广义 Fitting 子群

张雪梅[1],李长稳[2]
(1.盐城工学院 基础部,江苏 盐城 224003;2.徐州师范大学 数学科学学院,江苏 徐州 221116)

摘要:广义 Fitting 子群 $F^*(G)$ 是 G 的唯一的极大正规拟幂零子群。利用广义 Fitting 子群 $F^*(G)$ 的一些子群性质研究群的性质和结构,推广和改进了 Asaad 等人的结果。

关键词:$F^*(G)$;Sylow 子群的极大子群;极小子群
中图分类号:O152.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1671-5322(2009)02-0017-03

多年来,如何将子群的正规性这一概念进行推广是众多群论研究者感兴趣的问题。比如国外的 O. Ore 于1939年首次引入的拟正规[1],Kegel 于1962年提出的拟正规[2],A. Ballester-Bolinches 和 M.C. Pedraza-Aguilera 于1988年给出的拟正规嵌入[3]。又如国内的陈重穆提出的半正规[4]和苏向盈于1988年引入的半正规[5]。1998年 Asaad 在文[6]中证明了如下定理:设 $\mathscr{F}$ 是包含所有超可解群系 $\mathscr{U}$ 的饱和群系,G 为可解群。若 G 有正规子群 H,使得 $G/H\in\mathscr{F}$ 且 $F(H)$ 的极小子群及4阶循环子群在 G 中 S-拟正规,则 $G\in\mathscr{F}$。将上述结果中的可解性去掉是一件很有意义的工作,然而在这种情况下,可能会出现 $F(H)=1$。但当 $H\neq1$ 时,广义 Fitting 子群 $F^*(H)\neq1$。$F^*(G)$ 是群 G 的唯一的极大正规拟幂零子群。它是群 G 的一个重要子群,它是 $F(G)$ 的自然推广,其定义和重要性质可在文献[8]看到。我们将正规子群的几种推广形式利用广义 Fitting 子群作研究,统一了许多群论学者的结论,推广和改进了 Asaad 等人的结果。

1 预备知识

定义1[1] 群 G 的子群 H 称为在 G 中拟正规的,如果对于 G 的任意子群 K,有 $KH=HK$。

定义2[2] 群 G 的子群 H 称为在 G 中 S-拟正规的,如果对于 G 的每个 Sylow 子群 P,有 $PH=HP$。

定义3[3] 群 G 的子群 H 称为在 G 中 S-拟正规嵌入的,如果对于 H 的每个素因子 p,H 的 Sylow p 子群也是 G 的某个 S-拟正规子群的 Sylow p 子群。

定义4[4] 群 G 的子群 H 称为在 G 中 S-半正规的,如果对于 G 的每个 Sylow p-子群 P,只要 $(p,|H|)=1$,就有 $PH=HP$。

定义5[5] 群 G 的子群 H 称为在 G 中半正规的,如果存在 G 的子群 K,使得 $G=HK$,且对于 K 的任意真子群 K_1,有 $HK_1<G$。

定义6[6] 设 $\mathscr{F}$ 为任一非空群类,所有使 $G/N\in\mathscr{F}$ 的正规子群 N 的交,记为 $G^{\mathscr{F}}$,即 $G^{\mathscr{F}}=\cap\{N\lhd G|G/N\in\mathscr{F}\}$。

引理1[9] 设 G 为有限群,且 H 在 G 中 S-半正规,则下列结论成立:

(1)若 $H\leqslant T\leqslant G$,则 H 在 T 中 S-半正规;

(2)若 H 为 p 群,且 $K\lhd G$,则 HK/K 在 G/K 中 S-半正规。

引理2[10] 设 G 是群,$N\leqslant G$,则:

(1)若 N 在 G 中正规,则 $F^*(N)\leqslant F^*(G)$;

(2)若 $G\neq1$,则 $F^*(G)\neq1$;事实上,$F^*(G)/F(G)=Soc(F(G)C_G(F(G))/F(G))$;

(3)$F^*(F^*(G))=F^*(G)\geqslant F(G)$;若 $F^*(G)$ 可解,则 $F^*(G)=F(G)$。

引理3[3] 设 G 为有限群,且 H 在 G 中 S-拟正规嵌入,则下列结论成立:

(1)若 $H\leqslant T\leqslant G$,则 H 在 T 中 S-拟正规嵌

收稿日期:2009-02-23
基金项目:盐城工学院科研基金项目(XKY2007127)
作者简介:张雪梅(1978-),女,江苏徐州人,讲师,硕士,主要研究方向为有限群。

入;

(2)若 $K\lhd G$,则 HK/K 在 G/K 中 S - 拟正规嵌入。

引理4[10] 设 $\mathscr{F}$ 是包含所有超可解群系 $\mathscr{U}$ 的饱和群系,则 $G\in\mathscr{F}$ 当且仅当 G 有一个正规子群 H,使得 $G/H\in\mathscr{F}$,并且 $F^*(G)$ 的所有 Sylow 子群的极大子群在 G 中 S - 拟正规。

引理5[11] 群 G 的半正规子群一定是 S - 半正规子群。

引理6[9] 群 G 的拟正规子群一定是半正规子群。

引理7[12] 对于 G 的任意次正规子群 H,如果 H 是 π 群,则 $H\leqslant O_\pi(G)$。

引理8[4] 如果 G 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中 S - 半正规,则 G 超可解。

引理9[3] 如果 G 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中 S - 拟正规嵌入,则 G 超可解。

引理10[9] 如果 G 的极小子群及4阶循环子群在 G 中 S - 半正规,则 G 超可解。

引理11[13] 设 $\mathscr{F}$ 是包含所有超可解群系 $\mathscr{U}$ 的饱和群系,则 $G\in\mathscr{F}$ 当且仅当 G 有一个正规子群 H,使得 $G/H\in\mathscr{F}$,并且 $F^*(G)$ 的极小子群及4阶循环子群在 G 中 S - 拟正规。

引理12[14] 如果 G 的极小子群及4阶循环子群在 G 中 S - 拟正规嵌入,则 G 超可解。

2 主要结果

定理1 设 $\mathscr{F}$ 是包含所有超可解群系 $\mathscr{U}$ 的饱和群系,则下列条件等价:

(i) $G\in\mathscr{F}$;

(ii)存在 G 的正规子群 H,使得 $G/H\in\mathscr{F}$ 且 $F^*(H)$ 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中拟正规;

(iii)存在 G 的正规子群 H,使得 $G/H\in\mathscr{F}$ 且 $F^*(H)$ 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中 S - 拟正规;

(iv)存在 G 的正规子群 H,使得 $G/H\in\mathscr{F}$ 且 $F^*(H)$ 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中 S - 半正规;

(v)存在 G 的正规子群 H,使得 $G/H\in\mathscr{F}$ 且 $F^*(H)$ 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中半正规;

(vi)存在 G 的正规子群 H,使得 $G/H\in\mathscr{F}$ 且 $F^*(H)$ 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中 S - 拟正规嵌入。

证明:(i)$\Rightarrow$(ii)在 G 中令 $H=1$ 可得。(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(iv)以及(iii)$\Rightarrow$(vi) 由定义直接可得。(iii)$\Rightarrow$(i)由引理4直接可得。(ii)$\Rightarrow$(v)由引理6可得。(v)$\Rightarrow$(iv)由引理5可得。

下证(iv)$\Rightarrow$(iii)。

由引理1,$F^*(H)$ 的 Sylow 子群的极大子群在 $F^*(H)$ 中 S - 半正规。

由引理8,$F^*(H)$ 超可解,当然可解。由引理2,$F^*(H)=F(H)$。任取 $p\mid F(H)$,设 P_1 是 $F(H)$ 的 Sylow p - 子群的任意极大子群 P。因为 P 在 G 中正规,所以 P_1 是 G 的次正规子群。由引理7,$P_1\leqslant O_p(G)$。设 Q 是 G 的任意 Sylow q - 子群。若 $p=q$,则由 $P_1\leqslant O_p(G)\leqslant Q$ 可知,$P_1Q=QP_1=Q$。若 $p=q$,则由 P_1 在 G 中 S - 半正规可知 $P_1Q=QP_1$。故由定义得 P_1 在 G 中 S - 拟正规。

再证(vi)$\Rightarrow$(iii)。

由引理3,$F^*(H)$ 的 Sylow 子群的极大子群在 $F^*(H)$ 中 S - 拟正规嵌入。由引理9,$F^*(H)$ 超可解,当然可解。由引理2,$F^*(H)=F(H)$。任取 $p\parallel F(H)\mid$,设 P_1 是 $F(H)$ 的 Sylow p - 子群 P 的任意极大子群。因为 P 在 G 中正规,所以 P_1 是 G 的次正规子群。由引理7,$P_1\leqslant O_p(G)$。由题设 P_1 在 G 中 S - 拟正规嵌入,则存在 G 的一个 S - 拟正规子群 K,使得 P_1 是 K 的 Sylow p - 子群。设 Q 是 G 的任意 Sylow q - 子群。若 $p=q$,则由 $P_1\leqslant O_p(G)\leqslant Q$ 可知,$P_1Q=QP_1=Q$。若 $p\neq q$,则 P_1 是 KQ 的次正规 Hall 子群,从而 $P_1\lhd KQ$,故 $P_1Q=QP_1$。由定义得到 P_1 在 G 中 S - 拟正规。

注:(1) 当 H 可解时,$F^*(H)=F(G)$,定理1推广了文献[6]中的主要定理。

(2) (i)$\Leftrightarrow$(vi)即文[14]中定理1.1,证明比较繁。定理1的证明方法简化了其证明过程.

推论1 设 $\mathscr{F}$ 是包含所有超可解群系 $\mathscr{U}$ 的饱和群系。则 $G\in\mathscr{F}$ 的充分必要条件是 $F^*(G^{\mathscr{F}})$ 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中拟正规(S - 拟正规,S - 半正规,半正规,S - 拟正规嵌入)。

推论2 如果 $F^*(H)$ 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中拟正规(S - 拟正规,S - 半正规,半正规,S - 拟正规嵌入),则 G 超可解。

定理2 设 $\mathscr{F}$ 是包含所有超可解群系 $\mathscr{U}$ 的饱和群系,则下列条件等价:

(i) $G\in\mathscr{F}$;

(ii)存在 G 的正规子群 H,使得 $G/H\in\mathscr{F}$ 且 $F^*(H)$ 的极小子群及4阶循环子群在 G 中拟正

规;

(iii)存在 G 的正规子群 H,使得 $G/H\in\mathscr{F}$且 $F^*(H)$的极小子群及4阶循环子群在 G 中 S-拟正规;

(iv)存在 G 的正规子群 H,使得 $G/H\in\mathscr{F}$且 $F^*(H)$的极小子群及4阶循环子群在 G 中 S-半正规;

(v)存在 G 的正规子群 H,使得 $G/H\in\mathscr{F}$且 $F^*(H)$的极小子群及4阶循环子群在 G 中半正规。

(vi)存在 G 的正规子群 H,使得 $G/H\in\mathscr{F}$且 $F^*(H)$的极小子群及4阶循环子群在 G 中 S-拟正规嵌入。

证明:(i)⇒(ii)在 G 中令 $H=1$ 可得。(ii)⇒(iii)⇒(iv)以及(iii)⇒(vi) 由定义直接可得。(iii)⇒(i)由引理11直接可得。(ii)⇒(v)由引理6可得。(v)⇒(iv)由引理5可得。

下证(iv)⇒(iii)。

由引理1,$F^*(H)$的极小子群及4阶循环子群在 $F^*(H)$中 S-半正规。由引理10,$F^*(H)$超可解,当然可解。由引理2,$F^*(H)=F(H)$。任取 $F(H)$的极小子群或4阶循环子群$\langle x\rangle$,则由$\langle x\rangle$在 $F(H)$中次正规及设 $F(H)$在 G 正规有$\langle x\rangle$是 G 的次正规子群。运用定理1的证明方法可得$\langle x\rangle$在 G 中 S-拟正规 .

再证(vi)⇒(iii)。由引理3,$F^*(H)$的极小子群及4阶循环子群在 $F^*(H)$中 S-拟正规嵌入。由引理12,$F^*(H)$超可解、当然可解。由引理2,$F^*(H)=F(H)$。任取 $F(H)$的极小子群或4阶循环子群$\langle x\rangle$,则由$\langle x\rangle$在 $F(H)$中次正规及设 $F(H)$在 G 中正规有$\langle x\rangle$是 G 的次正规子群. 运用定理1的证明方法可得$\langle x\rangle$在 G 中 S-拟正规。

注:(1) 当 H 可解时,$F^*(H)=F(H)$,定理2推广了[7]中的主要定理。

(2) (i)⇒(vi)即文[14]中定理1.2,证明比较繁。定理2的证明方法简化了其证明过程。

推论3 设$\mathscr{F}$是包含所有超可解群系$\mathscr{U}$的饱和群系。则 $G\in\mathscr{F}$的充分必要条件是 $F^*(G^{\mathscr{F}})$的极小子群及4阶循环子群在 G 中拟正规(S-拟正规,S-半正规,半正规,S-拟正规嵌入)。

证明:运用文献[13]中的推论3.4和定理2的证明方法即可。

推论4 如果 $F^*(G)$的极小子群及4阶循环子群在 G 中拟正规(S-拟正规,S-半正规,半正规,S-拟正规嵌入),则 G 超可解。

推论5 设$\mathscr{F}$是包含所有超可解群系$\mathscr{U}$的饱和群系,G 的 Sylow 2-子群交换(或 G 为2幂零群),则 $G\in\mathscr{F}$当且仅当存在 G 的正规子群 H,使得 G/H$\in\mathscr{F}$且 $F^*(H)$的极小子群在 G 中拟正规(S-拟正规,S-半正规,半正规,S-拟正规嵌入)。

参考文献:

[1] Ore O. Contributions to the theory of groups[J]. Duke Math. J,1939,5:431-460.
[2] Kegal O H. Sylow grouppen and subnormalteiler endlicher grouppen[J]. Math. Z,1962,78:202-221.
[3] Ballester-Bolinches A,Pedraza-Aguilera M C. Sufficient conditions for supersolvability of finite groups[J]. J. Pure Appl. Algebra,1998,127:113-118.
[4] 陈重穆. 内外-群与极小非群[M]. 重庆:西南师范大学出版社,1988.
[5] 苏向盈. 有限群的半正规子群[J]. 数学杂志,1988,8(1): 5-10.
[6] Asaad M. On maximal subgroups of sylow subgroups of finite groups[J]. Comm. Algebra,1998,26(11):3 647-3 652.
[7] Asaad M. Psrg. The influence of minimal subgroups on the structure of finite groups[J]. Arch. Math,1999,72:401-404.
[8] Huppert B,Blackburn N. Finite Groups Ⅲ[M]. New York:Springer-Verlag,1982.
[9] 张勤海,王丽芳. 半置换子群对群结构的影响[J]. 数学学报,2005,48(1):81-83.
[10] Li Yangming, Wang Yanming, Wei Huaquan. The influence of -quasinormality of some subgroups of finite group[J]. Arch. Math,2003,81:245-252.
[11] 黎前修. 极小子群与超可解性[J]. 数学杂志,1996,16(2):129-132.
[12] Guo Wenbin,The theory of classes of groups[M]. Beijing:Science Press-Kluwer Academic Publishers,2000.

(下转第22页)

参考文献:

[1] Moriconi F. The submartingale assumption in risk theory[J]. Insurance. Math Econom, 1986, 5:295 - 304.

[2] Delbaen F, Haezendonck J. Classical risk theory in an economic environment[J]. Insurance Math Econom, 1987, 6:85 - 116.

[3] Paulsen J. Ruin theory with compounding assets - a survey[J]. Insurance Math Econom, 1998, 22:3 - 16.

[4] Paulsen J, Gjessing H. Ruin theory with stochastic return on investments[J]. Adv. Appl Probab, 1997, 29:965 - 985.

[5] Wang G, Wu, R. Distributions for the risk process with a stochastic return on investments[J]. Stochastic Process Appl, 2001, 95:, 329 - 341.

[6] Protter P. Stochastic Integration and Differential Equations[M]. Berlin: A New ApproachSpinger, 1992:235 - 240.

Risk Model Under a Stochastic Economic Environment

LU Wen-lin[1], ZHOU Hong-wei[2]

(1. Department of Foundamental Science Teaching, Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224051, China; 2. Department of Mathematics, Nan Jing Xiao Zhuang College, Jiangsu Nanjing 211171, China)

Abstract: The study of the ruin probability has been one of the important topics in the field of risk theory. We discuss a general risk model of an insurance company, which allows for stochastic rate of return on investments as well as stochastic level of inflation. The integral equations of ruin probability, and the integro - differential equation for the ultimate ruin probability are obtained.

Keywords: ruin probability; differential equation; risk model

(责任编辑:张英健; 校对:沈建新)

(上接第19页)

[13] Li Yangming, Wang Yanming. The influence of minimal subgroups on the structure of finite groups[J]. Proc. Amer. Math. Soc, 2003, 131(12):337 - 341.

[14] Li Yangming, Wang Yanming, Wei Huaquan. On - quasinormally embedded subgroups of finite group[J]. Journal of Algebra, 2004, 281:109 - 123.

The Generalized Fitting Subgroup

ZHANG Xue-mei[1], LI Chang-wen[2]

(1. Department of Basic Sciences, Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224003, China; 2. School of Mathematical Science, Xuzhou Normal University, Jiangsu Xuzhou 221116, China)

Abstract: The generalized Fitting subgroup $F^*(G)$ of G is the unique maximal normal quasinilpotent subgroup of the quasi - nilpotent subgroup of G. In this paper, we extend and improve Asaad's results by using some properties of subgroups of the generalized Fitting subgroup $F^*(G)$ to invetigate the property and structure of some finite groups.

Keywords: $F^*(G)$; maximal subgroup of Sylow subgroup; minimal subgroup

(责任编辑:张英健; 校对:沈建新)