第23卷第2期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 2
2003年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2003

l-群的极大下子群*

吕 新 民[1,2]

(1. 南京大学数学系，江苏 南京 210093；2. 南方冶金学院理学院，江西 赣州 341000)

摘 要：在非正规值的条件下，给出 l-群极大下子群的唯一表达形式，由此推广[1]中的一个结果. 与此同时，建立了正规值 l-群，特殊值 l-群及有限值 l-群之间等价的一个充要条件.

关键词：. l-群；极大下子群；正规值 l-群；特殊值 l-群；有限值 l-群.

分类号：AMS(2000) 06F15/CLC number：O153.1

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2003)02-0339-04

在[1]中，R. N. Ball，P. Conrad 及 M. Darnel 研究了 l-群的上子群及下子群，并在 l-群是正规值的条件下，给出了极大下子群的唯一表达形式，利用这一形式得到了一系列结果. 本文通过下子群的又一刻划，在非正规值的条件下，给出了极大下子群完全相同的唯一表达形式，由此推广并可以改进[1]中部分结果.

正规值 l-群类、特殊值 l-群类及有限值 l-群类作为一种自然的包含关系，在什么条件下这三类 l-群之间等价. 这在 l-群的分类问题中是一个十分有意义的问题. 本文在正规值条件下，研究了极大下子群的特征，并由此建立这三类 l-群之间等价的一个充要条件.

文中所用记号与概念均与[1－3]一致.

命题1 G 是 l-群，$0 < a.b \in G$，$\triangle(a) \cap \triangle(b) = \varnothing$，则 b 是 a 的下元当且仅当

$$b \in \bigcap_{r \in \triangle(a)} G_r.$$

证明 *必要性.* 假定存在 $r \in \triangle(a)$，使得 $b \notin G_r$. 由 Zorn 引理，必存在 $\delta \in \mathrm{Val}_G(b)$ 使得 $G_r \subseteq G_\delta$，由题设 $\triangle(a) \cap \triangle(b) = \varnothing$，则 $G_r \subset G_\delta$，从而 $G^r \subseteq G_\delta$，又 $b \notin G_\delta$，必然 $b \notin G^r$，于是 $G_r < G_{r+a} < G_{r+b}$. 这与[1]中命题1.1矛盾，必要性得证.

充分性. 假定 b 不是 a 的下元，必存在某个自然数 n，使得 $n(a \wedge b) \nleq a$，直接计算易知：

$$n(a \wedge b) \leqslant na \wedge nb,$$

于是 $na \wedge nb \nleq a$. 从而 $(na \wedge nb - a)^+ > 0$，令 M 是不含 $(na \wedge nb - a)^+$ 的 G 的素子群. 于是

$$M_{+(na \wedge nb-a)^+} = M_{+(na \wedge nb-a)} \vee M > M,$$

即 $M_{+(na \wedge nb)} > M_{+a}$，从而 $M_{+nb} \geqslant M_{+(na \wedge nb)} > M_{+a}$. 显然 $a \notin M$（否则 $(na \wedge nb - a)^+ \in M$ 矛盾）. 必存在 $r \in \triangle(a)$，使得 $M \subseteq G_r$. 从而 $G_{r+nb} \geqslant G_{r+a}$. 然而 $b \in G_r$，即 $G_r \geqslant G_{r+a}$. 这显然是不成立的. 故 b 是 a 的下元.

* 收稿日期：2000-11-27

作者简介：吕新民(1965-)，男，硕士，副教授.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

由此易得：

定理 2　G 是 l-群，A,B 均是 G 的子群，$\triangle(A)\cap\triangle(B)=\varnothing$，则 B 是 A 的下子群当且仅当 $B\subseteq\bigcap G_r$. 特别地，如果 B 是 A 的极大下子群，则

$$B=\bigcap_{r\in\triangle(A)}G_r.$$

推论 3[1]　G 是正规值 l-群，B 是 A 的极大下子群，则

$$B=\bigcap_{r\in\triangle(A)}G_r.$$

证明　由定理 2，只须证 $\triangle(A)\cap\triangle(B)=\varnothing$ 即可，若不然，必存在 $0<a\in A,0<b\in B$ 且可取 $M\in\triangle(a)\cap\triangle(b)$，显然 $a,a\wedge b\in M^*\backslash M$($M^*$ 表示 M 在 $C(G)$ 中的覆盖). 因 G 是正规值的，$M\lhd M^*$ 且 $M^*/M\cong R$ 的某个子群，由阿基米德性，存在某个自然数 n，使得

$$M_{+a}\leqslant M_{+n(a\wedge b)}\leqslant M_{+nb}.$$

b 是 a 的下元，这与[1]中命题 1.1 矛盾.

为建立正规值 l-群，特殊值 l-群及有限值 l-群之间等价性条件，我们将改进[4]中的一个结果.

命题 4　l-群 G 是特殊值的当且仅当 G 的每个非特殊值不是闭的且 G 的每个严格正元至少有一个特殊值.

证明　*充分性*. 对于 $\forall\ 0<g\in G$，当 g 是特殊元或有限个分离特殊元之并时，结论自然成立. 若不然，g 必有非特殊值. 令 $\{U_i|i\in I\}$ 是 g 的所有不同的非特殊值，而 g 的无限个不同的特殊值用 $\{V_j|j\in J\}$ 表示，由[4]引理 1，对于 $\forall\ j\in J$，选取 $x_j\in G$ 满足 $0<x_j\leqslant g$ 且 V_j 是 x_j 的唯一值，又如果对于 $\forall\ N\in\Gamma_1(G)$ 且 $N\subseteq V_j$，必有 $N_{+x_j}=N_{+g}$. 因 $\{V_j|j\in J\}$ 是 G 的不同的特殊值，$\{x_j|j\in J\}$ 必是 G 的一组分离元集.

下证：$g=\bigvee_{j\in J}x_j$. 由每个 x_j 之选取，事实上只须验证：对于 $\forall\ 0<h\in G$ 及 $\forall\ j\in J$，当 $x_j\leqslant h$ 时必有 $g\leqslant h$ 即可. 若不然，$g\not\leqslant h$，则 $(-h+g)^+>0$，对于 $\forall\ M\in \mathrm{Val}_G((-h+g)^+)$，

$$M_{+(-h+g)^+}=M_{+(-h+g)\vee 0}=M_{+(-h+g)}\vee M>M$$

故 $M_{+(-h+g)}>M$，即 $M_{+g}>M_{+h}$. 显然 $g\notin M$，否则 $M=M_{+g}>M_{+h}\geqslant M$ 矛盾，由 Zorn 引理，M 必含在 g 的某个值之中，以下分两种情况讨论.

(i) 如果对于某个 $j\in J,M\subseteq V_j$，则 $M_{+g}=M_{+x_j}\leqslant M_{+h}$ 矛盾.

(ii) 由(i)知，M 必含在 g 的某个非特殊值之中，由 M 之任意性，必然 $\mathrm{Val}_G((-h+g)^+)$ 的任何元必含在 $\{U_i|i\in I\}$ 的某元之中，又由题设，$(-h+g)^+$ 至少有一个特殊值，不妨令其为 M，则必存在某个 $i\in I$，使得 $M\subseteq U_i$. 因此 U_i 必是闭的，这与题设矛盾，充分性得证.

必要性. 采用反证法，若不然，即存在 g 的某个非特殊值 U 是闭的，令 $\varphi:x\to U_{+x}$ 是 G 到 $l(U)$（左陪集格）的格同态，由[5]知 φ 保无限并.

由题设令 $g=\bigvee_{\lambda\in\wedge}x_\lambda$，其中 $\{x_\lambda\}\lambda\in\wedge\}$ 是 G 的一组分离特殊元集. $g\notin U$，下证：必存在某个 $\lambda\in\wedge$ 使得 $x_\lambda\notin U$. 若不然，即对于 $\forall\ \lambda\in\wedge$，$x_\lambda\in U$，因 φ 保无限并，有

$$U_{+g}=U_{+\bigvee_{\lambda\in\wedge}x_\lambda}=\bigvee_{\lambda\in\wedge}(U_{+x_\lambda})=\bigvee_{\lambda\in\wedge}U=U$$

故 $g\in U$ 矛盾，又 $0<x_\lambda\leqslant g\in U^*$，则 $x_\lambda\in U^*$，从而 U 必是 x_λ 之值. 但 x_λ 是 G 的特殊元，因而 x_λ 只有唯一值. 故 U 必是 G 的特殊值，这与 U 之选取矛盾.

定理 5　G 是 l-群，以下条件彼此等价

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.   All rights reserved.

(1) G 是有限值的；

(2) G 是特殊值的，且 G 的每个凸 l- 子群均是闭的；

(3) G 是正规值的，且 G 的每个正则子群均是极大下子群.

证明 (1)⇒(2) 是显然的.

(2)⇒(1) 对于 $\forall\ 0<g\in G$，g 的每个值均是凸 l- 子群，由命题4，g 不可能存在非特殊值，即 g 的每个值均是特殊的，故 G 是有限值的.

(1)⇒(3) G 是正规值的显然，对于 $\forall\ M\in\Gamma_1(G)$，$M=\bigcap\{G_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$，因 M 是素的，则 Λ 构成一条链. 又 G 是有限值的，每个 G_λ 均是特殊的. 因此，对于 $\forall\ \lambda\in\Lambda$，取特殊元 $a_\lambda\in G^\lambda\backslash G_\lambda$，且令 A 是由 $\{a_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 生成的子群，必然 $\Lambda=\triangle(A)$. 即有 $M=\bigcap_{\lambda\in\triangle(A)}G_\lambda$，故 M 必是 A 的极大下子群.

(3)⇒(1) 对于 $\forall\ M\in\Gamma_1(G)$，令 M 是 A 的极大下子群，由推论3，$M=\bigcap_{\lambda\in\triangle(A)}G_\lambda$. 一方面，$M$ 是素的，则 A 必是全序的. 从而 A 中每个元均特殊的，即对于 $\forall\ \lambda\in\triangle(A)$，$G_\lambda$ 必是特殊的. 另一方面，M 是正则的，M 必是交既约的. 即存在某个 $\lambda\in\triangle(A)$，使得 $M=G_\lambda$，故 M 必是特殊的，即 G 是有限值的.

作为本文的结束，我们将给出正规值 l- 群的一个十分有趣的结果.

命题 6 G 是正规值 l- 群，$T=\{x\in G|x\ll U,U$ 是 G 之强单位元$\}$，则

$$T=\bigcap\{M|M\text{ 是 }G\text{ 的极大凸 }l\text{- 子群}\}.$$

证明 对于 $\forall\ x\notin T$，必存在某个自然数 n，使得 $nx\nleq u$，从而 $(-u+nx)^+>0$，取 $N\in\mathrm{Val}_G((-u+nx)^+)$，$N\neq G=G(u)$，则 $u\notin N$，由 Zorn 引理，必存在 $M\in\mathrm{Val}_G(u)$，使得 $N\subseteq M$，因 u 是强单位元，M 必是 G 之极大凸 l- 子群，又

$$N_{+(-u+nx)}=N_{+(-u+nx)^+-(-u+nx)^-}=N_{+(-u+nx)^+}>N$$

(注：$(-u+nx)^+\wedge(-u+nx)^-=0$，由 N 之素性，$(-u+nx)^-\in N$). 从而必存在 $v\in N$，使得 $-u+nx>v$，即 $nx>u+v$，于是

$$M_{+nx}\geqslant M_{+(u+u)}=M_{+u}>M,$$

故 $x\notin M$，即 $T\supseteq\bigcap\{M|M$ 是 G 的极大凸 l- 子群$\}$.

又令 M 是 G 的任意一个极大凸 $l-$ 子群，下证 $T\subseteq M$. 若不然，取 $0<x\in T\backslash M$，则对于任意自然数 n，$nx\leqslant u$，从而 $M_{+nx}\leqslant M_{+u}$. 但 G 是正规值的，$M\lhd G$，且 $G/M\cong R$ 的某个子群，由阿基米德性知 $M_{+nx}=M$，即 $x\in M$ 矛盾. 故 $T=\bigcap\{M|M$ 是 G 的极大凸 l- 子群$\}$.

推论 7 G 是正规值 l- 群，若 $T=0$，则 G 是一组实群的 l- 亚直和.

参考文献：

[1] BALL R N, CONRAD P, DARNEL M. *Above and below subgroups of a lattice-ordered group* [J]. Trans Amer. Math. Soc., 1986, **297**: 1－40.

[2] BIXLER J P, DARNEL M. *Special-valued l-groups* [J]. Algebra Universalis, 1986, **22**: 172－191.

[3] GLASS A M W, HOLLAND W C. *Lattice-ordered Groups* [M]. Kluwer Academic Publishers, 1989.

[4] 吕新民，谢霖铨. 特殊值 l-群的一个特征 [J]. 南昌大学学报(理科版)，1999，**23**(4)：354－356.
LÜ Xin-min, XIE Lin-quan. *A characteristic of special－valued l-groups* [J]. J. Nanchang Univ.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(Natural Science), 1999, **23**(4): 354—356.
[5] CONRAD P, HARVEY J, HOLLAND W C. *The Hahn embedding theorem for abelian lattice-ordered group* [J]. Trans Amer. Math. Soc., 1963, **108**: 143—169.

Maximal Below Subgroups of a Lattice-Ordered Group

LÜ Xin-min[1,2]
(1. Dept. of Math., Nanjing University, Jiangsu 210093, China;
2. Dept. of Science, Southern Inst. of Metallurgy, Ganzhou 341000, China)

Abstract: The unique form of maximal below subgroups is given for non normal-valued l-group in this paper. In addition, a sufficient and necessary condition on equivalence among normal-valued l-groups. special-valued l-groups and finite-valued l-groups is obtained.

Key words: l-group; maximal below subgroup; normal-valued l-group; special-valued l-group; finite-valued l-group.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.