关于Bloch法则的一个注记*

李松鹰

（福建师范大学数学系）

如所周知，在函数论中有个著名的原理即Bloch法则[2,1]："设P是亚纯函数的一个性质，若于开平面上亚纯的函数具有性质P必蜕化为常数，则在区域D内一致地⁼具有性质P的亚纯函数族必为D内的正规族"。Bloch法则是否成立迄今仍是一个悬而未决的问题。

本文试将给出一个简单的例子，说明Bloch法则在一般的情况下不成立。

事实上，若于开平面上亚纯的函数$f(z)$具有性质P：

$$(1)\ f^{(k)}(z)\equiv 0, \qquad (2)\ f'(z)-f(z)\neq 0,$$

则$f(z)$必蜕化为常数，其中$k\geqslant 2$为一整数。

根据条件（1）有 $f(z)=\sum_{i=0}^{k-1} b_i z^i$．由条件（2）易知

$$\sum_{i=0}^{k-2}(b_i-(i+1)a_{i+1})z^i+b_{k-1}z^{k-1}\neq 0, \quad (|z|<+\infty) \qquad (1)$$

根据代数基本定理及（1）式可知 $b_{k-1}=0$，$b_i=(i+1)b_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots,k-2)$．由此推得 $b_i=0$ $(i=1,2,\cdots,k-1)$．于是$f(z)$蜕化为常数b_0．

另外，设$a_1,a_2,\cdots,a_{k-1}$为$k-1$个实数使得

$$a_1\geqslant(a_1-2a_2)\geqslant(a_2-3a_3)\geqslant\cdots\geqslant(a_{k-2}-(k-1)a_{k-1})\geqslant a_{k-1}>0 \qquad (2)$$

易知满足（2）式的一组实数是存在的。

作函数 $P(z)=\sum_{i=1}^{k-1} a_i z^i$, $f_n(z)=nP(z)$ $(n=1,2,\cdots)$,

就有 $-P'(z)+P(z)=a_1+\sum_{i=1}^{k-2}(a_i-(i+1)a_{i+1})z^i+a_{k-1}z^{k-1}$，再由（2）式不难证明

$p'(z)-P(z)$ 在单位圆D: $\{|z|<1\}$ 内无零点。所以，$\{f_n(z)\}$ 为单位圆D内定义的亚纯函数族，且对任一$f_n(z)\in\{f_n(z)\}$ 在D内恒有

$$f_n'(z)-f_n(z)=n(p'(z)-P(z))\neq 0.$$

又因为 $f_n^{(k)}(z)=np^{(k)}(z)\equiv 0$，故知 $\{f_n(z)\}$ 在D内一致地具有性质P，但 $\{f_n(z)\}$ 在D内不正规。

参考文献

〔1〕Einar Hille, Analytic Function Theory, Vol. 2, Ginn, Boston, 1962.

〔2〕杨乐，华东师大学报，自然科学版，1(1983)，1—6.

*1985年4月4日收到。

⁼即族中每一函数在D内均具有性质P.