第9卷 第2期
1989年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.2
May, 1989

关于两类函数方程的连续解与解析解*

李文荣　　司建国

（山东滨州师专）

摘　　要

在本文中，我们首先考察了一类非齐次线性函数方程

$$\varphi[f(x)]=g(x)\varphi(x)+F(x),$$

在所谓的“不定情况”下，给出了连续解存在唯一性条件及其稳定性条件，并讨论了它的属于数λ的正规解的存在性问题．另外，本文还藉助优级数法给出一类非线性函数方程

$$f[\psi(x)]=\psi(ax)+F(x)$$

的局部解析解的存在唯一性定理．

§1　非齐次线性函数方程的解

我们来讨论非齐次线性函数方程

$$\varphi[f(x)]=g(x)\varphi(x)+F(x) \tag{1.1}$$

其中φ是未知函数，f、g、F是已知函数，所论的都是实变量的实值函数．关于方程(1.1)的连续解存在性已有许多结果(如文献[1],[2])，但是对于一种$g(\xi)=1$(这里 是$f(x)$的不动点)的“不定情况”却遇到困难，这在Kuczma的[1]、[3]中已说到过．现在，我们获得了一个包括“不定情况”在内的解的存在唯一性定理．

定理1　若函数方程(1.1)满足

1）f在区间$\mathrm{I}=[\xi-\sigma,\ \xi+\sigma]$ $(\sigma>0)$上定义，$f(I)\subset\mathrm{I}$，且存在$\alpha>0$，当$x\in\mathrm{I}$，有$f(x)-\xi=S(x-\xi)+\mathrm{O}(|x-\xi|^{\alpha+1})$，其中 $0<|S|<1$．

2）存在常数$A>0$，$\mu>0$，当$x\in\mathrm{I}$，有$F(x)=\mathrm{O}(|x-\quad|^{\mu})$，$|g(x)|\geqslant e^{-A|x-\xi|}$，

则必存在r $(0<r<\sigma)$，方程(1.1)在$|x-\xi|\leqslant r$上有函数级数解

$$\varphi(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F[f^{n}(x)]}{\prod\limits_{m=0}^{n}g[f^{m}(x)]} \tag{1.2}$$

其中$f^{0}(x)=x$，$f^{n+1}(x)=f[f^{n}(x)]$，$n=0,1,2,\cdots$．

证　根据条件1），有

$$|f(x)-\xi|\leqslant(|S|+\mathrm{O}(|x-\xi|^{\alpha}))|x-\xi| \tag{1.3}$$

* 1987年7月9日收到．

由于$0<|S|<1$，故存在β，使

$$|S|<\beta<|S|^{1/(\alpha+1)} \tag{1.4}$$

考虑到$O(|x-\xi|^{\alpha})=0(1)\ (x\to\xi)$，必存在$r(0<r\leqslant\sigma)$，当$|x-\xi|\leqslant r$，有

$$O(|x-\xi|^{\alpha})\leqslant\beta-|S|. \tag{1.5}$$

于是，由(1.3)和(1.5)可推出 $|f(x)-\xi|\leqslant\beta|x-\xi|$,
从而

$$|f^{n}(x)-\xi|\leqslant\beta^{n}|x-\xi|. \tag{1.6}$$

又由条件2)，$|g(x)|\geqslant e^{-A|x-\xi|}$，且存在常数$k>0$，使$|F(x)|\leqslant k|x-\xi|^{\mu}$．再考虑到(1.6)，当$|x-\xi|\leqslant r$时，可作如下的估计：

$$\left|\frac{F(f^{n}(x))}{\prod\limits_{m=0}^{n}g[f^{m}(x)]}\right|\leqslant\frac{k|f^{n}(x)-\xi|^{\mu}}{\prod\limits_{m=0}^{n}e^{-A|f^{m}(x)-\xi|}}\leqslant\frac{k\beta^{n\mu}|x-\xi|^{\mu}}{\prod\limits_{m=0}^{n}e^{-A\beta^{m}|x-\xi|}}$$

$$\leqslant k\beta^{n\mu}|x-\xi|^{\mu}e^{A|x-\xi|/(1-\beta)}\leqslant kr^{\mu}(\beta^{\mu})^{n}e^{Ar/(1-\beta)} \tag{1.7}$$

由(1.4)知$0<\beta<1$，所以从(1.7)知级数(1.2)在$|x-\xi|\leqslant r$上一致收敛．另外，容易证明(1.2)满足(1.1)，所以，函数级数(1.2)是方程(1.1)的解．■

推论 在定理1的条件下，当假设f、g、F在I上连续，则方程(1.1)在$|x-\xi|\leqslant r$上有形如(1.2)的连续解．

定理2 设存在常数$A>0$，$0<\beta<1$，使在$|x-\xi|\leqslant r$上，有$|g(x)|\geqslant e^{-A|x-\xi|}$，$|f(x)-\xi|\leqslant\beta|x-\xi|$．若$\varphi(x)$是方程(1.1)在$|x-\xi|\leqslant r$上适合

$$\varphi(x)=O(|x-\xi|^{\tau}),\quad \tau>0 \tag{1.8}$$

的解，则这种解是唯一的．证明略．

应该强调指出，上述的结果对于$|g(\xi)|>1$与$|g(\xi)|=1$都是成立的，这可从定理1的条件2)所设的$|g(x)|\geqslant e^{-A|x-\xi|}$看到．这就是说，上面的结果对困难的"不定情况$g(\xi)=1$"是适用的，显而易见，这是颇有意义的．

§2 函数方程(1.1)的正规解

我们先给出正规解的定义．

定义1 若对$x_0\in[\xi-r,\xi+r]\ (r>0)$方程(1.1)有解$\varphi(x)$满足：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi[f^{n+1}(x)]}{\varphi[f^{n}(x)]}=\lambda,\quad n=1,2,\cdots, \tag{2.1}$$

则称$\varphi(x)$是方程(1.1)关于x_0属于数λ的正规解．

定理3 若函数方程(1.1)满足：

1) 对$x_0\in[\xi-r,\xi+r]$，有 $\lim\limits_{x\to x_0}g[f^{n}(x)]=p>1$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{F[f^{n+1}(x)]}{F[f^{n}(x)]}=q$，$n=1,2,\cdots$．

2) $|q|<p$，则当级数(1.2)在$|x-\xi|\leqslant r$上收敛时，它就是方程(1.1)关于x_0属于数q的正规解．

证 首先，容易看出当级数(1.2)在$|x-\xi|\leqslant r$上收敛时，它是方程的解．若令

$$Q_n(x)=\frac{F[f^n(x)]}{F(x)\prod_{m=0}^{n} g[f^m(x)]}\quad, n=0,1,2,\cdots.$$

则（1.2）变为

$$\varphi(x)=-F(x)\sum_{k=0}^{\infty} Q_k(x). \tag{2.2}$$

可以证明，对任意整数 $k\geqslant 0, l\geqslant 1$，成立

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{k=0}^{\infty} Q_k[f^l(x)]=\frac{1}{p-q} \tag{2.3}$$

事实上，有

$$\lim_{x\to x_0} Q_k[f^l(x)]=\lim_{x\to x_0}\frac{F[f^{k+l}(x)]}{F[f^l(x)]\prod_{m=0}^{k} g[f^{m+l}(x)]}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\left\{\frac{F[f^{k+l}(x)]}{F[f^{k+l-1}(x)]}\cdot\frac{F[f^{k+l-1}(x)]}{F[f^{k+l-2}(x)]}\cdots\frac{F[f^{l+1}(x)]}{F[f^l(x)]}\right\}}{\prod_{m=0}^{k} g[f^{m+l}(x)]}=\frac{1}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^k.$$

由此，可推知：对任意整数 $k\geqslant 0, l\geqslant 1$，有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{Q_k[f^l(x)]}{Q_{k-1}[f^l(x)]}=\frac{q}{p}\quad. \tag{2.4}$$

因为 $\left|\frac{q}{p}\right|<1$，$p>1$，可取 a 使适合 $\left|\frac{q}{p}\right|<a<1$．这样，对任意 $\varepsilon>0$，必存在自然数 k_0 及 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a^k<\frac{\varepsilon}{2\left(1+\frac{1}{p}\right)}\qquad \left|Q_k[f^l(x)]-\frac{1}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^k\right|<\frac{\varepsilon}{2(k_0+1)},\quad k\leqslant k_0$$

$$\left|\frac{Q_k[f^l(x)]}{Q_{k-1}[f^l(x)]}\right|<a,\quad k>k_0;\qquad |Q_1[f^l(x)]|<a,$$

于是

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} Q_k[f^l(x)]-\frac{1}{p-q}\right|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\left(Q_k[f^l(x)-\frac{1}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^k\right)\right|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left|Q_k[f^l(x)]-\frac{1}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^k\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{k_0}\left|Q_k[f^l(x)-\frac{1}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^k\right|+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(|Q_k[f^l(x)]|+\frac{1}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^k\right)$$

$$<(k_0+1)\frac{\varepsilon}{2(k_0+1)}+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left|\frac{Q_k[f^l(x)]}{Q_{k-1}[f^l(x)]}\cdot\frac{Q_{k-1}[f^l(x)]}{Q_{k-2}[f^l(x)]}\cdots\frac{Q_2[f^l(x)]}{Q_1[f^l(x)]}\cdot Q_1[f^l(x)\right|$$

$$+\frac{1}{p}\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^k<\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a^k+\frac{1}{p}\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a^k<\frac{\varepsilon}{2}+\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{\varepsilon}{2\left(1+\frac{1}{p}\right)}=\varepsilon.$$

即（2.3）成立．由条件1）和（2.2）、（2.3）知，对任意自然数 n， 有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi[f^{n+1}(x)]}{\varphi[f^n(x)]}=\lim_{x\to x_0}\frac{F[f^{n+1}(x)]\sum_{k=0}^{\infty}Q_k[f^{n+1}(x)]}{F[f^n(x)]\sum_{k=0}^{\infty}Q_k[f^n(x)]}=q,$$

所以，$\varphi(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F[f^n(x)]}{\prod_{m=0}^{n}g[f^m(x)]}$ 是函数方程（1.1）关于x_0属于数q的正规解．■

推论 设满足定理1推论的全部条件，若$g(\xi)>1$，则方程（1.1）的连续解（1.2）是关于$f(x)$的不动点ξ属于数1的正规解．

§3 关于函数方程的稳定性

我们先讨论一阶函数方程解的渐近稳定性问题．假设$\psi(x)$与$\varphi(x)$分别是函数方程

$$G(x,\psi(x),\psi[f(x)])=0 \tag{3.1}$$

$$G(x,\varphi(x),\varphi[f(x)])=F(x) \tag{3.2}$$

在区间$I=[\xi-\sigma,\xi+\sigma]$（这里$\sigma>0$，$\xi$是$f(x)$的不动点）上的解，其中$F(x)$称为干扰．

定义2 如果对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|F(x)|\leqslant\delta|x-\xi|^{\mu}$（$\mu>0$，$x\in I$），有

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant\varepsilon|x-\xi|^{\mu},\quad x\in I \tag{3.3}$$

则称函数方程（3.1）的解$\psi(x)$在I上对干扰F是逐近稳定的．

定理4 在定理1的条件下，函数方程

$$\psi[f(x)]=g(x)\psi(x) \tag{3.4}$$

的零解$\psi(x)=0$在$|x-\xi|\leqslant r$上对干扰F是渐近稳定。证明略．

现在，我们再来讨论关于函数方程（1.1）的另一种稳定性问题．设函数族

$$\Omega=\{f(x):\text{存在}\ \mu>0,\text{使}f(x)=O(|x-\xi|^{\mu}),\quad |x-\xi|\leqslant r\},$$

容易看到ξ是f的不动点。另外可及验证方程（1.1）等价于

$$\varphi[f^n(x)]=G_n(x)\varphi(x)+G_n(x)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{F[f^i(x)]}{G_{i+1}(x)} \tag{3.5}$$

其中

$$G_n(x)=\prod_{i=0}^{n-1}g[f^i(x)],\quad n=1,2,\cdots,\quad |x-\xi|\leqslant r.$$

类似于Brydak在[4]中关于稳定性的定义，我们给出如下的

定义3 如果存在常数$L>0$，使对任意$\varepsilon>0$及满足不等式

$$\left|\psi[f^n(x)]-G_n(x)\psi(x)-G_n(x)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{F[f^i(x)]}{G_{i+1}(x)}\right|\leqslant\varepsilon \tag{3.6}$$

（$n=1,2,\cdots$，$|x-\xi|\leqslant r$）的任意函数$\psi(x)\in\Omega$，方程（1.1）在$|x-\xi|\leqslant r$上总有解$\varphi(x)\in\Omega$，使

$$|\psi(x)-\varphi(x)|\leqslant L\varepsilon \tag{3.7}$$

则称方程（1.1）是关于函数族Ω稳定的．

定理5 在定理1的条件下，函数方程（1.1）是关于函数族Ω稳定的．

证 容易验证方程（1.1）的解（1.2）属于Ω，且对任意$\psi(x)\in\Omega$，有

$\dfrac{\psi[f^n(x)]}{G_n(x)} \to 0\ (n\to\infty)$，　　于是，依（3.6）对任意 $\varepsilon>0$，当 $|x-\xi|\leqslant r$，有

$$\left|\frac{\psi[f^n(x)]}{G_n(x)}-\psi(x)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{F[f^i(x)]}{G_{i+1}(x)}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{|G_n(x)|}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{\prod\limits_{m=0}^{n-1}e^{-A|f^m(x)-\xi|}}\leqslant\frac{\varepsilon}{\prod\limits_{m=0}^{n-1}e^{-A\beta^m|x-\xi|}}\leqslant e^{Ar/(1-\beta)}\varepsilon \tag{3.8}$$

在（3.8）中，令 $n\to\infty$，便得到 $|\psi(x)-\varphi(x)|\leqslant L\varepsilon$，对任意 $|x-\xi|\leqslant r$，其中 $L=e^{Ar/(1-\beta)}$，即方程（1.1）关于函数族Ω是稳定的．■

§4　非齐次Poincarè方程的局部解析解

著名的Schröder方程

$$\varphi[f(x)]=a\varphi(x) \tag{4.1}$$

是线性函数方程的一个重要的特殊情况，它的解析解已有许多结果[1]．作为方程（4.1）的变形

$$f[\psi(x)]=\psi[ax] \tag{4.2}$$

是一个非线性函数方程，它通常被称为Poincarè方程[5]、[6]，在考虑原点邻域内局部解析解时，它与方程（4.1）是等价的，在方程（4.2）解析解的研究方面，Siegel做了极好的工作[7].

现在，我们来考察非齐次 Poincarè 方程

$$f[\psi(x)]=\psi[ax]+F(x) \tag{4.3}$$

的局部解析解的存在性问题，其中 f，F是已知函数，$\psi(x)$是未知函数，x是实的或复的变数，a是实的或复的常数．我们仅讨论在 $\psi(0)=0$，$\psi'(0)=\eta\in(-\infty,+\infty)$ 情况下的局部解析解的存在唯一性，获得了如下的

定理 6　若函数方程（4.3）满足

1）　$f(0)=0$，$f'(0)=a$，$|a|>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，又 $f(x)$是解析的，其展开式：

$$f(x)=ax+\sum_{n=2}^{\infty}f_nx^n \tag{4.4}$$

在原点某邻域内收敛，

2）　$F(0)=F'(0)=0$，$F(x)$也是解析的，且

$$F(x)=\sum_{n=2}^{\infty}F_nx^n \tag{4.5}$$

在 $|x|<R$（$R>0$）上收敛，

则函数方程（4.3）在原点的某邻域内存在形如

$$\psi(x)=\eta x+\sum_{n=2}^{\infty}b_nx^n$$

的唯一单参数族解析解．

证　　因级数（4.4）有正的收敛半径，所以存在正的常数p，使 $|f_n|\leqslant p^{n-1}$（$n=2,3,\cdots$）．今引入新函数 $\varphi(x)$与 $g(x)$，使适合 $\psi(x)=\varphi(px)/p$与 $f(x)=g(px)/p$，将此代入

方程(4.3),并以x代替px,便得到与方程(4.3)同类型方程 $g[\varphi(x)]=\varphi(ax)+pF(\frac{x}{p})$.

这样,从 $g(x)=pf(\frac{x}{p})$ 可得展开式 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_nx^n=ax+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f_n}{p^{n-1}}x^n$ 显然 $|g_n|\leqslant\frac{|f_n|}{p^{n-1}}\leqslant 1$ $(n=2,3,\cdots)$. 由此,不失一般性,我们可以假定

$$|f_n|\leqslant 1 \quad (n=2,3,\cdots). \tag{4.6}$$

又由条件2),必存在$M>0$,对任意固定的$r(0<r<R)$,有

$$|F_n|\leqslant\frac{M}{r^n} \quad (n=2,3,\cdots) \tag{4.7}$$

设方程(4.3)具有幂级数形式解

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n \tag{4.8}$$

将(4.4)、(4.5)与(4.8)代入方程(4.3),得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=n\\ m=1,2,\cdots,n}}f_mb_{l_1}\cdots b_{l_m}\Big)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(b_na^n+F_n)x^n$$

这里认为 $f_1=a$, $F_1=0$. 比较系数得

$$ab_1=b_1, \tag{4.9}$$

$$(a^n-a)b_n=\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=n\\ m=2,\cdots,n}}f_mb_{l_1}\cdots b_{l_m}-F_n, \quad n=2,3,\cdots. \tag{4.10}$$

由(4.9),我们可取 $b_1=\eta\in(-\infty,+\infty)$. 这样,(4.8)的其它系数 b_2, b_3, $\cdots$ 可由递推关系(4.10)唯一地确定. 于是,方程(4.3)有唯一单参数族形式解

$$\psi(x)=\eta x+\sum_{n=2}^{\infty}b_nx^n. \tag{4.11}$$

现在,我们再来考察由方程

$$G(x)=\eta x+\frac{[G(x)]^2}{1-G(x)}+\frac{Mx^2}{r^2-rx}=\eta x+\sum_{n=2}^{\infty}[G(x)]^n+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{M}{r^n}x^n \tag{4.12}$$

所确定的函数 $G(x)=\frac{1}{4}\{1+\eta x+\frac{Mx^2}{r^2-rx}-[1-6(\eta x+\frac{Mx^2}{r^2-rx})+(\eta x+\frac{Mx^2}{r^2-rx})^2]^{1/2}\}$.

因为,当 $x\to 0$时,有 $6(\eta x+\frac{Mx^2}{r^2-rx})-(\eta x+\frac{Mx^2}{r^2-rx})^2=o(1)$, 所以,存在$\delta>0$,当 $|x|<\delta$时,有

$$|6(\eta x+\frac{Mx^2}{r^2-rx})-(\eta x-\frac{Mx^2}{r^2-rx})^2|<1.$$

于是,$G(x)$至少在 $|x|<\delta$上是解析的. 若令$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_nx^n$代入(4.12),可得

$$v_1=\eta,$$

$$v_n=\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=n\\ m=2,\cdots,n}}v_{l_1}\cdots v_{l_m}+\frac{M}{r^n} \tag{4.13}$$

不言而喻，由(4.13)确定的系数的幂级数 $G(x)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n x^n$ 至少在 $|x|<\delta$ 上收敛．

最后，我们证明：

$$|b_n|\leqslant v_n,\quad n=1,2,\cdots \tag{4.14}$$

事实上，当 $n=1$ 时，(4.14)显然成立．假设对 $1,2,\cdots,n-1$，(4.14)成立，注意到条件1)和(4.6)，(4.7)、(4.10)和(4.13)，有

$$\begin{aligned}|b_n|&\leqslant|a|\,\big||a|^{n-1}-1\big|\,|b_n|\leqslant|a^n-a|\,|b_n|\\&\leqslant\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=n\\ m=2,\cdots,n}}|b_{l_1}|\cdots|b_{l_m}|+|F_n|\leqslant\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=n\\ m=2,\cdots,n}}v_{l_1}\cdots v_{l_m}+\frac{M}{r^n}=v_n.\end{aligned}$$

这就是说，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n x^n$ 是级数(4.11)的优级数．因此，(4.11)是方程在 $|x|<\delta$ 内的唯一单参数族的解析解．■

另外，我们可以类似地证明下面的

定理 7 如果函数方程

$$f[\psi(x)]=\sum_{i=1}^{l}\psi(a_i x)+F(x) \tag{4.15}$$

满足

1) $f(0)=0$, $f'(0)=a$, $F(0)=0$, $F'(0)=0$, 且 $\left|a-\sum_{i=1}^{l}a_i^n\right|\geqslant 1$.

2) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$, $|f_n|\leqslant 1$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 及 $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ 均在 $(-R,R)$ $(R>0)$ 上收敛．

则函数方程(4.15)在原点的领域内存在形如 $\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$, $b_1=1$ 的解析解．

参 考 文 献

[1] M. Kuczma, Functional equations in Single Variable Monografie Mat., Tom 46, PWN, Warsaw, 1968.

[2] J.Kordylewski, M.Kuczma, On some linear functional equations, I., II, ibid.9(1960).

[3] B.Choczewski, M.Kuczma, On the "indelerminale case" in the theory of linear functional equation, Fund. Math. 58(1966).

[4] D. Brydak, On the tstability of the functional equation $\phi(f(x))=g(x)\phi(x)+F(x)$, Proc.Amer. Soc.26(1970).

[5] H.Poincare′, Sur une classe e′tendue de transcendantes uniformes, C.R. Acad.Sci.Parǐs 103 (1886).

[6] ———, Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes, J.Math.Pures Appl.(4)6(1890).

[7] C.L.Siegel, Iteration of anaiytic functions, Ann. of Math. (2)43(1942).