第16卷第4期　　　　数 学 研 究 与 评 论　　　　Vol. 16 No. 4
1996年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1996

关于Gerber不等式的一个猜想*

冷 岗 松

(湖南教育学院数学系, 长沙410012)

摘　要　本文证明了陈计-单墫关于Gerber不等式的一个猜想. 作为其应用, 导出了单形内一点到顶点的距离与到面的距离的两个不等式.

关键词　单形, 距离, 不等式, 顶点角.

分类号　AMS(1991) 51K05/CCL O184

§1　引　言

设 $\tau=\{A_0,A_1,\cdots,A_n\}$ 是 n 维欧氏空间 E^n 中的 n 维单形 Ω 的顶点集, Ω 的体积为 V, P 是 Ω 内任一点, P 到 Ω 的 $n-1$ 维界面 Ω_i 的距离为 r_i. Gerber 在[1]中证明了如下的不等式

$$G_{n+1}(r_i)\le C_nV^{\frac{1}{n}},\tag{1}$$

等号当且仅当 Ω 是正则单形且 P 为其中心时成立. 这里 $G_{n+1}(r_i)$ 是 $r_0, r_1, \cdots, r_n$ 的几何平均值,

$$C_n=\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n^{\frac{1}{2}}(n+1)^{\frac{n-1}{2n}}}V^{\frac{1}{n}}.$$

设 $S_{n+1}^{[k]}(x_i)$ 表示 $n+1$ 个正数 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的 k 阶对称平均数. 注意到熟知的不等式

$$G_{n+1}(x_i)=S_{n+1}^{[n+1]}(x_i)\le S_{n+1}^{[n]}(x_i)\le S_{n+1}^{[n-1]}(x_i)\le\cdots\le S_{n+1}^{[1]}(x_i)=A_{n+1}(x_i)$$

1992年, 安振平猜测(1)能被加强为如下的形式:

$$S_{n+1}^{[n-1]}(r_i)\le C_nV^{\frac{1}{n}}.\tag{2}$$

随后, [5]否定了(2), 再一次猜测(1)能被加强为

$$S_{n+1}^{[n]}(r_i)\le C_nV^{\frac{1}{n}}.\tag{3}$$

本文证明了不等式(3)是正确的, 从而彻底解决了陈计和单墫的猜想.

定理1

$$S_{n+1}^{[n]}(r_i)\le\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^{\frac{n-1}{2n}}n^{\frac{1}{2}}}\cdot V^{\frac{1}{n}},\tag{4}$$

等号当且仅当 Ω 是正则的且 P 为其中心时成立.

应用定理1, 能建立 E^n 中的两个非线性的 Erdös-Mordell 型不等式, 即如下

* 1994年1月18日收到. 96年5月20日收到修改稿.

定理 2 设 P 是 n 维单形 Ω 内任一点, 记 $R_i = |PA_i|$, 则

$$S_{n+1}^{[1]}(R_i) \geq n \cdot S_{n+1}^{[n]}(r_i); \tag{5}$$

$$S_{n+1}^{[1]}(R_i) S_{n+1}^{[n]}(R_i) \geq n^2 (S_{n+1}^{[n]}(r_i))^2, \tag{6}$$

两式等号当且仅当 Ω 为正则单形且 P 是其中心时成立

§2 引 理

设 Ω 的两个 $n-1$ 维界面 Ω_i, Ω_j 所夹的内二面角为 θ_{ij} $(0 \leq i < j \leq n)$, 令

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & & & -\cos\theta_{rs} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ -\cos\theta_{sr} & & & 1 \end{pmatrix}_n^n, \quad 0 \leq r < s \leq n, r, s \neq i,$$

则 $\theta_i = \arcsin\sqrt{\det M_i}$ 叫做单形 Ω 在 A_i 处的顶点角[2].

引理 1[2] 设 θ_i 是单形 Ω 在 A_i 处的顶点角, V_i 是 Ω_i 的 $n-1$ 维体积 $(i = 0, 1, \cdots, n)$, 则

$$\frac{\sin\theta_i}{V_i} = \frac{(nV)^{n-1}}{(n-1)!\,(\prod_{i=0}^{n} V_i)}. \tag{7}$$

引理 2[3] 设 θ_i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ 是 n 维单形 Ω 的顶点角, α_i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ 是 $n+1$ 个正实数, 则

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \sin^2\theta_i \leq \frac{1}{n^n} (\prod_{i=0}^{n} \alpha_i) (\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\alpha_i})^n, \tag{8}$$

当 Ω 是正则单形且 $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n$ 时等号成立

引理 3 设 x_i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ 是 $n+1$ 个正实数, 则

$$V^{n-1} \sum_{i=0}^{n} (\prod_{j \neq i} x_j) V_i \leq \frac{(n-1)!}{(n+1)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{3n-2}{2}}} (\sum_{i=0}^{n} x_i)^n (\prod_{i=0}^{n} V_i), \tag{9}$$

当 Ω 是正则单形且 $x_0 = x_1 = \cdots = x_n$ 时等号成立

证明 在不等式(8) 中令 $\alpha_i = \prod_{j \neq i} x_j$, 则得

$$\sum_{i=0}^{n} (\prod_{j \neq i} x_j) \sin^2\theta_i \leq \frac{1}{n} (\sum_{i=0}^{n} x_i)^n. \tag{10}$$

应用 Cauchy 不等式, 由(10) 可得

$$\sum_{i=0}^{n} (\prod_{j \neq i} x_j) \sin\theta_i \leq \frac{(\sum_{i=0}^{n} x_i)^{\frac{n}{2}} (\sum_{i=0}^{n} (\prod_{j \neq i} x_j))^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}}, \tag{11}$$

再用(7) 代入(11) 的左边即得

$$V^{n-1} \sum_{i=0}^{n} (\prod_{j \neq i} x_j) V_i \leq \frac{(n-1)!\,(\sum_{i=0}^{n} x_i)^{\frac{n}{2}} (\sum_{i=0}^{n} (\prod_{j \neq i} x_j))^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{3n-2}{2}}} \cdot (\prod_{i=0}^{n} V_i). \tag{12}$$

再对(12)的右边应用不等式 $S_{n+1}^{[n]}(x_i)\le S_{n+1}^{[1]}(x_i)$, 即得所证不等式(9).

§3　定理的证明

定理 1 的证明　在引理 3 的(9)中, 令 $x_i = r_iV_i$ 可得

$$V^{n-1}\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j\neq i}r_j\right)\le\frac{(n-1)!\left(\sum_{i=0}^{n}r_iV_i\right)^n}{(n+1)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{3n-2}{2}}},\tag{13}$$

注意到明显的几何事实 $nV = \sum_{i=0}^{n}r_iV_i$, 将其代入(13)整理变形即得所需的不等式(4), 定理 1 证毕

定理 2 的证明　过顶点 A_i 作以向量 $e_i=\overrightarrow{A_iP}/\|\overrightarrow{A_iP}\|$ 为法向量的 $(n-1)$ 维超平面 E_i $(i=0,1,\cdots,n)$. 由于 $e_0,e_1,\cdots,e_n$ 中的任 n 个线性无关, 对 $E_0,E_1,\cdots,E_n$ 的线性方程用 Gramer 法则易知 $E_0,E_1,\cdots,E_n$ 中的任意 n 个超平面有唯一的公共点 设 $E_0,\cdots,E_{i-1},E_{i+1},\cdots,E_n$ 的公共点为 A_i', 则 $A_0',A_1',\cdots,A_n'$ 生成一个新的单形 Ω'.

设 θ_i' 是单形 Ω' 在顶点 A_i' 处的顶点角, θ_{ij}' 是 E_i,E_j 所成的内二面角, α_{ij} 是向量 e_i,e_j 的夹角, 则 $\theta_{ij}'=\pi-\alpha_{ij}$, 于是

$$\sin^2\theta_i'=\det\begin{pmatrix}1&&&-\cos\theta_{rs}'\\&1&&\\&&\ddots&\\-\cos\theta_{rs}'&&&1\end{pmatrix}_{r,s\neq i}=\det\begin{pmatrix}1&&&-\cos\alpha_{rs}\\&1&&\\&&\ddots&\\-\cos\alpha_{rs}&&&1\end{pmatrix}_{r,s\neq i}\tag{14}$$

设由顶点集 $\{A_0,\cdots,A_{i-1},P,A_{i+1},\cdots,A_n\}$ 生成的单形 Σ_i 的体积为 V_i', 则由(14)便得

$$V_i'=\frac{1}{n!}\prod_{j\neq i}\|\overrightarrow{PA_i}\|\cdot\det^{\frac12}\begin{pmatrix}1&&&-\cos\alpha_{rs}\\&1&&\\&&\ddots&\\\cos\alpha_{rs}&&&1\end{pmatrix}_{r,s\neq i}=\frac{1}{n!}\left(\prod_{j\neq i}R_j\right)\sin\theta_i'\tag{15}$$

注意到 $\Omega=\Sigma_0\cup\Sigma_1\cup\cdots\cup\Sigma_n$, 有

$$V=\sum_{i=0}^{n}V_i'=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j\neq i}R_j\right)\sin\theta_i'.$$

对上式右端用不等式(11)可得

$$V\le\frac{\left(\sum_{i=0}^{n}R_i\right)^{\frac n2}\left(\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j\neq i}R_j\right)\right)^{\frac12}}{n^{\frac n2}\cdot n!}.\tag{16}$$

这样, 综合不等式(3)和(15), 整理变形即得不等式(6).

再由对称平均数的基本性质, 以(6) 易推知(5) 成立, 定理 2 证毕.

参 考 文 献

[1] L. Gerber, *The orthocentric simplex as an extreme simplex*, Pacific, J. Math., 56(1975), 97-111.

[2] F. Eriksson, *The Law of Sines for Tetrahedra and n-Simplex*, Geom. Dedicata, 7(1978), 71-80.

[3] 张垚, 关于垂足单形的一个猜想, 系统科学与数学, 12(4)(1992), 371—375.

[4] 杨路、张景中, 预给二面角的单形嵌入 E^n 的充分必要条件, 数学学报, 26: 2(1983), 250—256.

[5] 陈计, 关于 Gerber 不等式的加强, 福建数学, 5(1992), 8—9.

[6] Leng Gangsong, Tang Lihua, *Some inequalities on the inradii of a simplex and of its face*, Geom. Dedicata, 61(1996), 43- 49.

A Conjecture on Gerber's Inequality

Leng Gangsong

(Hunan Educational Institute, Changsha 410012)

Abstract

In this paper, we solve a conjecture of Chen Ji and Shan Zun, which is an improvement of Gerber's inequality. As appliciations, two geometric inequalities are derived.

Keywords simplex, inequalities, distance, vertex angle.