第17卷第1期 数学研究与评论 Vol.17 No.1
1997年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1997

偏序集的完备化*

杨安洲 (北京工业大学数学系, 北京100022)
岑嘉评 (香港中文大学数学系)

摘　要　首先给出了偏序集的一些完备化的具体构造, 又给出了关于完备格中完备子集的某些有用的定理, 最终解决了关于偏序集的所有可能的完备化问题

关键词　偏序集, 完备格, 偏序集的完备化
分类号　AMS(1991) 06A23/CCL O144

§1　偏序集的一些完备化的具体构造

设$(A, \leq)$是偏序集, A 是集, 二元关系$\leq$满足:

(1)　$a\leq a, \forall a\in A$;

(2)　$a\leq b \ \&\ b\leq a\Rightarrow a=b$;

(3)　$a\leq b \ \&\ b\leq c\Rightarrow a\leq c$.

也有时把偏序关系$\leq$记为$R=\{(a, b): a\in A \ \&\ b\in A \ \&\ a\leq b\}=\{(a, b): a, b\in A \ \&\ aRb\}$.

对$a\in A$, 作$I(a)=\{y\in A: y\leq a\}$叫做以a为上界的主理想, 则有: $I(a)\neq\varnothing$, $I(a)\subseteqq A$. 映射I的定义域为$\mathrm{domain}(I)=A$, A 在I下的像为$\mathrm{image}(I)=\{I(a): a\in A\}\subseteqq \mathbf{P}(A)=\{B: B\subseteqq A\}$, 其中$\mathbf{P}(A)$为$A$ 的幂集, $a\leq b\Rightarrow I(a)\subseteqq I(b)$, $I(a)\subseteqq I(b)\Rightarrow a\leq b$, 所以$I$是1对1的双方保序的映射, $(A, \leq)$同构于$(\{I(a): a\in A\}, \subseteqq)$, 即$(A, \leq)\cong(\{I(a): a\in A\}, \subseteqq)$, I为同构映射, 包含关系$\subseteqq$作为$\mathbf{P}(A)$以及$\{I(a): a\in A\}$中的"元素"(实际是A 的子集之间) 之间的偏序关系

令α是一个序数, $\alpha\neq 0$, 则

$$\alpha=\{k: k<\alpha\}=\{0, 1, 2, \cdots, k, \cdots\}_{k<\alpha}$$

$$A^{\alpha}=\{(a_0, a_1, \cdots, a_k, \cdots): k<\alpha \ \&\ a_k\in A\},$$

$$\mathbf{P}(A^{\alpha})=\{S: S\subseteqq A^{\alpha}\}, s\in S\Rightarrow s=(a_0^{(s)}, a_1^{(s)}, \cdots, a_k^{(s)}, \cdots)_{k<\alpha}$$

$$\mathbf{M}_{\alpha}^{(1)}(A)\overset{df.}{=}\{\bigcap_{k<\alpha} I(a_k^{(s)}): s\in A^{\alpha}\}\supseteqq\{I(a): a\in A\},$$

$$\mathbf{M}_{\alpha}^{(2)}(A)\overset{df.}{=}\{\bigcup_{k<\alpha} I(a_k^{(s)}): s\in A^{\alpha}\}\supseteqq\{I(a): a\in A\}.$$

作

$$\mathbf{C}_{\alpha}^{(1)}(A)=\{X: (\exists S\in P(A^{\alpha}))(X=\bigcup_{s\in S}(\bigcap_{k<\alpha} I(a_k^{(s)})))\},$$

* 1994年7月20日收到

$$\mathbf{C}_\alpha^{(2)}(A)=\{X:(\exists S\in P(A^\alpha))(X=\bigcap_{s\in S}(\bigcap_{k<\alpha} I(a_k^{(s)})))\},$$
$$\mathbf{L}_\alpha^{(1)}(A)=\{X:(\exists S\in P(A^\alpha))(X=\bigcup_{s\in S}(\bigcup_{k<\alpha} I(a_k^{(s)})))\},$$
$$\mathbf{L}_\alpha^{(2)}(A)=\{X:(\exists S\in P(A^\alpha))(X=\bigcap_{s\in S}(\bigcup_{k<\alpha} I(a_k^{(s)})))\},$$

则有:

(i) $\{I(a):a\in A\}\subseteqq\mathbf{C}_\alpha^{(1)}(A)\subseteqq\mathbf{P}(A)$, $\{I(a):a\in A\}\subseteqq\mathbf{C}_\alpha^{(2)}(A)\subseteqq\mathbf{P}(A)$,

$\{I(a):a\in A\}\subseteqq\mathbf{L}_\alpha^{(1)}(A)\subseteqq\mathbf{P}(A)$, $\{I(a):a\in A\}\subseteqq\mathbf{L}_\alpha^{(2)}(A)\subseteqq\mathbf{P}(A)$;

(ii) $\mathbf{C}_\alpha^{(1)}(A),\mathbf{L}_\alpha^{(1)}(A)$在集合的“并运算”下是封闭的; $\mathbf{C}_\alpha^{(2)}(A),\mathbf{L}_\alpha^{(2)}(A)$在集合的“交运算”下是封闭的, 因此$\mathbf{C}_\alpha^{(1)}(A),\mathbf{C}_\alpha^{(2)}(A),\mathbf{L}_\alpha^{(1)}(A),\mathbf{L}_\alpha^{(2)}(A)$在$\subseteqq$下是完备格. 所以, 它们都是$(A,\leq)\cong(\{I(a):a\in A\},\subseteqq)$的完备化.

对偶地, 用以a为下界的主滤子$F(a)=\{y\in A:y\geq a\}$代替以a为上界的主理想$I(a)$来作也可得到$(A,\leq)$的完备化, 不过要注意的是: 要用$\supseteqq$来代替$\subseteqq$.

§2 关于完备格中完备子集的某些定理

在这一节里所叙述的定理, 不仅为下面的两节作好准备, 而且它们本身也是有独立的意义和价值的, 也是十分有趣的结果.

定理1 设$(L,\leq,\vee,\wedge,0,1)$是一个完备格, φ是保序的L的自映射, 则$\mathrm{Fix}(\varphi)=\{x\in L:\varphi(x)=x\}$在$\leq$下也是一个完备格.

定理2 设$(L,\leq,\vee,\wedge,0,1)$是一个完备格, $C\subseteq L$, 则: C在$\leq$下为完备格$\Leftrightarrow$存在一个保序的、幂等的L的自映射φ使得$\mathrm{Fix}(\varphi)=\{x\in L:\varphi(x)=x\}=\mathrm{image}(\varphi)=\{\varphi(x):x\in L\}=C$.

定理1. 2的证明请见[4].

定理3 设$(L,\leq,\vee,\wedge,0,1)$是一个完备格, $M\subseteqq L$, 对任$x\in L$定义$\varphi(x)=\vee\{y\in M:y\leq x\}$, 则有:

(1) $\varphi(x)\leq x,\ \forall x\in L$;

(2) $x\in M\Rightarrow\varphi(x)=x$;

(3) $u\leq v\Rightarrow\varphi(u)\leq\varphi(v)$;

(4) $\varphi(\varphi(x))=\varphi(x)$;

(5) $\mathrm{Fix}(\varphi)=\{x\in L:\varphi(x)=x\}$在$\leq$下是一个完备格;

(6) $M\subseteqq\mathrm{Fix}(\varphi)=\mathrm{image}(\varphi)\subseteqq L$.

定理4 设$(L,\leq,\vee,\wedge,0,1)$是一个完备格, $M\subseteqq L$, 对任$x\in L$定义$\psi(x)=\wedge\{y\in M:y\geq x\}$, 则有:

(1) $\psi(x)\geq x$;

(2) $x\in M\Rightarrow\psi(x)=x$;

(3) $u\leq v\Rightarrow\psi(u)\leq\psi(v)$;

(4) $\psi(\psi(x))=\psi(x)$;

(5) $\mathrm{Fix}(\psi)=\{x\in L:\varphi(\psi)=x\}$在$\leq$下是一个完备格;

(6) $M \subseteq \mathrm{Fix}(\psi) = \mathrm{image}(\psi) \subseteq L$.

定理3, 4的证明方法与定理2的证明方法一样.

§3 关于$\mathbf{C}_\alpha^{(1)}(A)$, $\mathbf{C}_\alpha^{(2)}(A)$, $\mathbf{L}_\alpha^{(1)}(A)$, $\mathbf{L}_\alpha^{(2)}(A)$的又一生成方法

在§1中, 当进行到$\mathbf{M}_\alpha^{(1)}(A)$与$\mathbf{M}_\alpha^{(2)}(A)$之后, 就已有:

$$\{I(a): a\in A\}\subseteq \mathbf{M}_\alpha^{(1)}(A)\subseteq \mathbf{P}(A),\ \{I(a): a\in A\}\subseteq \mathbf{M}_\alpha^{(2)}(A)\subseteq \mathbf{P}(A),$$

现在用§2中的定理3与定理4, $\mathbf{P}(A)$作为定理3, 4中的$\mathbf{L}$, $\mathbf{M}_\alpha^{(1)}(A)$与$\mathbf{M}_\alpha^{(2)}(A)$作为定理3, 4中的$M$, 则$\varphi$与$\psi$的$\mathrm{Fix}(\varphi)$, $\mathrm{Fix}(\psi)$恰好就是$\mathbf{C}_\alpha^{(1)}(A)$, $\mathbf{C}_\alpha^{(2)}(A)$, $\mathbf{L}_\alpha^{(1)}(A)$, $\mathbf{L}_\alpha^{(2)}(A)$.

至于$\mathbf{C}_\alpha^{(1)}(A)$, $\mathbf{C}_\alpha^{(2)}(A)$, $\mathbf{L}_\alpha^{(1)}(A)$, $\mathbf{L}_\alpha^{(2)}(A)$的对偶情况(用主滤子$F(a)$;$\mathbf{M}_\alpha^{(1)}(A)$, $\mathbf{M}_\alpha^{(2)}(A)$构成方法一样; 然后用定理3, 4), 也可类似地得到

§4 偏序集的所有的完备化

定义 设$(A, \leq_A)$是偏序集, 若偏序集$(C, \leq_C)$满足: (1) $(C, \leq_C)$是完备格; (2) 能把$(A, \leq_A)$嵌入到$(C, \leq_C)$中去(即存在有一个1对1的、双方保序的映射$f: A\to C$. 再说得详细些, f 是函数,

$$\begin{aligned}&\mathrm{domain}(f) = A,\ \mathrm{image}(f)\subseteq C,\ x_1\neq x_2\\ &\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2),\ x_1\leq_A x_2\\ &\Leftrightarrow f(x_1)\leq_C f(x_2),\ \forall x_1, x_2\in A,\ \forall f(x_1), f(x_2)\in \mathrm{image}(f),\end{aligned}$$

则称$(C, \leq_C)$是$(A, \leq_A)$的一种完备化

引理1 设$(A, \leq_A)$是偏序集, 若$(A, \leq_A)$的任一完备化是$(C, \leq_C)$, 则一定存在有$B\supseteq A$, 在$\mathbf{P}(B)$中存在有子族$\mathbf{F}$与$\mathbf{C}$使得

$$(A, \leq_A)\cong(\mathbf{F}, \subseteq),\ (C, \leq_C)\cong(\mathbf{C}, \subseteq),\ \mathbf{F}\subseteq\mathbf{C}\subseteq\mathbf{P}(B),$$

$\mathbf{C}$ 在 $\subseteq$ 下是完备格, 其中$\mathbf{P}(B) = \{X: X\subseteq B\}$是$B$ 的幂集

证明 因为$(C, \leq_C)$是$(A, \leq_A)$的完备化, 则:

(1) $(C, \leq_C)$是完备格; (2) 存在映射$f: A\to C$, f 是1对1的且是双方保序的

$$(A, \leq_A)\overset{f}{\cong}(A^*, \leq_*),\ A^* = \mathrm{image}(f) = \{f(x): x\in A\},$$

$\leq_*$ 是 $\leq_C$ 对A^* 的限制 $(C - A^*)\cap A^* = \varnothing$, 对$C - A^*$ 作一个1对1的映射g,

$$\mathrm{domain}(g) = C - A^*,\ \mathrm{image}(g) = D,$$

且使$D\cap A = \varnothing$, 令$B\overset{\mathrm{def}}{=}A\cup D\supseteq A$, $h\overset{\mathrm{def}}{=}f^{-1}\cup g$, 则$h: C\to B$ 是1对1的且是映上的,

$$\leq_B\overset{\mathrm{def}}{=}\{(h(y_1), h(y_2)): y_1\in C\ \&\ y_2\in C\ \&\ y_1\leq_C y_2\},$$

则$(C, \leq_C)\overset{h}{\cong}(B, \leq_B)$, $A\subseteq B$, $\leq_A\subseteq\leq_B$, $(B, \leq_B)$是完备格. 作映射$I: B\to\mathbf{P}(B)$, 对任$b\in B$, $I(b) = \{y\in B: y\leq b\}$, 在$I$ 下有:

$$(A, \leq_A)\overset{I}{\cong}(\{I(a): a\in A\}, \subseteq),\ (B, \leq_B)\overset{I}{\cong}(\{I(b): b\in B\}, \subseteq),$$

$\{I(a): a \in A\} \subseteqq \{I(b): b \in B\}$, $\mathbf{F} \overset{\text{def}}{=} \{I(a): a \in A\}$,

$\mathbf{C} = \{I(b): b \in B\}$, $\mathbf{F} \subseteqq \mathbf{C} \subseteqq \mathbf{P}(B)$,

C 在 $\subseteqq$ 下是完备格

引理 2 设 $(A, \leq_A)$ 是偏序集, 集合 $B \supseteqq A$, 在 $\mathbf{P}(B)$ 中有子族 $\mathbf{F}$, $\mathbf{C}$ 满足: (1) $(A, \leq_A) \cong (\mathbf{F}, \subseteqq)$; (2) $\mathbf{F} \subseteqq \mathbf{C} \subseteqq \mathbf{P}(B)$; (3) $(\mathbf{C}, \subseteqq)$ 是完备格, 则 $(\mathbf{C}, \subseteqq)$ 是 $(A, \leq_A)$ 的一种完备化

定理 设 $(A, \leq_A)$ 是偏序集, 任取 $B \supseteqq A$, 任取 $\leq_B \supseteqq \leq_A$, 对任 $b \in B$ 作 $I(b) = \{y \in B: y \leq b\}$, 在 I 下得 $\mathbf{F} = \{I(a): a \in A\}$, $\mathbf{F} \subseteqq \mathbf{C} \subseteqq \mathbf{P}(B)$, $\mathbf{C}$ 在 $\subseteqq$ 下是完备格, 则: 当 B 变动, $\leq_B$ 变动, $\mathbf{C}$ 变动时得到的所有的 $(\mathbf{C}, \subseteqq)$ 就是 $(A, \leq_A)$ 的所有的完备化 或者, 在得到 $\mathbf{F}$ 之后, 作 $\Phi(B, \leq_B) = \{\varphi: \varphi \in \mathbf{P}(B)^{\mathbf{P}(B)}, \varphi$ 是幂等的且保序, $\mathbf{F} \subseteqq \mathrm{Fix}(\varphi)\}$, 其中 $\mathbf{P}(B)^{\mathbf{P}(B)}$ 表示定义域为 $\mathbf{P}(B)$ 取值在 $\mathbf{P}(B)$ 内(包括 onto 在内的) 的所有的映射, 则: 当 B 变动, $\leq_B$ 变动, φ 变动时得到的所有的 $(\mathrm{image}(\varphi), \subseteqq)$ 就是 $(A, \leq_A)$ 的所有的完备化

证明 用完备化的定义、引理 1、引理 2 及 §2 中的定理 2 即得

参 考 文 献

[1] G. Birkhoff, *Lattice theory*, New York, 1948.

[2] P. M. Cohn, *Universal Algebra*, London, 1965.

[3] K. Kuratowski & A. Mostowski, *Set theory*, Amsterdam, 1976.

[4] 岑嘉评、杨安洲, 完备格中的完备子集与它们相关的映射, 待出版

On the Completions of Posets

Yang Anzhou

(Dept. of Math., Beijing Polytechnic University, 100022)

K. P. Shum

(Dept. of Math., The Chinese University of Hong Kong)

Abstract

In this paper, all possible completions of a given poset are obtained and construction of several completions of a poset is descrided.