)04-0679-06

1　引　言

设整数 $q\geqslant 2$，χ 为模 q 的 Dirichlet 特征，对任意整数 m，我们知道 Gauss 和 $G(m,\chi)$ 定义如下：

$$G(m,\chi)=\sum_{a=1}^{q}\chi(a)e\left(\frac{ma}{q}\right),$$

其中 $e(y)=e^{2\pi iy}$.

关于 Gauss 和的性质，许多数论书中都讲的很多，也许它最重要的性质是：当 $(m,q)=1$ 且 χ 为模 q 的原特征时有 $|G(m,\chi)|=q^{\frac{1}{2}}$，对于非原特征 χ，$|G(m,\chi)|$ 的值变化较大，也就是说，对不同的特征 χ，$|G(m,\chi)|$ 的值分布很不规则. 然而在许多加权均值中，$|G(m,\chi)|$ 确又表现出良好的值分布性质，本文的主要目的就是为了说明这一点，为此我们设实数 $Q>1$，整数 $2\leqslant q\leqslant Q$，$L(s,\chi)$ 表示模 q 的 Dirichlet L-函数，下面我们利用特征和与三角和的一些恒等式及其估计式与解析方法讨论 Dirichlet L-函数倒数的偶次幂的加权均值

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{\chi\bmod q}\frac{|G(m,\chi)|^2}{|L(1,\chi)|^{2k}}$$

的渐近性质，其中 $\sum\limits_{q\leqslant Q}$ 表示对不超过 Q 的整数 q 求和，$F(q)=\prod\limits_{p\mid q}(1+\frac{1}{p^2})$，$\prod\limits_{p\mid q}$ 表示对模 q 的所有素因子求积，$\varphi(q)$ 为 Euler 函数，$\sum\limits_{\chi\bmod q}$ 表示对模 q 的所有特征求和，于是我们得出下面定

* 收稿日期：2001-06-26
基金项目：陕西省教委专项科研基金资助项目(00JK123，99JK097)
作者简介：高丽(1963-)，女，硕士，副教授.

理.

定理 设实数 $Q \geqslant 2$,整数 $q \geqslant 2$,对任意正整数 k 及满足 $(m, \prod_{q\leqslant Q} q) = 1$ 的整数 m,有渐近公式

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{\chi \bmod q}\frac{|G(m,\chi)|^2}{|L(1,\chi)|^{2k}} = \left(\frac{15}{\pi^2}\right)^k Q + O(Q^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

其中 ϵ 为任意给定的正数.

在定理中分别令 $k = 1,2$ 可得如下推论.

推论 1 设实数 $Q \geqslant 2$,整数 $q \geqslant 2$,对任意的整数 m 且 $(m, \prod_{q\leqslant Q} q) = 1$,有渐近公式

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{F(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{\chi \bmod q}\left|\frac{G(m,\chi)}{L(1,\chi)}\right|^2 = \frac{15}{\pi^2}Q + O(Q^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

推论 2 设实数 $Q \geqslant 2$,整数 $q \geqslant 2$,对任意的整数 m 且 $(m, \prod_{q\leqslant Q} q) = 1$,我们有渐近公式

$$\sum_{q\leqslant Q}\left(\frac{F(q)}{\varphi(q)}\right)^2\sum_{\chi \bmod q}\frac{|G(m,\chi)|^2}{|L(1,\chi)|^4} = \frac{225}{\pi^4}Q + O(Q^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

2 主要引理

为了完成定理的证明,我们需要引入下面几个引理

引理 1[4] 设 m,q 为整数且 $q \geqslant 2$,则有估计式

$$\sum_{a=1}^{q}{}' e\left(\frac{ma}{q}\right) \leqslant \sum_{d\mid (m,q)} d,$$

其中 $\sum_{a=1}^{q}{}'$ 表示对所有满足 $(a,q) = 1$ 的 a 求和,$e(y) = e^{2\pi i y}$. $\sum_{d\mid n}$ 表示对 n 的所有正除数求和.

引理 2[3] 设实数 $Q \geqslant 2$,对于任意给定的正整数 k,有渐近公式

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\frac{1}{|L(1,\chi)|^{2k}} = \left(\frac{15}{\pi^2}\right)^k Q + O(Q^{\epsilon}).$$

引理 3[3] 设实数 $Q \geqslant 1$,$y \geqslant 2$,对任意的正整数 k,当 $r(n) = \sum_{n_1 n_2 \cdots n_k = n}\mu(n_1)\mu(n_2)\cdots\mu(n_k)$ 时有估计式

$$\sum_{q\leqslant Q}\sup_{\substack{a,x\\ x\leqslant y}}\left|\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv a(q)}} r(n)\right| \ll y(\ln y)^{-A} + y^{1-\frac{1}{2}k}Q(\ln(yQ))^4,$$

其中 $\mu(n)$ 为 Möbius 函数.

引理 4 设整数 $q \geqslant 2$,实数 $Q \geqslant 2$,χ 表示模 q 的 Dirichlet 特征,则有估计式

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{d\mid q}\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}} d\left|\sum_{\chi \bmod q}\frac{\chi(rd+1)}{|L(1,\chi)|^{2k}}\right| = O(Q^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

证明 设 $A(\chi,y) = \sum_{\frac{q}{rd+1}<n\leqslant y}\chi(n)r(n)$,$B(\chi,y) = \sum_{q<n\leqslant y}\chi(n)r(n)$,则当 $\mathrm{Re}(s) > 1$ 时有

$$\frac{1}{L^k(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)r(n)}{n},$$

由此及 Abel 求和公式得

$$\frac{1}{L^k(1,\chi)}=\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{rd+1}}\frac{\chi(n)r(n)}{n}+\int_{\frac{q}{rd+1}}^{\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{1\leqslant n\leqslant q}\frac{\chi(n)r(n)}{n}+\int_{q}^{\infty}\frac{B(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y,$$

于是可得

$$\sum_{\chi\bmod q}\frac{\chi(rd+1)}{|L(1,\chi)|^{2k}}=\sum_{\chi\bmod q}\chi(rd+1)\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)r(n)}{n}\right|^2$$

$$=\sum_{\chi\bmod q}\chi(rd+1)\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{rd+1}}\frac{\chi(n)r(n)}{n}+\int_{\frac{q}{rd+1}}^{\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\right)\times$$

$$\left(\sum_{1\leqslant m\leqslant q}\frac{\bar{\chi}(m)r(m)}{m}+\int_{q}^{\infty}\frac{B(\bar{\chi},z)}{z^2}\mathrm{d}z\right)$$

$$=\sum_{\chi\bmod q}\chi(rd+1)\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{rd+1}}\frac{\chi(n)r(n)}{n}\right)\left(\sum_{1\leqslant m\leqslant q}\frac{\bar{\chi}(m)r(m)}{m}\right)+$$

$$\sum_{\chi\bmod q}\chi(rd+1)\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{rd+1}}\frac{\chi(n)r(n)}{n}\right)\int_{q}^{\infty}\frac{B(\bar{\chi},z)}{z^2}\mathrm{d}z+$$

$$\sum_{\chi\bmod q}\chi(rd+1)\left(\sum_{1\leqslant m\leqslant q}\frac{\bar{\chi}(m)r(m)}{m}\right)\int_{\frac{q}{rd+1}}^{\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y+$$

$$\sum_{\chi\bmod q}\chi(rd+1)\int_{\frac{q}{rd+1}}^{\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\int_{q}^{\infty}\frac{B(\bar{\chi},z)}{z^2}\mathrm{d}z$$

$$\triangleq M_1+M_2+M_3+M_4.$$

又因为

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{d\mid q}\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}d\left|\sum_{\chi\bmod q}\frac{\chi(rd+1)}{|L(1,\chi)|^{2k}}\right|$$

$$\leqslant\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{d\mid q}\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}d(|M_1|+|M_2|+|M_3|+|M_4|).$$

下面我们分别来估计上式中的各项.

首先由模 q 特征和的正交关系知，当 $(q,mn)=1$ 时有恒等式

$$\sum_{\chi\bmod q}\chi(n)\bar{\chi}(m)=\begin{cases}\varphi(q), & \text{若 } n\equiv m(\bmod q);\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

由此可得

$$M_1=\sum_{\chi\bmod q}\chi(rd+1)\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{rd+1}}\frac{\chi(n)r(n)}{n}\right)\left(\sum_{1\leqslant m\leqslant q}\frac{\bar{\chi}(m)r(m)}{m}\right)$$

$$=\varphi(q)\sideset{}{'}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{rd+1}\\(rd+1)n\equiv m(q)}}\sideset{}{'}\sum_{1\leqslant m\leqslant q}\frac{r(n)r(m)}{nm}=\varphi(q)\sideset{}{'}\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{rd+1}}\frac{r(n)r((rd+1)n)}{(rd+1)n^2}$$

$$\leqslant \varphi(q)\frac{r(rd+1)}{rd+1}\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{rd+1}}{}' \frac{|r(n)|^2}{n^2}\leqslant \varphi(q)\frac{r(rd+1)}{rd+1}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{|r(n)|^2}{n^2}+O(q^{\epsilon}).$$

注意到估计式 $r(n)\leqslant d_k(n)\ll q^{\epsilon}$，以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{|r(n)|^2}{n^2}=\prod_{p\nmid q}(1+\frac{1}{p^2})^k\ll C(\text{常数}),$$

由此及上式即得

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{d|q}\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}d|M_1|$$

$$\leqslant \sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi(q)}\sum_{d|q}\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}\frac{dr(rd+1)}{rd+1}\prod_{p\nmid q}(1+\frac{1}{p^2})^k+\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{d|q}\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}dq^{\epsilon}$$

$$\leqslant \sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{d|q}\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}\frac{q^{\epsilon}}{r}+\sum_{q\leqslant Q}q^{-1+\epsilon}\leqslant Q^{\epsilon}.$$

其次我们有

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{d|q}\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}d|M_2|$$

$$=\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{d|q}\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}d\left|\sum_{\chi\bmod q}\chi(rd+1)\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{rd+1}}\frac{\chi(n)r(n)}{n}\right)\int_q^{\infty}\frac{B(\bar{\chi},z)}{z^2}\mathrm{d}z\right|$$

$$\leqslant \sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{d|q}\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}d\left|\sum_{\chi\bmod q}\chi(rd+1)\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{rd+1}}\frac{\chi(n)r(n)}{n}\right)\int_q^{Q^{2^k}}\frac{B(\bar{\chi},z)}{z^2}\mathrm{d}z\right|+$$

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{d|q}\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}d\left|\sum_{\chi\bmod q}\chi(rd+1)\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{rd+1}}\frac{\chi(n)r(n)}{n}\right)\int_{Q^{2^k}}^{\infty}\frac{B(\bar{\chi},z)}{z^2}\mathrm{d}z\right|$$

$$\leqslant \sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{d|q}\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}d\left|\sum_{\chi\bmod q}\chi(rd+1)\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{rd+1}}\frac{\chi(n)r(n)}{n}\right)\int_q^{Q^{2^k}}\frac{\sum_{q<m\leqslant z}\bar{\chi}(m)r(m)}{z^2}\mathrm{d}z\right|+$$

$$O(Q^{\frac{1}{2}+\epsilon}\int_{Q^{2^k}}^{\infty}\frac{1}{z^2}\Big(\sum_{q\leqslant Q}\sup_{\substack{a,y\\ y\leqslant z}}\Big|\sum_{\substack{m\leqslant y\\ m\equiv a(q)}}r(m)\Big|\Big)\mathrm{d}z),$$

由引理 3 与上式得

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{d|q}\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}d|M_2|\leqslant\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi(q)}\int_q^{Q^{2^k}}\frac{1}{z^2}\Big(\sum_{d|q}\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant\frac{q}{rd+1}\\ (rd+1)n\equiv m(q)}}{}'\sum_{1\leqslant m\leqslant q}{}'\frac{dr(n)r(m)}{n}\Big)\mathrm{d}z+$$

$$O(Q^{\frac{1}{2}+\epsilon}\int_{Q^{2^k}}^{\infty}\frac{1}{z^2}(z(\ln z)^{-A}+z^{1-\frac{1}{2^k}}Q(\ln(zQ))^4)\mathrm{d}z$$

$$\ll \sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi(q)}\sum_{d\mid q}\sum_{n\leqslant\frac{q}{d}}\frac{d}{n}\int_q^{Q^{2^k}}\frac{z\cdot\frac{q}{d}\cdot\frac{1}{q}\cdot q^{\epsilon}}{z^2}\mathrm{d}z+$$

$$Q^{\frac{1}{2}+\epsilon}\int_{Q^{2^k}}^{\infty}\frac{1}{z}((\ln z)^{-A}+z^{-1/2^k}Q(\ln(zQ))^4)\mathrm{d}z$$

$$\ll Q^{\frac{1}{2}+\epsilon}.$$

同样我们可以利用特征和的正交性与引理 3 得

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{d\mid q}\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}d\,|M_3|\ll Q^{\frac{1}{2}+\epsilon},$$

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{d\mid q}\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}d\,|M_4|\ll Q^{\frac{1}{2}+\epsilon},$$

因此我们有

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{d\mid q}\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}d\left|\sum_{\chi\bmod q}\frac{\chi(rd+1)}{|L(1,\chi)|^{2k}}\right|=O(Q^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

3 定理的证明

这一节我们在上面引理的基础上给出定理的具体证明.

由 Gauss 和定义知:当$(m,q)=1$时有恒等式

$$\sum_{\chi\bmod q}\frac{|G(m,\chi)|^2}{|L(1,\chi)|^{2k}}=\sum_{c=1}^{q}{}'\sum_{b=1}^{q}{}'e\left(\frac{(c-b)m}{q}\right)\sum_{\chi\bmod q}\frac{\chi(c\bar{b})}{|L(1,\chi)|^{2k}},$$

由于$(\bar{b},q)=1$,所以当c通过模q的简化剩余系时,$c\bar{b}$也通过模q的一个简化剩余系,于是由上式及引理 1,引理 2,引理 4 得

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{\chi\bmod q}\frac{|G(m,\chi)|^2}{|L(1,\chi)|^{2k}}=\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{a=1}^{q}{}'\sum_{b=1}^{q}{}'e\left(\frac{(ab-b)m}{q}\right)\sum_{\chi\bmod q}\frac{\chi(a)}{|L(1,\chi)|^{2k}}$$

$$=\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{b=1}^{q}{}'\sum_{\chi\bmod q}\frac{1}{|L(1,\chi)|^{2k}}+\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{a=2}^{q}{}'\sum_{b=1}^{q}{}'e\left(\frac{(a-1)mb}{q}\right)\sum_{\chi\bmod q}\frac{\chi(a)}{|L(1,\chi)|^{2k}}$$

$$=\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi(q)}\sum_{\chi\bmod q}\frac{1}{|L(1,\chi)|^{2k}}+O\left(\sum_{q\leqslant Q}\frac{F^k(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{d\mid q}\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{d}}d\left|\sum_{\chi\bmod q}\frac{\chi(rd+1)}{|L(1,\chi)|^{2k}}\right|\right)$$

$$=\left(\frac{15}{\pi^2}\right)^kQ+O\left(Q^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

于是完成了定理的证明.

参考文献:

[1] TOM M A. *Introduction to Analytic Number Theory* [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[2] TOM M A. *Modular Function and Dirichlet series in Number Theory* [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[3] 张文鹏. Dirichlet L-函数倒数的 $2k$ 次均值公式 [J]. 数学年刊, A 辑, 1993, **14**(1): 1—5.
ZHANG Wen-peng. *On the 2k-th power mean of the inversion of dirichlet L-functions*[J]. Chinese Annals of Mathematics, Ser. A, 1993, **14**(1): 1—5. (in Chinese)

[4] 易媛,张文鹏. 关于 Dirichlet L-函数的一次加权均值 [J]. 系统科学与数学,2000, **20**(3): 346—351.
YI Yuan, ZHANG Wen-peng. *On the first power mean of dirichlet L-functions with the weight of Gauss sums*[J]. J. Systems Sci. Math. Sci., 2000, **20**(3): 346—351. (in Chinese)

[5] DAVENPORT H. *Multiplicative Number Theory*[M]. Markham, 1976.

On the Even Power Mean of the Inversion of Dirichlet L-Functions

GAO Li

(College of Math. & Comp. Sci., Yan'an University, Shaanxi 716000, China)

Abstract: The main purpose of this paper is to discuss the even power mean of the inversion of Dirichlet L-funcions with weights of Gauss sums by using of some identities of character sums and trigonomitric sums, and its estimates and analytic method. A asymptotic formula of mean value is obtained.

Key words: Dirichlet L-functions; character; Gauss sums; distribution of the mean value; asymptotic formula.