第23卷第3期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 3
2003年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2003

单位球面中具平行单位平均曲率向量的子流形*

王美娇[1], 李世杰[2]

(1. 广州大学理学院数学系, 广东 广州 510405; 2. 华南师范大学数学系, 广东 广州 510631)

摘 要: 设 M 是 n-维闭黎曼流形, 等距浸入 $(n+p)$-维单位球空间 S^{n+p}, 具有平行的单位平均曲率向量. 若 $S\leqslant\min\{2n/3, 2\sqrt{n-1}\}$, 其中 S 是 M 的第二基本形式长度的平方, 则 M 是 S^{n+p} 的一个 $(n+1)$-维全测地子流形 S^{n+1} 中的超曲面.

关键词: 球面; 平均曲率; 单位平均曲率向量.

分类号: AMS(2000) 53C20, 53C40/CLC O186.16

文献标识码: A 　　**文章编号**: 1000-341X(2003)03-0520-05

1 引言

设 S^{n+p} 是 $(n+p)$- 维单位球空间, M 是等距浸入在 S^{n+p} 的 n- 维闭黎曼流形. 记 A, S 和 H 分别为 M 的第二基本张量、第二基本形式长度平方和平均曲率. 若 M 在 S^{n+p} 中是极小的, 有一个由 J. Simons[5] 得到的关于 S 的拼挤常数 $S\leqslant n/(2-\frac{1}{p})$. 李安民与李季民[2] 把它改进为 $S\leqslant 2n/3$. 若 M 在 S^{n+p} 中具有平行平均曲率向量, 邱成桐[6] 得到拼挤常数 $S\leqslant n/(\sqrt{n}+3-\frac{1}{p-1})$, 并且证明满足上式的 n- 闭子流形必定是 S^{n+p} 中一个 $(n+1)$- 维全测地子流形的超曲面. 莫小欢[3] 讨论具有平行单位平均曲率向量的子流形, 他得到

定理 A[3] 设 M 是等距浸入在 S^{n+p} 的 n- 维闭黎曼流形, 具有平行的单位平均曲率向量. 若 M 的第二基本形式长度平方 S 满足条件(1.1)

$$S\leqslant\max\left\{\frac{n(1+2H^2)}{\sqrt{n}+1},\frac{n(1+H^2)}{\sqrt{n+1}+1}\right\},\tag{1.1}$$

则 M 是 S^{n+p} 中一个 $(n+1)$- 维全测地子流形的超曲面.

与邱成桐的结果相比较, 定理 A 不需要平均曲率 H 为常数的条件, 但是拼挤常数依赖于 H. 本文改进莫小欢的结果, 我们得到

定理 1.1 设 M 是等距浸入在 S^{n+p}, $p\geqslant 2$ 的 n- 维闭黎曼流形, 若 M 具有平行的单位平

* 收稿日期: 2000-06-28

基金项目: 广东省自然科学基金(960179)和国家自然科学基金(19771039)资助项目.

作者简介: 王美娇(1971-), 女, 讲师.

均曲率向量.则有下式成立

$$\int_M (aS - n)(S - S_1) * 1 \geqslant 0, \tag{1.2}$$

其中 $a = \max\{3/2, n/2\sqrt{n-1}\}$, $A_\alpha = A_{e_\alpha}$ 是关于 e_α 的 Weingarten 映照, $S_1 = |A_{n+1}|^2$ 而 $*1$ 表示 M 的体积元.

定理 1.2 设 M 是等距浸入在 S^{n+p} 的 n- 维闭黎曼流形,具有平行的单位平均曲率向量.若 M 的第二基本形式长度平方 S 满足条件

$$S \leqslant \min\left\{\frac{2n}{3}, 2\sqrt{n-1}\right\}, \tag{1.3}$$

则 M 是 S^{n+p} 中一个 $(n+1)$- 维全测地子流形的超曲面.

2 预 备

设 M 是 n- 维闭黎曼流形,等距浸入在 $(n+p)$- 维单位球空间 S^{n+p},在 S^{n+p} 中选取局部幺正标架场 $\{e_1, e_2, \cdots, e_{n+p}\}$ 使得限制在 M 上, $\{e_1, e_2, \cdots, e_{n+p}\}$ 与 M 相切, e_{n+1} 沿 M 在 S^{n+p} 的平均曲率向量.于是有 $\mathrm{tr}A_{n+1} = nH$ 和 $\mathrm{tr}A_\alpha = 0$, $n+2 \leqslant \alpha \leqslant n+p$,并且

$$S = |A|^2 = \sum_{\alpha=n+1}^{n+p} |A_\alpha|^2 = \sum_{\alpha=n+1}^{n+p} \mathrm{tr}A\alpha_\alpha^2.$$

如同 Alenca 和 do Carmo 的[1] 和 Santos 的[4],我们定义双线性映射 $\Phi: TM \times TM \to T^\perp M$ 为 $\Phi(X,Y) = \sum_{\alpha=n+1}^{n+p} \langle \Phi_\alpha X, Y\rangle e_\alpha$,其中 Φ_α 给定为

$$\begin{cases} \Phi_{n+1} = H\mathrm{id} - A_{n+1}, \\ \Phi_\alpha = A_\alpha, \end{cases} \quad n+2 \leqslant \alpha \leqslant n+p, \tag{2.1}$$

于是有 $|\Phi|^2 := \sum_{\alpha=n+1}^{n+p} \mathrm{tr}\Phi_\alpha^2 = S - nH^2$.

我们需要下面分别由 W. Santos[4] 和李安民与李季民[2] 得到的结果.

引理 B[4] 设 B_1 和 B_2 是 n 阶对称方阵.若有 $[B_1, B_2] = 0$ 和 $\mathrm{tr}B_1 = \mathrm{tr}B_2 = 0$,则有

$$\mathrm{tr}B_1^2 B_2 \leqslant \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} (\mathrm{tr}B_1^2) \sqrt{\mathrm{tr}B_2^2}. \tag{2.2}$$

引理 C[2] 设 $B_1, \cdots, B_p$, $p \geqslant 2$,是 n 阶对称方阵.则有

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{p} \{\mathrm{tr}[B_\alpha, B_\beta]^2 - (\mathrm{tr}B_\alpha B_\beta)^2\} \geqslant -\frac{3}{2}(\sum_{\alpha=1}^{p} \mathrm{tr}B_\alpha^2)^2, \tag{2.3}$$

其中等号成立的充分必要条件是下述之一成立:

(1) $B_1 = B_2 = \cdots = B_p = 0$.

(2) $B_1, B_2, \cdots, B_p$ 中仅有两个非零,并且若假定 $B_1 \neq 0, B_2 \neq 0, B_3 = \cdots = B_p = 0$,则存在一个 n 阶正交矩阵 T 使得

$$TB_1T^t = \sqrt{\frac{S_1}{2}} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad TB_2T^t = \sqrt{\frac{S_1}{2}} \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \tag{2.4}$$

其中 $S_1=\mathrm{tr}B_1^2$.

3 定理的证明

我们首先计算 $\Delta(\sum_{\beta\neq n+1}|A_\beta|^2)$. 因为 M 具有平行的单位平均曲率向量, $A_{n+1}A_\beta=A_\beta A_{n+1}$, 于是有

$$\frac{1}{2}\Delta(\sum_{\beta\neq n+1}|A_\beta|^2)=\sum_{\beta\neq n+1}|\nabla A_\beta|^2+nH\sum_{\beta\neq n+1}\mathrm{tr}(A_{n+1}A_\beta^2)-\sum_{\beta\neq n+1}(\mathrm{tr}A_{n+1}A_\beta)^2+n\sum_{\beta\neq n+1}\mathrm{tr}A_\beta^2+\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}\{\mathrm{tr}[A_\alpha,A_\beta])^2-(\mathrm{tr}A_\alpha A_\beta)^2\}. \tag{3.1}$$

利用(2.1)把(3.1)改写为

$$\frac{1}{2}\Delta(\sum_{\beta\neq n+1}|\Phi_\beta|^2)=\sum_{\beta\neq n+1}|\nabla\Phi_\beta|^2+n(H^2+1)\sum_{\beta\neq n+1}\mathrm{tr}(\Phi_\beta^2)-nH\sum_{\beta\neq n+1}\mathrm{tr}\Phi_{n+1}\Phi_\beta^2-\sum_{\beta\neq n+1}(\mathrm{tr}\Phi_{n+1}\Phi_\beta)^2+\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}\{\mathrm{tr}([\Phi_\alpha,\Phi_\beta]^2-(\mathrm{tr}\Phi_\alpha\Phi_\beta)^2\}. \tag{3.2}$$

因为 $\mathrm{tr}\Phi_\alpha=0,\alpha=n+1,\cdots,n+p$, 并且 $[\Phi_{n+1},\Phi_\alpha]=[A_{n+1}.A_\alpha]=0,\alpha=n+2,\cdots,n+p$, 可以应用引理 B 估计(3.2)右边的第三项, 得到

$$\sum_{\alpha\neq n+1}^{n+p}\mathrm{tr}\Phi_{n+1}\Phi_\alpha^2\leqslant\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(\sum_{\alpha\neq n+1}^{n+p}\mathrm{tr}\ \Phi_\alpha^2)\sqrt{\mathrm{tr}\Phi_{n+1}^2}=\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi_{n+1}|(|\Phi|^2-|\Phi_{n+1}|^2). \tag{3.3}$$

应用引理 C 估计(3.2)右边的第五项. 对于 $p>2$ 有

$$\sum_{\alpha,\beta>n+1}^{n+p}\{\mathrm{tr}([\Phi_\alpha,\Phi_\beta])^2-(\mathrm{tr}\Phi_\alpha\Phi_\beta)^2\}\geqslant-\frac{3}{2}(\sum_{\alpha>n+1}^{n+p}|\Phi_\alpha|^2)^2=-\frac{3}{2}(|\Phi|^2-|\Phi_{n+1}|^2)^2. \tag{3.4}$$

当 $p=2$ 时, (3.4)变成(3.5)

$$-(\mathrm{tr}\Phi_{n+2}\Phi_{n+2})^2\geqslant-\frac{3}{2}(\mathrm{tr}\Phi_{n+2}^2)^2, \tag{3.5}$$

此式显然成立. 因此对于 $p\geqslant2$ 有(3.4).

对于(3.2)右边的第四项, Cauchy-Schwarz 不等式对于任意 α 给出 $(\mathrm{tr}\Phi_{n+1}\Phi_\alpha)^2\leqslant|\Phi_{n+1}|^2|\Phi_\alpha|^2$, 因此有

$$-\sum_{\alpha>n+1}^{n+p}(\mathrm{tr}\Phi_{n+1}\Phi_\alpha)^2\geqslant-|\Phi_{n+1}|^2(|\Phi|^2-|\Phi_{n+1}|^2). \tag{3.6}$$

把(3.3)—(3.6)代入(3.2), 我们得到, 对于 $p\geqslant2$,

$$\frac{1}{2}\Delta(\sum_{\alpha\neq n+1}|\Phi_\alpha|^2\geqslant\sum_{\alpha\neq n+1}|\nabla\Phi_\alpha|^2+n(H^2+1)(|\Phi|^2-|\Phi_{n+1}|^2)-$$

$$\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}nH|\Phi_{n+1}|(|\Phi|^2-|\Phi_{n+1}|^2)-$$

$$|\Phi_{n+1}|^2(|\Phi^2|-\Phi_{n+1}|^2)-\frac{3}{2}(|\Phi|^2-|\Phi_{n+1}|^2)^2$$

$$=\sum_{\alpha\neq n+1}|\nabla\Phi_\alpha|^2+(|\Phi|^2-|\Phi_{n+1}|^2) \tag{3.7}$$

$$\{n(1+H^2)-\frac{(n-2)\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1)}}H|\Phi_{n+1}|-\frac{3}{2}(|\Phi|^2-|\Phi_{n+1}|^2)-|\Phi_{n+1}|^2\}$$

$$=\sum_{\alpha\neq n+1}|\nabla\Phi_\alpha|^2+(|\Phi|^2-|\Phi_{n+1}|^2)\{n-\frac{3}{2}(|\Phi|^2-|\Phi_{n+1}|^2)+$$

$$(nH^2-\frac{(n-2)\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1)}}H|\Phi_{n+1}|-|\Phi_{n+1}|^2)\}.$$

下面再估计(3.7)右边第二项中的后一部分.把它记为

$$z(H,|\Phi_{n+1}|)=nH^2-\frac{(n-2)\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1)}}H|\Phi_{n+1}|-|\Phi_{n+1}|^2. \tag{3.8}$$

设 $x=\sqrt{n}H$ 和 $y=|\Phi_{n+1}|$,(3.8)变为

$$z(H,|\Phi_{n+1}|)=x^2-\frac{(n-2)}{\sqrt{n-1}}xy-y^2,y\geqslant 0. \tag{3.9}$$

作坐标变换

$$\begin{cases}U=\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\{(1+\sqrt{n-1})x+(1-\sqrt{n-1})y\}\\ V=\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\{-(1-\sqrt{n-1})x+(1+\sqrt{n-1})y\}\end{cases} \tag{3.10}$$

代入(3.9),得到

$$z(H,|\Phi_{n+1}|)=\frac{n}{2\sqrt{(n-1)}}(u^2-v^2)=-\frac{n}{2\sqrt{(n-1)}}(v^2+u^2-2u^2)$$

$$\geqslant-\frac{n}{2\sqrt{(n-1)}}(v^2+u^2)=-\frac{n}{2\sqrt{(n-1)}}(x^2+y^2)$$

$$=-\frac{n}{2\sqrt{(n-1)}}(nH^2+|\Phi_{n+1}|^2). \tag{3.11}$$

把(3.11)代入(3.7),得到

$$\frac{1}{2}\Delta(|\Phi|^2-|\Phi_{n+1}|^2)\geqslant\sum_{\alpha=n+1}^{n+p}|\nabla\Phi_\alpha|^2+$$

$$(|\Phi|^2-|\Phi_{n+1}|^2)\{n-\frac{3}{2}(|\Phi|^2-|\Phi_{n+1}|^2)-\frac{n}{2\sqrt{n-1}}(nH^2+|\Phi_{n+1}|^2)\}. \tag{3.12}$$

取 $a=\max\{\frac{3}{2},\frac{n}{2\sqrt{n-1}}\}$,由于 $|\Phi|^2=S-nH^2$,最后得到

$$\frac{1}{2}\Delta(|\Phi|^2-|\Phi_{n+1}|^2)\geqslant\sum_{\alpha=n+1}^{n+p}|\nabla\Phi_\alpha|^2+(|\Phi|^2-|\Phi_{n+1}|^2)(n-aS). \tag{3.13}$$

定理 1.1 的证明 在 M 上积分(3.13),由于 $|\Phi|^2-|\Phi_{n+1}|^2=S-|A_{n+1}|^2$ 和 $S_1=|A_{n+1}|^2$,立即得到(1.2). □

定理 1.2 的证明 若在 M 上有 $S\leqslant\min\{\frac{2n}{3},2\sqrt{n-1}\}=n/a$,据定理 1.1,有 $\nabla\Phi_\beta=0$,即有 $\nabla A_\beta=0,\beta=n+2,\cdots,n+p$. 并且有 $|\Phi|^2-|\Phi_{n+1}|^2=0$ 或 $S=n/a$. 若前者成立,则有 $A_\beta=0$, $\beta=n+2,\cdots,n+p$. 可见 M 必落在 S^{n+p} 的一个$(n+1)$-维全测地子流形 S^{n+1} 中.

若后者成立,则在(3.4)和(3.6)中均有等号成立. 这时引理 C 给出 $A_\beta=0,\beta=n+2,\cdots,n+p$;或者 $A_{n+2},A_{n+3},\cdots,A_{n+p}$ 中仅有两个非零,并且有(2.4). 但是,因为(3.6)取等号意味着 $A_\beta=\lambda_\beta A_{n+1},\beta=n+2,\cdots,n+p$,后一种情况与此相矛盾,故不会发生. 所以 M 同样落在 S^{n+p} 的一个$(n+1)$-维全测地子流形 S^{n+1} 中. □

参考文献:

[1] ALENCAR H, Do Carmo M. *Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1994, **120**(4): 1223—1229.

[2] LI A M, LI J M. *An intrinsic rigidity theorem for minimal submanifolds in a sphere* [J]. Arch. MATH., 1992, **58**: 582—594.

[3] 莫小欢. 常曲率空间中具有平行平均曲率向量的子流形 [J]. 数学年刊 A 辑, 1988, **9**: 530—540.
Mo Xiao-huan. *Submanfolds with parallel mean curvature vector in spaces of constant curvature*. Chinese Ann. Math., Ser. A, 1988, **9**(5): 530—540. (in Chinese)

[4] SANTOS W. *Submanifolds with parallel mean curvature vector in spheres* [J]. Tohoku Math. J., 1994, **46**(3): 403—415.

[5] SIMONS J. *Minimal varieties in Riemannian manifolds* [J]. Ann. of Math., 1968, **88**: 62—105.

[6] YAU S T. *Submanfolds with constant mean curvature, I, II* [J]. Amer. J. Math., 1974, **96**: 346—366; 1975, **96**: 76—100.

Submanifolds with Parallel Normalized Mean Curvature Vector in a Sphere

WANG Mei-jiao[1], LI Shi-jie[2]

(1. Dept. of Math., Guangzhou University, Guangdong 510405, China
2. Dept. of Math., South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: Let M be a closed n-dimensional Riemannian manifold immersed in a unit sphere $S^{n+p}, p\geqslant 2$, with parallel normalized mean curvature vector. Denote by S the square of the length of the second fundamental form of M. It is proved that if $S\leqslant\min\{2n/3, 2\sqrt{n-1}\}$, then M is a hypersurface of a $(n+1)$-dimensional totally geodesic submanifold S^{n+1} of S^{n+p}. This improve a result of Mo Xiaohuan[3].

Key words: sphere; mean curvature; normalized mean curvature vector.