第12卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 12 No. 3
1992年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1992

关于非自治离散周期系统的周期解问题*

赵杰民
(新疆大学数学系，乌鲁木齐 830046)

在医学、生物学、经济学以及人口学等许多学科中，由于统计得到的各方面数据是以均匀间隔周期记录的，因此，所建立的许多数学模型是用离散系统来描述的，离散系统的研究愈来愈受到人们的重视，而实际问题当中出现的离散系统往往受到环境、季节等周期性的影响，所以，对离散周期系统的周期解研究是非常必要的[1][2][3]. 本文研究了非自治离散周期系统的周期解问题，得到了一些新结论.

考虑非自治离散系统

$$x(n+1)=f(n,x(n)),\tag{1}$$

设 Z 为整数集合，$f:Z\times R^m\to R^m$ 为连续映射，并且，对所有的 $(n,x)\in Z\times R^m$，有某整数 $k>1$ 使得 $f(n+k,x)=f(n,x)$. 这时，系统(1)称为离散周期系统[3]. 用 $x(n,n_0,x_0)$ 表示系统(1)满足初始值 $x(n_0)=x_0$ 的唯一解，并且对初始值 x_0 是连续的，$n\geqslant n_0$，这里的 n_0 为某一整数.

定义 1　对于系统(1)的解 $x(n,n_0,x_0)$，如果满足

$$x(n+k,n_0,x_0)=x(n,n_0,x_0),\ n\geqslant n_0,$$

则称 $x(n,n_0,x_0)$ 为系统(1)的一个 k-周期解.

不失一般性，我们假设初始时刻 $n_0=0$，将系统(1)满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的解，记作 $x(n,x_0)=x(n,0,x_0)$.

定义 2　设 X 是距离空间. $\varphi:X\to E^1$ 是 X 上的实值泛函，我们称 $\varphi:\mathscr{D}(\varphi)\subset X\to E^1$ 在 $x_0\in\mathscr{D}(\varphi)$ 是下半连续的，是指对任何 $x_n\to x_0, x_n\in\mathscr{D}(\varphi)$，都有 $\varphi(x_0)\leqslant\varliminf\limits_{n}\varphi(x_n)$.

此定义等价于[4]：对任何 $x_n\to x_0$，$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathscr{D}(\varphi)$ 且 $\varphi(x_n)\to\beta$，必有 $\varphi(x_0)\leqslant\beta$.

由文[4] p 52定理 1.3、文[5] p 248定理 14 及其注释，我们有下面的引理 1 成立.

引理 1　设 X 为完备距离空间，算子 $T:X\to X$. 假定存在下方有界的下半连续泛函 $\varphi:X\to E^1$ 满足

$$a\rho(x,Tx)\leqslant\varphi(x)-\varphi(Tx),\quad\forall\, x\in X,$$

其中 a 为正常数，则 T 至少有一不动点.

定理 1　如果系统(1)是离散 k-周期系统，且存在正常数 a 和下方有界的下半连续泛函 $\varphi:R^m\to R^1$ 满足

* 1990年9月27日收到.

$$\alpha \| x_0 - x(k,x_0) \| \leqslant \varphi(x_0) - \varphi(x(k,x_0)), \quad \forall\, x_0 \in R^m,$$

则系统(1)至少有一个 k-周期解.

证明 令 $R^m = X, R^1 = E^1$. 在相空间 R^m 上定义 Poincaić 映射[3] $Tx_0 = x(k,x_0)$,其中 x_0 为相空间 R^m 中的任意一点,$x(n,x_0)$为系统(1)满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的解. 根据引理 1,则 T 至少有一不动点 x^*:$Tx^* = x^*$,即 $x(k,x^*) = x^*$,所以,系统(1)至少有一个 k-周期解 $x(n,x^*)$,$n \geqslant 0$. 证毕.

推论 1 如果系统(1)是离散 k-周期系统,且存在正常数 α、β、γ 和非负整数 N、M 使得对于系统(1)的任意一个解 $x(n,x_0)$都有

$$\alpha \| x_0 - x(k,x_0) \| \leqslant \beta \| x(Nk,x_0) - x(Mk,x_0) \|^{\gamma} - \beta \| x((N+1)k,x_0) - x((M+1)k,x_0) \|^{\gamma}, \quad \forall\, x_0 \in R^m$$

成立,则系统(1)至少有一个 k-周期解.

证明 设 x_0 为相空间 R^m 中任何一点,我们定义 $\varphi: R^m \to R^1$ 为 $\varphi(x_0) = \beta \| x(Nk,x_0) - x(Mk,x_0) \|^{\gamma}$,则 φ 为下方有界的下半连续泛函,于是有

$$\alpha \| x_0 - x(k,x_0) \| \leqslant \varphi(x_0) - \varphi(x(k,x_0)), \quad \forall\, x_0 \in R^m$$

成立,根据定理 1 即得推论 1 成立.

推论 2 如果系统(1)是离散 k-周期系统,且存在正常数 α、β、γ 和非负整数 N 使得对于系统(1)的任意一个解 $x(n,x_0)$都有

$$\alpha \| x_0 - x(k,x_0) \| \leqslant \beta \| x(Nk,x_0) \|^{\gamma} - \beta \| x((N+1)k,x_0) \|^{\gamma}, \quad \forall\, x_0 \in R^m$$

成立,则系统(1)至少有一个 k-周期解.

证明 设 x_0 为相空间 R^m 中任意一点,我们定义 $\varphi: R^m \to R^1$ 为 $\varphi(x_0) = \beta \| x(Nk,x_0) \|^{\gamma}$,则 φ 为下方有界的下半连续泛函,且有

$$\alpha \| x_0 - x(k,x_0) \| \leqslant \varphi(x_0) - \varphi(x(k,x_0)), \quad \forall\, x_0 \in R^m$$

成立,根据定理 1 即得推论 2 成立. 证毕.

定理 2 如果系统(1)是离散 k-周期系统,且存在一个自然数 N 使得对于系统(1)的任意两个解 $x(n,x_0)$,$y(n,y_0)$都有

$$\| x(Nk,x_0) - y(Nk,y_0) \| \leqslant c \| x_0 - y_0 \|, \quad \forall\, x_0, y_0 \in R^m$$

成立,其中 $c = \mathrm{const} \in [0,1]$,则系统(1)存在唯一的 k-周期解.

证明 取 $y_0 = x(Nk,x_0)$,则有

$$\begin{aligned} \| x(Nk,x_0) - y(Nk,y_0) \| &= \| x(Nk,x_0) - x(2Nk,x_0) \| \\ &\leqslant c \| x_0 - y_0 \| = c \| x_0 - x(Nk,x_0) \|, \end{aligned}$$

即

$$-c \| x_0 - x(Nk,x_0) \| \leqslant - \| x(Nk,x_0) - x(2Nk,x_0) \|,$$

所以下面的不等式对任意的 $x_0 \in R^m$ 都成立

$$\| x_0 - x(Nk,x_0) \| \leqslant \frac{1}{1-c} \| x_0 - x(Nk,x_0) \| - \frac{1}{1-c} \| x(Nk,x_0) - x(zNk,x_0) \|.$$

取 $\varphi(x_0) = \frac{1}{1-c} \| x_0 - x(Nk,x_0) \|$,记 $\mathscr{T} = T^N$,其中 T 同定理 1 为 Poincaić 映射,则有

$$\rho(x_0, \mathscr{T} x_0) \leqslant \varphi(x_0) - \varphi(\mathscr{T} x_0), \quad \forall\, x_0 \in R^m.$$

由引理 1 知 $\mathscr{T}$ 有不动点 x^*. 如果 $\mathscr{T}$ 还有一个不动点 y^*，则有

$$\|\mathscr{T}x^* - \mathscr{T}y^*\| = \|x^* - y^*\| = \|x(Nk,x^*) - y(Nk,y^*)\| \leqslant c\|x^* - y^*\|$$

故 $x^*=y^*$，即 $\mathscr{T}$ 有唯一的不动点 x^*. 由于 $\mathscr{T}(Tx^*)=T(\mathscr{T}x^*)=Tx^*$，即 Tx^* 也是 $\mathscr{T}$ 的不动点，由 $\mathscr{T}$ 的不动点的唯一性得出 $Tx^*=x^*$ 所以系统(1)存在唯一的 k-周期解. 证毕.

定理 2 还可以用 Banach 压缩映象原理证明.

推论 3 设系统(1)是离散 k-周期系统. 如果 $f(n,x)$ 关于 x 的偏导数在 R^m 上存在，且存在一个自然数 N 使得

$$\left\| \prod_{i=1}^{Nk} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(Nk-i,\xi_{11}^{(i)})}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1(Nk-i,\xi_{1m}^{(i)})}{\partial x_m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_m(Nk-i,\xi_{m1}^{(i)})}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m(Nk-i,\xi_{mm}^{(i)})}{\partial x_m} \end{pmatrix} \right\| \leqslant c = \text{const} < 1$$

对任意的 $\xi_{js}^{(i)} \in R^m (i=1,2,\cdots,NK; j,s=1,2,\cdots,m)$ 都成立，则系统(1)存在唯一的 k-周期解.

证明 设 $x(n,x_0), y(n,y_0)$ 为系统(1)的任意两个解，由中值定理知必存在 $P_{js}^{(i)} \in R^m (i=1, 2,\cdots,NK; j,s=1,2,\cdots,m)$ 使得

$$\|x(Nk,x_0) - y(Nk,y_0)\| = \|f(Nk-1,x(Nk-1,x_0)) - f(Nk-1,y(Nk-1,y_0))\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(Nk-i,P_{11}^{(1)})}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1(Nk-i,P_{1m}^{(1)})}{\partial x_m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_m(Nk-1,P_{m1}^{(1)})}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m(Nk-1,P_{mm}^{(1)})}{\partial x_m} \end{pmatrix} (x(Nk-1,x_0) - y(Nk-1,y_0)) \right\|$$

$$= \cdots = \left\| \left[\prod_{i=1}^{Nk} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(Nk-i,P_{11}^{(i)})}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1(Nk-i,P_{1m}^{(i)})}{\partial x_m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_m(Nk-i,P_{m1}^{(i)})}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m(Nk-i,P_{mm}^{(i)})}{\partial x_m} \end{pmatrix} \right] (x_0 - y_0) \right\|,$$

所以我们有

$$\|x(Nk,x_0) - y(Nk,y_0)\| \leqslant c\|x_0 - y_0\|, \quad \forall\, x_0,y_0 \in R^m$$

成立，根据定理知 2 知系统(1)存在唯一的 k-周期解. 证毕.

推论 4 如果系统(1)是离散 k-周期系统，并且满足

1)存在一个自然数 M 以及 $g:\{Z_+\backslash\{0,1,2,\cdots,M-1\}\}\times R^m\times R^m \to R_+^1$，使得当 $n\geqslant M$ 时对于系统(1)的任意两个解 $x(n,x_0), y(n,y_0)$ 都有

$$\|x(n,x_0) - y(n,y_0)\| \leqslant g(n,x_0,y_0)\|x_0 - y_0\|, \quad \forall\, x_0,y_0 \in R^m$$

成立；

2)存在一个自然数 $N\geqslant M$ 使得

$$g(Nk,x_0,y_0) \leqslant c = \text{const} < 1, \quad \forall\, x_0,y_0 \in R^m$$

成立. 则系统(1)存在唯一的 k-周期解.

证明 由于

$$\| x(Nk,x_0)-y(Nk,y_0)\| \leqslant g(Nk,x_0,y_0)\|x_0-y_0\|$$
$$\leqslant c\|x_0-y_0\|, \quad \forall x_0,y_0\in R^m.$$

根据定理 2 知系统(1)存在唯一的 k-周期解. 证毕

推论 5 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)'\in R^m$, $f(n,x)=(f_1(n,x),\cdots,f_m(n,x))'$. 如果系统(1)是离散 k-周期系统,并且存在一个自然数 N 满足

1) $f(s,x)$ 的 Jacobi 矩阵

$$f_x(s,x)=\left(\frac{\partial f_i(s,x)}{\partial x_j}\right)_{m\times m} (s=0,1,\cdots,Nk-1;i,j=1,2,\cdots,m)$$

关于变元 x 是连续的;

2)存在 $M_s: Z_+^*\times R^m\times R^m\rightarrow R_+^1$ $(s=0,1,\cdots,Nk-1)$ 使得对于系统(1)的任意两个解 $x(n,x_0)$, $y(n,y_0)$ 都有

$$\int_0^1 \| f_x(s,tx(s,x_0)+(1-t)y(s,y_0)\| dt\leqslant M_s(s,x(s,x_0),y(s,y_0))$$

成立,其中 $Z_+^*=\{0,1,2,\cdots,Nk-1\}$, $s=0,1,\cdots,Nk-1$;

3)对于所有的 $(x_0,y_0)\in R^m\times R^m$ 都有

$$\prod_{s=0}^{Nk-1} M_s(s,x(s,x_0),y(s,y_0))\leqslant c=\text{const}<1$$

成立. 则系统(1)存在唯一的 k-周期解.

证明 令 $\mu(n)=x(n,x_0)-y(n,y_0)$,则有

$$\mu(0)=x(0,x_0)-y(0,y_0)=x_0-y_0,$$
$$\mu(s+1)=\int_0^1 f_x(s,tx(s,x_0)+(1-t)y(s,y_0))\mu(s)dt.$$

于是有

$$\begin{aligned}\|\mu(Nk)\| &\leqslant \int_0^1 \| f_x(Nk-1,tx(Nk-1,x_0)+(1-t)y(Nk-1,y_0))\| \, \|\mu(Nk-1)\| dt\\ &\leqslant M_{Nk-1}(Nk-1,x(Nk-1,x_0),y(Nk-1,y_0))\|\mu(Nk-1)\leqslant\cdots\\ &\leqslant [\prod_{s=0}^{Nk-1} M_s(s,x(s,x_0),y(s,y_0))]\|\mu(0)\| \leqslant c\|\mu(0)\|.\end{aligned}$$

即有

$$\| x(Nk,x_0)-y(Nk,y_0)\| \leqslant c\|x_0-y_0\|. \quad \forall x_0,y_0\in R^m$$

根据定理 2 知系统(1)存在唯一的 k-周期解. 证毕.

考虑线性时变系统

$$x(n+1)=A(n)x(n)+b(n), \tag{2}$$

其中 $A: Z_+\rightarrow R^{m\times m}$,且 $A=(n+k)=A(n)$; $b: Z_+\rightarrow R^m$,且 $b(n+k)=b(n)$. k 为某大于 1 的整数. 记 $\Phi(n,r)=A(n-1)\cdots A(r)=(\prod_{i=r}^{n-1}A'(i))'$, $n\geqslant r+1$; $\Phi(n,0)=A(n-1)\cdots A(0)=(\prod_{i=0}^{n-1}A'(i))'$, $n\geqslant 1$; $\Phi(n,n)=I$ (单位矩阵), $n\geqslant 0$; 规定 $\sum_{i=1}^{-1}\triangleq 0$.

推论 6 如果存在一个自然数 N,使得

$$\|\prod_{i=0}^{Nk-1}A'(i))'\| \leqslant c=\text{const}<1,$$

则线性离散 k-周期系统(2)存在唯一的 k-周期解.

证明 设 $x(n,x_0),y(n,y_0)$ 为系统(2)的任意两个解,则有

$$\|x(Nk,x_0)-y(Nk,y_0)\| = \|\prod_{i=0}^{Nk-1}A'(i))'(x_0-y_0)\|$$
$$\leqslant c\|x_0-y_0\|,\quad \forall\, x_0,y_0\in R^m.$$

根据定理 2 知系统(2)存在唯一的 k-周期解. 证毕.

注[3] 线性离散 k-周期系统(2)存在唯一的 k-周期解的充分必要条件为

$$\det[I-(\prod_{i=0}^{k-1}A'(i))']\neq 0.$$

事实上,系统(2)存在唯一的 k-周期解的充分必要条件为

$$x_0=x(k,x_0)=\Phi(k,0)x_0+\sum_{i=0}^{k-1}\Phi(k,i+1)b(i)$$

能唯一的确定 x_0 亦即

$$[I-\Phi(k,0)]x_0=\sum_{i=0}^{k-1}\Phi(k,i+1)b(i)$$

能唯一的确定 x_0 此等价于 $\det[I-(\prod_{i=0}^{k-1}A'(i))']\neq 0$.

下面考虑带强迫项的离散系统

$$x(n+1)=A(n)x(n)+h(n,x(n)),\tag{3}$$

其中强迫项 $h:Z_+\times R^m\to R^m$ 连续,且 $h(n+k,x)=h(n,x)$;$A:Z_+\to R^{m\times m}$ 且 $A(n+k)=A(n)$,Z_+,k 为某大于 1 的整数.

推论 7 如果存在一个自然数 N,记 $Z^*=\{0,1,2,\cdots,Nk-1\}$,满足条件

1)存在常数 a_i 使得 $\|A(i)\|\leqslant a_i,\ i\in Z^*$;

2)存在 $b:Z^*\times R^m\times R^m\to R^1_+$ 使得对于系统(3)的任意两个解 $x(n,x_0),y(n,y_0)$ 都有

$$\|h(i,x(i,x_0))-h(i,y(i,y_0))\|\leqslant b(i,x(i,x_0),y(i,y_0))\|x(i,x_0)-y(i,y_0)\|,\quad i\in Z^*$$

成立;

3)对一切 $(x_0,y_0)\in R^m\times R^m$ 都有

$$\prod_{i=0}^{Nk-1}(a_i+b(i,x(i,x_0),y(i,y_0)))\leqslant c=\text{const}<1$$

成立.

则系统(3)存在唯一的 k-周期解.

证明 记 $\mu(n)=x(n,x_0)-y(n,y_0)$,则有

$$\mu(0)=x(0,x_0)-y(0,y_0)=x_0-y_0,$$
$$\mu(n)=\Phi(n,0)\mu(0)+\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(n,i+1)[h(i,x(i,x_0))-h(i,y(i,y_0))].$$

于是我们有

$$\|x(Nk,x_0)-y(Nk,y_0)\|=\|\mu(Nk)\|=\|\Phi(Nk,0)\mu(0)+\sum_{i=0}^{Nk-1}\Phi(Nk,i+1)[h(i,x(i,x_0))-h(i,y(i,y_0))]\|=\|A(Nk-1)[\Phi(Nk-1,0)\mu(0)+\sum_{i=1}^{Nk-2}\Phi(Nk-1,i+1)[h(i,x(i,x_0))$$

$-h(i,y(i,y_0))]] + [h(Nk-1,x(Nk-1,x_0)) - h(Nk-1,y(Nk-1,y_0))] \| \leqslant a_{Nk-1} \| \mu(Nk-1) \| + b(Nk-1,x(Nk-1,x_0),y(Nk-1,y_0)) \| \mu(Nk-1) \| = [a_{Nk-1} + b(Nk-1,x(Nk-1,x_0),y(Nk-1,y_0))] \| \mu(Nk-1) \| \leqslant \cdots \leqslant [\prod_{i=1}^{Nk-1}(a_i + b(i,x(i,x_0),y(i,y_0)))] \| \mu(0) \| \leqslant c \| x_0 - y_0 \|$.

根据定理 2 知系统(3)存在唯一的 k-周期解. 证毕.

参 考 文 献

[1] 王联、王慕秋，常差分方程，新疆大学出版社(待出版).

[2] 王慕秋、王联、崔学伟，离散大系统在结构扰动下周期解的存在性，数学研究与评论，第八卷，4(1988)，559—566.

[3] 李黎明，王慕秋，非自治离散周期系统的周期解，系统数学与数学，10(2)(1990)，131—136.

[4] 赵义纯，非线性泛函分析及其应用，高等教育出版社，1989 年.

[5] Jean—Pieiie Aulin, Ivar Ekeland, Functional analysis. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1984.

On the Periodic Solution Problems of Nonautonomous Discrete Periodic Systems

Zhao Jiemin

(Xinjiang University, Urumqi, China)

Abstract

In this paper, we study the periodic solution of nonautonomous discrete periodic systems. Some new results are obtained by applying the generalized Caristi fixed-point theorem.