第16卷第1期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 1
1996年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1996

局部对称共形平坦黎曼流形中的紧致子流形*

徐兆棣

(沈阳师范学院数学系, 110031)

摘 要 本文讨论局部对称共形平坦黎曼流形中紧子流形问题. 改进了[1]的结果并将[2]中关于球面子流形的一个结果推广到局部对称共形平坦黎曼流形子流形.

关键词 局部对称, 共形平坦, 平行平均曲率向量场, 平坦法丛.

分类号 AMS(1991) 53B25/CCL O186.16

§1 引 言

设 M^n 是浸入在 $n+p$ 维局部对称共形平坦黎曼流形 N^{n+p} 中的 n 维紧致子流形. S、H 分别表示 M^n 的第二基本形式长度的平方与 M^n 的平均曲率, T_c, t_c 分别表示 N^{n+p} 的 Ricci 曲率的上、下确界, K 表示 N^{n+p} 的数量曲率.

孙华飞在[1]中证明了

定理 A 设 M^n 是局部对称共形平坦黎曼流形 N^{n+p} $(p>1)$ 中具有平行平均曲率向量的紧致子流形, 如果

$$S\leqslant\max\left\{\frac{2nH^2}{\sqrt{n}+1}+\frac{n}{(\sqrt{n}+1)(n+p-2)}\left(3t_c-T_c-\frac{K}{n+p-1}\right),\right.$$
$$\left.\frac{nH^2}{\sqrt{n-1}+1}+\frac{n}{(\sqrt{n-1}+1)(n+p-2)}\left(3t_c-T_c-\frac{K}{n+p-1}\right)\right\},$$

则 M^n 位于 N^{n+p} 的全测地子流形 N^{n+1} 中.

本文得到

定理 1 设 M^n 是局部对称共形平坦黎曼流形 N^{n+p} $(p>1)$ 中具有平行平均曲率向量的紧致子流形, 如果

$$S\leqslant\min\left\{\frac{\sqrt{2}n}{\sqrt{n+3}(n+p-2)}\left(3t_c-T_c-\frac{K}{n+p-1}\right),\frac{n}{(2-\frac{1}{p})(n+p-2)}\left(3t_c-T_c-\frac{K}{n+p-1}\right)\right\},$$

则 M^n 位于 N^{n+p} 的一个全测地子流形 N^{n+1} 中.

与定理 A 相比较, 定理 1 中 S 所满足的条件中除子流形的维数外, 其余均为仅与外围空间有关的量.

此外, 还将[2]中关于球面子流形的一个结果(见[2]的定理 5)推广到局部对称共形平坦

* 1993年3月15日收到.

黎曼流形子流形. 得到

定理 2 设 M^n 是局部对称共形平坦黎曼流形 N^{n+p} 中的紧致极小子流形且 M^n 的法丛是平坦的. 若 $S<\frac{n}{n+p-2}(3t_c-T_c-\frac{K}{n+p-1})$, 则 M^n 是全测地子流形.

§2 预备知识

在 N^{n+p} 中选取局部正交标架场 $e_1,\cdots,e_{n+p}$, 使得限制在 M^n 上时, $e_1,\cdots,e_n$ 是 M^n 的切向量场. 令 $\omega_1,\cdots,\omega_{n+p}$ 为其对偶标架场, 并约定指标的取值范围为

$$1\leqslant A,B,C,\cdots\leqslant n+p;\quad 1\leqslant i,j,k,\cdots\leqslant n;\quad n+1\leqslant \alpha,\beta,\gamma,\cdots\leqslant n+p,$$

则 N^{n+p} 的结构方程为

$$d\omega_A=-\sum_B\omega_{AB}\wedge\omega_B,\quad \omega_{AB}+\omega_{BA}=0, \tag{2.1}$$

$$d\omega_{AB}=-\sum_C\omega_{AC}\wedge\omega_{CB}+\frac{1}{2}\sum_{C,D}K_{ABCD}\omega_C\wedge\omega_D. \tag{2.2}$$

因为 N^{n+p} 是共形平坦的, 所以

$$\begin{aligned}K_{ABCD}=&\frac{1}{n+p-2}(\delta_{AC}K_{BD}-\delta_{AD}K_{BC}+K_{AC}\delta_{BD}-K_{AD}\delta_{BC})\\&-\frac{K}{(n+p-2)(n+p-1)}(\delta_{AC}\delta_{BD}-\delta_{AD}\delta_{BC}),\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $K_{AB}=\sum_C K_{ACBC}$, $K=\sum_A K_{AA}$.

限制在 M^n 上有

$$\omega_\alpha=0,\quad \omega_{\alpha i}=\sum_j h^\alpha_{ij}\omega_j,\quad h^\alpha_{ij}=h^\alpha_{ji}, \tag{2.4}$$

$$d\omega_{ij}=-\sum_k\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}+\frac{1}{2}\sum_{k,l}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l, \tag{2.5}$$

$$d\omega_{\alpha\beta}=-\sum_\gamma\omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_{\gamma\beta}+\frac{1}{2}\sum_{j,k}R_{\alpha\beta jk}\omega_j\wedge\omega_k, \tag{2.6}$$

其中

$$R_{ijkl}=K_{ijkl}+\sum_\alpha(h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl}-h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk}), \tag{2.7}$$

$$R_{\alpha\beta jk}=K_{\alpha\beta jk}+\sum_i(h^\alpha_{ji}h^\beta_{ik}-h^\beta_{ji}h^\alpha_{ik}). \tag{2.8}$$

以上各式中 h^α_{ij} 是 M^n 的第二基本形式 $\sum_{i,j,\alpha}h^\alpha_{ij}\omega_i\omega_je_\alpha$ 的系数. M^n 的平均曲率向量为 $\frac{1}{n}\sum_{i,\alpha}h^\alpha_{ii}e_\alpha$.

令 H_α 表示矩阵 (h_{ij}), 则 $S=\sum_{i,j,k}(h^\alpha_{ij})^2=\sum_\alpha \mathrm{tr}(H^2_\alpha)$.

选取 e_{n+1} 与平均曲率向量方向一致, 则

$$\sum_i h^{n+1}_{ii}=\mathrm{tr}(H_{n+1})=nH, \tag{2.9}$$

$$\sum_i h^\alpha_{ii}=\mathrm{tr}(H_\alpha)=0\quad(\alpha\neq n+1). \tag{2.10}$$

又 N^{n+p}是局部对称的，所以[3]

$$K_{\alpha ijkl}=\sum_{\beta}K_{\alpha\beta jk}h^{\beta}_{il}+\sum_{\beta}K_{\alpha i\beta k}h^{\beta}_{jl}+\sum_{\beta}K_{\alpha ij\beta}h^{\beta}_{kl}-\sum_{m}K_{mijk}h^{\alpha}_{ml}. \tag{2.11}$$

分别定义 h^{α}_{ijk}与 h^{α}_{ijkl}如下[3]：

$$\sum_{k}h^{\alpha}_{ijk}\omega_k=dh^{\alpha}_{ij}-\sum_{m}h^{\alpha}_{mj}\omega_{mi}-\sum_{m}h^{\alpha}_{im}\omega_{mj}+\sum_{\beta}h^{\beta}_{ij}\omega_{\alpha\beta}, \tag{2.12}$$

$$\sum_{l}h^{\alpha}_{ijkl}\omega_l=dh^{\alpha}_{ijk}-\sum_{m}h^{\alpha}_{mjk}\omega_{mi}-\sum_{m}h^{\alpha}_{imk}\omega_{mj}-\sum_{m}h^{\alpha}_{ijm}\omega_{mk}+\sum_{\beta}h^{\beta}_{ijk}\omega_{\alpha\beta}. \tag{2.13}$$

§3 定理的证明

定理 1 的证明 由假设条件，e_{n+1}在法丛中平行，所以[3]

$$\omega_{n+1,\alpha}=0. \tag{3.1}$$

关于(3.1)外微分，由(2.6)和(3.1)即得

$$R_{n+1,\alpha jk}=0. \tag{3.2}$$

再由(2.3)和(2.8)易知(3.2)等价于

$$H_{n+1}H_{\alpha}=H_{\alpha}H_{n+1}. \tag{3.3}$$

根据(2.3)，(2.7)，(2.8)和(3.2)，通过计算易得[1]

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i,j\\ \alpha\neq n+1}}h^{\alpha}_{ij}\Delta h^{\alpha}_{ij}=&\,2\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}[\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})^2-\mathrm{tr}(H^2_{\alpha}H^2_{\beta})]-\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}[\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})]^2\\ &+nH\sum_{\alpha\neq n+1}\mathrm{tr}(H^2_{\alpha}H_{n+1}-\sum_{\alpha\neq n+1}[\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{n+1})]^2\\ &-\frac{n}{n+p-2}\sum_{\substack{i,j,\beta\\ \alpha\neq n+1}}h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ij}K_{\alpha\beta}+\frac{1}{n+p-2}(\sum_{j}K_{jj}-\frac{nK}{n+p-1})\sum_{\alpha\neq n+1}\mathrm{tr}(H^2_{\alpha})\\ &+\frac{2n}{n+p-2}\sum_{\substack{i,j,k\\ \alpha\neq n+1}}h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{ki}K_{kj}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

参照[4]和[1]的计算有

$$nH\sum_{\alpha\neq n+1}\mathrm{tr}(H^2_{\alpha}H_{n+1})-\sum_{\alpha\neq n+1}[\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{n+1})]^2\geqslant-\sqrt{\frac{n+3}{2}}[\mathrm{tr}(H^2_{n+1})]\sum_{\alpha\neq n+1}\mathrm{tr}(H^2_{\alpha}), \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}&2\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}[\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})^2-\mathrm{tr}(H^2_{\alpha}H^2_{\beta})]-\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}[\mathrm{tr}(H_{\alpha}H_{\beta})]^2\\ &\geqslant(\frac{1}{p-1}-2)[\sum_{\alpha\neq n+1}\mathrm{tr}(H^2_{\alpha})]^2\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$-\frac{n}{n+p-2}\sum_{\substack{i,j,\beta\\ \alpha\neq n+1}}h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ij}K_{\alpha\beta}\geqslant-\frac{n}{n+p-2}T_c\sum_{\alpha\neq n+1}\mathrm{tr}(H^2_{\alpha}), \tag{3.7}$$

$$-\frac{2n}{n+p-2}\sum_{\substack{i,j,k\\ \alpha\neq n+1}}h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{ki}K_{kj}\geqslant-\frac{2n}{n+p-2}t_c\sum_{\alpha\neq n+1}\mathrm{tr}(H^2_{\alpha}). \tag{3.8}$$

将(3.5)—(3.8)代入(3.4)得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i,j\\ \alpha\neq n+1}} h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} \geqslant & \left(\frac{1}{p-1}-2\right)\Big[\sum_{\alpha\neq n+1}[\operatorname{tr}(H_{\alpha}^{2})]^{2}-\sqrt{\frac{n+3}{2}}[\operatorname{tr}(H_{n+1}^{2})]\Big]\sum_{\alpha\neq n+1}\operatorname{tr}(H_{\alpha}^{2}) \\ & -\frac{n}{n+p-2}T_{c}\sum_{\alpha\neq n+1}\operatorname{tr}(H_{\alpha}^{2})+\frac{n}{n+p-2}\left(t_{c}-\frac{K}{n+p-1}\right)\sum_{\alpha\neq n+1}\operatorname{tr}(H_{\alpha}^{2}) \\ & +\frac{2n}{n+p-2}t_{c}\sum_{\alpha\neq n+1}\operatorname{tr}(H_{\alpha}^{2}) \\ \geqslant & \Big[-MS+\frac{n}{n+p-2}\left(3t_{c}-T_{c}-\frac{K}{n+p-1}\right)\Big]\sum_{\alpha\neq n+1}\operatorname{tr}(H_{\alpha}^{2}), \end{aligned} \tag{3.9}$$

其中

$$M=\max\left\{2-\frac{1}{p-1},\sqrt{\frac{n+3}{2}}\right\}. \tag{3.10}$$

当$-MS+\frac{n}{n+p-2}(3t_c-T_c-\frac{K}{n+p-1})\geqslant 0$,即

$$S\leqslant\frac{n}{M(n+p-2)}\left(3t_{c}-T_{c}-\frac{K}{n+p-1}\right) \tag{3.11}$$

时,由(3.9)知

$$\frac{1}{2}\Delta\Big[\sum_{\alpha\neq n+1}\operatorname{tr}(H_{\alpha}^{2})\Big]=\sum_{\substack{i,j,k\\ \alpha\neq n+1}}(h_{ijk}^{\alpha})^{2}+\sum_{\substack{i,j\\ \alpha\neq n+1}}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant 0, \tag{3.12}$$

即 $\sum_{\alpha\neq n+1}\operatorname{tr}(H_\alpha^2)$ 是 M^n 上的次调和函数. 再由 M^n 是紧致的假设,利用 Hopf 极值原理可得 $\sum_{\alpha\neq n+1}\operatorname{tr}(H_\alpha^2)$ 为常数. 于是由(3.12)知

$$\sum_{\substack{i,j\\ \alpha\neq n+1}}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}=0. \tag{3.13}$$

由(3.9),(3.11)和(3.13)可得

$$S=\frac{n}{M(n+p-2)}\left(3t_{c}-T_{c}-\frac{K}{n+p-1}\right), \tag{3.14}$$

或

$$\sum_{\alpha\neq n+1}\operatorname{tr}(H_{\alpha}^{2})=0 \text{ 即 } h_{ij}^{\alpha}=0\ (\alpha\neq n+1). \tag{3.15}$$

因为 $\sqrt{\frac{n+3}{2}}\neq 2-\frac{1}{p-1}$,所以容易证明当(3.14)成立时也有(3.15)成立. 根据[3]的定理1,M^n 位于 N^{n+p} 的一个全测地子流形 N^{n+1} 中. 至此定理 1 得证.

根据定理 1 的证明容易得到

推论 在定理 1 中条件不变下,如果 M^n 是伪脐点的,则 M^n 必是全脐点的.

定理 2 的证明 由假设条件,M^n 的法丛是平坦的,所以[3]

$$\omega_{\alpha\beta}=0, \tag{3.16}$$

$$H_{\alpha}H_{\beta}=H_{\beta}H_{\alpha}. \tag{3.17}$$

将(3.16)代入(2.6)即得

$$R_{\alpha\beta jk}=0. \tag{3.18}$$

又 M^n 是极小子流形,因此

$$H = 0. \tag{3.19}$$

由(3.18),(3.19)参照[3]的计算有

$$\sum_{i,j,\alpha} h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha} = -\sum_{i,j,k,\alpha} (K_{\alpha k i k j} + K_{\alpha i j k k}) h_{ij}^{\alpha} + \sum_{m,i,j,k,\alpha} (R_{m i j k} h_{mk}^{\alpha} + R_{m k j k} h_{mi}^{\alpha}) h_{ij}^{\alpha}. \tag{3.20}$$

将(2.3),(2.7)和(2.11)代入(3.20)经计算得

$$\sum_{i,j,\alpha} h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha} = \frac{2n}{n+p-2} \sum_{i,j,k,\alpha} (K_{kj} h_{ki}^{\alpha} h_{ij}^{\alpha} + \sum_{\alpha,\beta} (\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2 - \mathrm{tr}(H_\alpha^2 H_\beta^2) - [\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2\}$$

$$+ \frac{S}{n+p-2} (\sum_j K_{jj} - \frac{nK}{n+p-1}) - \frac{n}{n+p-2} \sum_{i,j,\alpha,\beta} K_{\alpha\beta} h_{ij}^{\alpha} h_{ij}^{\beta}. \tag{3.21}$$

适当选取法向量将矩阵$(\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta))$对角化,则

$$\sum_{\alpha,\beta} [\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2 = \sum_\alpha [\mathrm{tr}(H_\alpha^2)]^2 \leqslant \frac{1}{p} [\sum_\alpha \mathrm{tr}(H_\alpha^2)]^2 = \frac{1}{p} S^2. \tag{3.22}$$

又我们知道[3]

$$\sum_{\alpha,\beta} [\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2 - \mathrm{tr}(H_\alpha^2 H_\beta^2)]^2 \geqslant \frac{1-p}{p} S^2, \tag{3.23}$$

将(3.22),(3.23)及(3.7),(3.8)代入(3.21)可得

$$\sum_{i,j,\alpha} h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha} \geqslant [-S + \frac{n}{n+p-2} (3t_c - T_c - \frac{K}{n+p-1})] S. \tag{3.24}$$

类似定理 1 的证明,当 $S < \frac{n}{n+p-2}(3t_c - T_c - \frac{K}{n+p-1})$时,有 $S=0$,即 M^n 是全测地的. □

本文是作者在华东师范大学作为访问学者期间完成的.在此期间曾得到沈纯理教授的很多帮助和指导,特表示衷心感谢.

参 考 文 献

[1] 孙华飞,局部对称共形平坦黎曼流形中具有平行平均曲率向量的子流形,数学季刊,1992,7(1):32—36.

[2] 莫小欢,常曲率空间中具有平行平均曲率向量的子流形,数学年刊,1988,9(A)(5):530—540.

[3] S.T.Yau, *Submanifolds with constant mean curvature*, Amer. J. Math., 96(1974):346—366; 97(1975):76—100.

[4] 陈卿等, *On compact submanifolds in a sphere*, 数学研究与评论,1992,12(4):523—531.

On Compact Submanifolds in a Locally Symmetric and Conformally Flat Riemannian Manifold

Xu Zhaodi

(Dept. of Math., Shenyang Teachers' College, 110031)

Abstract

We improve the result in [1] and generalize a result on submanifolds in sphere to a locally symmetric and conformally flat Riemannian manifold.

Keywords locally symmetric, conformally flat, parallel mean curvature vector, flat normal bundle.