第25卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.25, No.2
2005年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2005

文章编号: 1000-341X(2005)02-0347-04 文献标识码: A

关于 Szegö 的一个不等式

章仁江 [1], 孔伟杰 [2]
(1. 中国计量学院数学系, 浙江 杭州 310018; 2. 浙江大学经济学院, 浙江 杭州 310027)
(E-mail: zrj@cjlu.edu.cn)

摘 要: 设 $p_n(x)$ 为 $[0,\infty)$ 上次数不超过 n 的代数多项式, 则有

$$\|p_n'(x)e^{-x}\|_{[0,\infty)} \le (6.3n+1)\|p_n(x)e^{-x}\|_{[0,\infty)}.$$

若 $p_n(x)$ 同时又是奇函数或偶函数, 则有

$$\|p_n'(x)e^{-x}\|_{[0,\infty)} \le (1.8+7n^{\frac{1}{2}})\|p_n(x)e^{-x}\|_{[0,\infty)}.$$

关键词: 代数多项式; Bernstein-Markov 不等式; 权.
MSC(2000): 41A77
中图分类: O174.41

1 引 言

设 $H_n(x)$ 为 $[0,\infty)$ 上次数不超过 n 的代数多项式的集合, $p_n(x)\in H_n$, $p_n(x)$ 的加权 $w(x)(>0)$ 范数定义为

$$\|p_n(x)w(x)\|_{[0,\infty)} := \max_{x\in[0,\infty)} |p_n(x)w(x)|.$$

1964 年, Szegö[1] 证明

$$\|p_n'(x)e^{-x}\|_{[0,\infty)} \le (8n+2)\|p_n(x)e^{-x}\|_{[0,\infty)}.$$

这个不等式的常数不是最佳的, 但由于在这方面高深的数学工具很难用得上去, 故进展不大. Tamas Erdalyi[2] 在增加条件的情况下证明, 存在一个绝对常数 $c>0$, 对每一个在区间 [0,2] 上无零点的 $p_n\in H_n$ 满足

$$\|p_n'(x)e^{-x}\|_{[0,\infty)} \le c\sqrt{n}\|p_n(x)e^{-x}\|_{[0,\infty)}.$$

文献 [3] 列出了在加权多项式不等式及其应用方面作出了重要贡献的作者及文献. 最近 [4], 我们在一些特殊权上获得一点结果. 本文我们将改善 Szegö 不等式, 同时对具有奇偶性的函数获得较满意的结果.

2 结果与证明

为证明定理需以下两个引理.

收稿日期: 2002-06-24
基金项目: 浙江省高校青年教师基金, 中国计量学院 "123" 人才基金

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

引理 1 下面的不等式成立

$$|1-\frac{x}{n}|^n \le e^{-x}, \quad 0 \le x \le 1.275n. \tag{1}$$

证明 按 x 的值分两种情况:

1. $0 \le x \le n$, 则不等式 (1) 等价于 $n\ln(1-\frac{x}{n}) \le -x$, 令 $g(x) = -x - n\ln(1-\frac{x}{n})$, 则 $g'(x) = \frac{x}{n-x} \ge 0$, 这样由 $g(x) \ge g(0) = 0$ 不等式 (1) 可获证.

2. $n \le x \le 1.275n$, 令 $x = tn(1 \le t \le 1.275)$, 则 (1) 等价于 $t-1 \le e^{-t}$. 令 $f(t) = e^{-t}+1-t$, 则 $f(t)$ 是减函数, 容易求出 $f(t)$ 的近似零点为 1.275 且 $f(1.275) > 0$, 从而由 $f(t) > f(1.275)$ 引理可证.

引理 2 设 $p_n(x) \in H_n$ 是奇函数或偶函数, 则对 $t > 0$ 有

$$\max_{x\in[-t,\infty)} |p_n(x)e^{-x}| \le e^{2t} \max_{x\in[0,\infty)} |p_n(x)e^{-x}|.$$

证明 设有 $x_0 \in [-t,\infty)$ 使得 $p_n(x_0)e^{-x_0} = \max_{x\in[-t,\infty)} |p_n(x)e^{-x}|$. 分两种情况:

1. 若 $x_0 \in [0,\infty)$, 则引理显然成立.

2. 若 $x_0 \in [-t,0]$, 则利用函数 $p_n(x)$ 的奇偶性有

$$|p_n(x_0)e^{-x_0}| = e^{-2x_0}|p_n(-x_0)e^{x_0}| \le e^{-2x_0} \max_{x\in[0,t]} |p_n(x)e^{-x}| \le e^{2t} \max_{x\in[0,\infty)} |p_n(x)e^{-x}|.$$

定理 1 设 $p_n \in H_n$, 则有

$$\|p_n'(x)e^{-x}\|_{[0,\infty)} \le (6.3n+1)\|p_n(x)e^{-x}\|_{[0,\infty)}.$$

证明 将 Markov 不等式

$$|p_n'(x)\|_{[-1,1]} \le n^2\|p_n(x)\|_{[-1,1]}, \quad x \in [-1,1]$$

作变量线性变换可得

$$\|p_n'(x)\|_{[0,2a]} \le 2n^2/a\|p_n(x)\|_{[0,a]}, \quad x \in [0,a].$$

令 $q(x) = p_n(x)(1-\frac{x}{n})^n, a = tn$, 利用上式并注意到 $q(n)$ 是 $2n$ 次多项式可得

$$|q'(n)| = |p_n'(1-\frac{x}{n})^n - p_n(x)(1-\frac{x}{n})^{n-1}| \le \frac{8n}{t}\|q(x)\|_{[0,tn]}.$$

利用引理 1 可得

$$|p_n'(1-\frac{x}{n})^n| \le |p_n(x)(1-\frac{x}{n})^{n-1}| + \frac{8n}{t}\|p_n(x)e^{-x}\|_{[0,\infty)}.$$

在上式中令 $x = 0, t = 1.275$, 并注意显然的不等式 $|p_n(0)| \le \|p_n(x)e^{-x}\|_{[0,\infty)}$ 可得

$$|p_n'(0)| \le (\frac{8n}{t}+1)\|p_n(x)e^{-x}\|_{[0,\infty)} \le (6.3n+1)\|p_n(x)e^{-x}\|_{[0,\infty)}.$$

现令 $r_n(x) = p_n(x+y)$ 且 $y \in [0,\infty)$ 是固定的数, 我们有

$$\begin{aligned}|p'(y)e^{-y}| = |r_n'(0)e^{-y}| &\le e^{-y}(6.3n+1) \max_{x\in[0,\infty)} |r_n(x)e^{-x}| \\ &\le (6.3n+1) \max_{x\in[0,\infty)} |p_n(x+y)e^{-(x+y)}| \le (6.3n+1) \max_{x\in[0,\infty)} |p_n(x)e^{-x}|.\end{aligned}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

由 y 的任意性，定理得证.

定理 2 设 $p_n(x)\in H_n$ 是奇函数或偶函数，则

$$\|p_n'(x)e^{-x}\|_{[0,\infty)}\le(1.8+7n^{\frac{1}{2}})\|p_n(x)e^{-x}\|_{[0,\infty)}. \tag{2}$$

证明 将 Bernstein 不等式

$$|p_n'(x)|<\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\|p_n(x)\|_{[-1,1]},\quad x\in(-1,1)$$

作变量平移变换可得

$$|p_n'(x)\sqrt{x(n-x)}|\le n\|p_n(x)\|_{[0,n]},\quad x\in[0,n].$$

令 $q(x)=p_n(x)(1-\frac{x}{n})^n$, 并注意到 $q(x)$ 是 $2n$ 次多项式可得

$$|q'(x)\sqrt{x(n-x)}|\le 2n\|p_n(x)(1-\frac{x}{n})^n\|_{[0,n]}.$$

利用 $|q'(x)\sqrt{x(n-x)}|=\left|\left[p_n'(x)(1-\frac{x}{n})^n-p_n(x)(1-\frac{x}{n})^{n-1}\right]\sqrt{x(n-x)}\right|$, 可得

$$\left|p_n'(x)(1-\frac{x}{n})^n\sqrt{x(n-x)}\right|\le\left|p_n(x)(1-\frac{x}{n})^{n-1}\sqrt{x(n-x)}\right|+2n\left\|p_n(x)(1-\frac{x}{n})^n\right\|_{[0,n]}.$$

利用引理 1 及显然的不等式 $|p_n(x)|\le e^x\|p_n(x)e^{-x}\|_{[0,\infty)}$ 可得

$$|p_n'(x)|\le\left(\frac{n}{n-x}e^x+\frac{2n}{(1-\frac{x}{n})^n\sqrt{x(n-x)}}\right)\|p_n(x)e^{-x}\|_{[0,\infty)},\quad x\in(0,n).$$

现令 $r_n(x)=p_n(x+y-t)$ 且 $y\in[0,\infty)$ 是固定的数， $t\in(0,n)$, 则有

$$\begin{aligned}|p_n'(y)e^{-y}|=|r_n'(t)e^{-y}|&\le\left(\frac{n}{n-t}e^t+\frac{2n}{(1-\frac{t}{n})^n\sqrt{t(n-t)}}\right)\max_{x\in[0,\infty)}|r_n(x)e^{-x}|e^{-y}\\&=\left(\frac{n}{n-t}e^t+\frac{2n}{(1-\frac{t}{n})^n\sqrt{t(n-t)}}\right)\max_{x\in[0,\infty)}|p_n(x+y-t)e^{-(x+y-t)}|e^{-t}\\&\le\left(\frac{n}{n-t}e^t+\frac{2n}{(1-\frac{t}{n})^n\sqrt{t(n-t)}}\right)\max_{x\in[-t,\infty)}|p_n(x)e^{-x}|e^{t}.\end{aligned}$$

利用引理 2 得

$$|p_n'(y)e^{-y}|\le\left(\frac{n}{n-t}e^t+\frac{2n}{(1-\frac{t}{n})^n\sqrt{t(n-t)}}\right)e^t\max_{x\in[0,\infty)}|p_n(x)e^{-x}|. \tag{3}$$

令 $f(t)=(\frac{n}{n-t}e^t+\frac{2n}{(1-\frac{t}{n})^n\sqrt{t(n-t)}})e^t$, $t\in(0,n)$, 可以估计函数 $f(t),t\in(0,n)$ 在 $t=\frac{1}{4}$ 处有较小的函数值，下面我们就来估计 $f(t)$ 在 $t=\frac{1}{4}$ 处的值.

$$f(\frac{1}{4})=e^{\frac{1}{4}}\left\{\frac{n}{n-\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{4}}+\frac{2n}{(1-\frac{1}{4n})^n\sqrt{\frac{1}{4}(n-\frac{1}{4})}}\right\}=\frac{n}{n-\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{2}}+\frac{2ne^{\frac{1}{4}}}{(1-\frac{1}{4n})^n\sqrt{\frac{1}{4}(n-\frac{1}{4})}}.$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

当 $n\geq 3$ 时，我们有

$$\frac{n}{n-\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{2}}\leq \frac{12}{11}e^{\frac{1}{2}}<1.8,$$

$$\frac{2ne^{\frac{1}{4}}}{(1-\frac{1}{4n})^n\sqrt{\frac{1}{4}(n-\frac{1}{4})}}=\frac{4n^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}}}{(\frac{4n-1}{4n})^n(1-\frac{1}{4n})^{\frac{1}{2}}}=4n^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}}(1+\frac{1}{4n-1})^{n+\frac{1}{2}}<7n^{\frac{1}{2}}.$$

于是可得

$$f(\frac{1}{4})<1.8+7n^{\frac{1}{2}}.$$

注意到不等式 (3) 对任意 $t\in(0,n)$ 都成立及 y 的任意性，我们立即得当 $n\geq 3$ 时式 (2) 成立. 当 $n=1,2$ 时，可直接计算得比式 (2) 更优的估计式，我们略去细节，这样定理获证.

注 如能求出 $f(t)$ 的最小值，则不等式 (2) 可获得稍好的估计，遗憾的是我们难以求出这最小值. 当然当 n 较大时 (2) 中常数可以改得小一些，但这不是主要的，关键的是 n 的幂次 $\frac{1}{2}$ 能否改小.

参考文献:

[1] SZEGÖ G. *On some problems of approximation* [J]. Magyar Tud. Akad. Mat. Int. Közl., 1964, **9**: 3–9.

[2] ERDELYI T. *Weighted markov-type estimates for the derivatives of constrained polynomials on* $[0,\infty)$ [J]. J. Approx. Theory, 1989, **58**: 213–231.

[3] BORWEIN P B, ERDELYI T. *Polynomials and Polynomial Inequalities* [M]. Beijing World Publishing Corporation, 1995.

[4] 章仁江. 关于 L^2 空间中的 Bernstein-Markov 不等式 [J]. 高校应用数学学报 (A 辑), 2000, **15**(3): 289–294.
ZHANG Ren-jiang. *The Bernstein-Markov inequalities in* L^2 *space* [J]. Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser.A, 2000, **15**(3): 289–294. (in Chinese)

On Szegö's Inequality

ZHANG Ren-jiang[1], *KONG Wei-jie*[2]

(1. Dept. of Math., China Institute of Metrology, Hangzhou 310034, China;
2. School of Economics, Zhejiang University, Hangzhou 310028, China)

Abstract: Let $p_n(x)$ be the space of algebraic polynomials with degree at most n. This paper obatins

$$\|p_n'(x)e^{-x}\|_{[0,\infty]}\leq(6.3n+1)\|p_n(x)e^{-x}\|_{[0,\infty]};$$

If moreover $p_n(x)$ is even or odd function, then

$$\|p_n'(x)e^{-x}\|_{[0,\infty]}\leq(1.8+7n^{\frac{1}{2}})\|p_n(x)e^{-x}\|_{[0,\infty]}.$$

Key words: algebraic polynomial; Bernstein-Markov inequality; weight.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.