第11卷 第1期
1991年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.1
Feb. 1991

对合的分解*

干丹岩
(浙江大学数学系，杭州)

在本文中，我们给出两个n维流形上的对合的双连通和的定义，证明了连通的流形上的对合分解为不可约化的连通的对合的双连通和的存在性和项数的估计．本文主要结果在[2]中宣布过，这里是评细叙述．

所论流形均假设为光滑或分片线性流形．因此所涉及的嵌入、同胚及所构作的流形均为光滑的或分片线性的．文中涉及的同调群其系数均取自$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$；当所论流形均为有向时，系数亦可取自$\mathbf{Z}$．为了说话简便，我们只讨论无边流形，但所有叙述均可推广到带边流形的情形．

(一)

设M是一个n维流形．设$D_1\amalg D_2$是嵌入M中的两个不相交的n维闭胞腔．我们构作带边流形$\check{M}=M-(\mathrm{Int}\,D_1\amalg\mathrm{Int}\,D_2)$，则有$\partial\check{M}=\partial D_1\amalg\partial D_2$．

引理1 设χ表Euler示性数，则有

$$\chi(\check{M})=\chi(M)-(-1)^n2.$$

证明由Euler-Poincaré公式导出．

引理2 当D_1和D_2落入M的同一个连通分支时，我们有

$$\mathrm{rank}\,H_{n-1}(\check{M})=\mathrm{rank}\,H_{n-1}(M)+1;$$

当D_1和D_2分别落入两个不同的连通分支时，我们有

$$\mathrm{rank}\,H_{n-1}(\check{M})=\mathrm{rank}\,H_{n-1}(M).$$

证明 考虑Mayer-Vietoris正合序列，当$n=2$时，有

$$\begin{aligned}0&\to H_2(\check{M})\oplus H_2(D_1\amalg D_2)\to H_2(M)\to\\&\to H_1(\partial D_1\amalg\partial D_2)\to H_1(\check{M})\oplus H_1(D_1\amalg D_2)\to\\&\to H_1(M)\to H_0(\partial D_1\amalg\partial D_2)\to\\&\to H_0(\check{M})\oplus H_0(D_1\amalg D_2)\to H_0(M)\to 0;\end{aligned}$$

当$n\neq 2$时，有

$$\begin{aligned}0&\to H_n(\check{M})\oplus H_n(D_1\amalg D_2)\to H_n(M)\to H_{n-1}(\partial D_1\amalg\partial D_2)\\&\to H_{n-1}(\check{M})\oplus H_{n-1}(D_1\amalg D_2)\to H_{n-1}(M)\to\\&\to H_{n-2}(\partial D_1\amalg\partial D_2)=0.\end{aligned}$$

* 1990年9月27日收到．国家自然科学基金资助项目．

总之，由此并从有关秩的一个引理（见[3]）得

$$\operatorname{rank} H_n(\check{M}) - \operatorname{rank} H_n(M) + 2 - \operatorname{rank} H_{n-1}(M) + \operatorname{rank} H_{n-1}(\check{M}) = 0.$$

由此可得引理2.

（二）

设M为一个n维流形，$T: M \to M$为一变换使得T^2=恒等，则(T, M)称为一个对合，或称T为M上的一个对合.

设给了两个n维流形上的对合(T_1, M_1)和(T_2, M_2). 设$D_{i1} \amalg D_{i2} \subset M_i$为嵌入的两个不相交的$n$维闭胞腔，使得$D_{i1} \amalg D_{i2}$在$T_i$之下不变，$i=1,2$. 设$h: \partial D_{11} \amalg \partial D_{12} \to \partial D_{21} \amalg \partial D_{22}$为同胚，满足$T_2 h = h T_1$（这种$h$的存在恰有两种可能：$T_i$均将$D_{i1}$与$D_{i2}$交换，或$T_i$均将$D_{ij}$映成自己）. 当$M_1$和$M_2$均为有向，且$T_1$和$T_2$均为保向或均为反向时，要求$h$为反向同胚，此时$\partial D_{ij}$赋以$\check{M}_i$之边缘定向，而$\check{M}_i$之定向取为与$M_i$的定向相协合者. 作附贴空间得$M_1$与$M_2$的双连通和（见[1]）

$$M_1 \S M_2 = \check{M}_1 \bigcup_h \check{M}_2 .$$

$M_1 \S M_2$有一个自然的光滑或分片线性结构使成为一个n维流形；且当M_1与M_2均为有向而h为反向时，$M_1 \S M_2$上有一个典则定向与$\check{M}_1$和$\check{M}_2$的定向相协合，在这种情形我们恒认为$M_1 \S M_2$赋有此定向而为有向流形. 在$M_1 \S M_2$上有一个典则对合$T_1 \S T_2$由等式

$$T_1 \S T_2 \,|\, \check{M}_i = T_i \,|\, \check{M}_i$$

确定. 我们称$T_1 \S T_2$为T_1和T_2的双连通和. 当T_1和T_2同为保向或反向时，$T_1 \S T_2$相应地为保向或反向. 我们称对合$(T_1 \S T_2, M_1 \S M_2)$为对合(T_1, M_1)和(T_2, M_2)的双连通和，并写成

$$(T_1 \S T_2, M_1 \S M_2) = (T_1, M_1) \S (T_2, M_2).$$

这个定义仅依赖于两个不相交的闭胞腔的嵌入的ambient同痕类，其细节留给读者.

对合的双连通和运算可使我们从简单的对合构作较为复杂的对合. 反之，复杂的对合有时可以分解为较简单的对合的双连通和.

例1 设$M_1 = M_2 = S^n$为n维球面，$T_1 = T_2 = A$为S^n上的对径变换. 可作双连通和得$(T_1, S^n) \S (T_2, S^n) = (T, S^1 \times S^{n-1})$，其中$T = T_1 \S T_2$如下. 设$(x, y) \in S^1 \times S^{n-1}$. 当$x = e^{i\theta}$，$0 \le \theta \le \pi$时，$T(e^{i\theta}, y) = (e^{i(\pi-\theta)}, -y)$；当$-\pi \le \theta \le 0$时，$T(e^{i\theta}, y) = (e^{-i(\pi+\theta)}, -y)$.

例2 设$M = S^1 \times S^1$，M上对合T定义为$T(x, y) = (-x, -y)$. 可以验证(T, M)可表作$n=2$时的例1中之双连通和.

为研究对合的双连通和，当然应当利用流形的双连通和的结果. 因此写下两个引理.

引理3 设M为一个n维流形，$M = M_1 \S M_2$. 则当$n=2$时，有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rank} H_1(\check{M}_1) + \operatorname{rank} H_1(\check{M}_2) \\
&= \operatorname{rank} H_1(M) + \operatorname{rank} H_2(\check{M}_1) + \operatorname{rank} H_2(\check{M}_2) - \\
&\quad - \operatorname{rank} H_2(M) + \operatorname{rank} H_0(\check{M}_1) + \operatorname{rank} H_0(\check{M}_2) - \operatorname{rank} H_0(M);
\end{aligned}$$

当$n \ne 2$时，有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rank} H_{n-1}(\check{M}_1) + \operatorname{rank} H_{n-1}(\check{M}_2) \\
&= \operatorname{rank} H_{n-1}(\check{M}) + 2 + \operatorname{rank} H_n(\check{M}_1) + \operatorname{rank} H_n(\check{M}_2) - \operatorname{rank} H_n(M).
\end{aligned}$$

特别，若M_1和M_2均连通，当然M亦连通，则当$n=2$时，有

$$\operatorname{rank} H_1(\check{M}_1) + \operatorname{rank} H_1(\check{M}_2) = \operatorname{rank} H_1(M);$$

当$n \neq 2$时，有

$$\operatorname{rank} H_{n-1}(\check{M}_1) + \operatorname{rank} H_{n-1}(\check{M}_2) = \operatorname{rank} H_{n-1}(M) + 1.$$

证明 取Mayer-Vietoris正合序列

$$\begin{aligned} 0 &\to H_n(\check{M}_1) \oplus H_n(\check{M}_2) \to H_n(M) \to H_{n-1}(\Sigma_1 \amalg \Sigma_2) \to \\ &\to H_{n-1}(\check{M}_1) \oplus H_{n-1}(\check{M}_2) \to H_{n-1}(M) \to H_{n-2}(\Sigma_1 \amalg \Sigma_2) \to \\ &\to H_{n-2}(\check{M}_1) \oplus H_{n-2}(\check{M}_2) \to H_{n-2}(M) \to H_{n-3}(\Sigma_1 \amalg \Sigma_2) \to \cdots\cdots \end{aligned}$$

其中$\Sigma_1 \amalg \Sigma_2$为$M_1 \S M_2$中$\partial D_{i1} \amalg \partial D_{i2}$之像，由两个不相交的$n-1$维球面组成．由此并从秩的引理可得本引理．

引理 4 设M为一个n维流形，且$M = M_1 \S M_2$，其中M_1和M_2均为连通的．则对$i=1$，2，有

$$\operatorname{rank} H_{n-1}(M_i) \leq \operatorname{rank} H_{n-1}(M) - \begin{cases} 2, & n=2, \\ 1, & n \neq 2. \end{cases}$$

证明 由引理2及引理3可知，当$n=2$时

$$\operatorname{rank} H_1(M_1) + \operatorname{rank} H_1(M_2) = \operatorname{rank} H_1(M) - 2;$$

当$n \neq 2$时

$$\operatorname{rank} H_{n-1}(M_1) + \operatorname{rank} H_{n-1}(M_2) = \operatorname{rank} H_{n-1}(M) - 1.$$

由此可得欲证的不等式．

（三）

一个连通的流形若不能表示为两个连通流形的双连通和，则称为一个不可约化的流形．一个连通流形上的对合若不能表示为两个连通流形上的对合的双连通和，则称为一个不可约化的对合．显然，不可约化的流形上的对合必为不可约化的对合．

我们首先感到兴趣的是什么样的流形或对合是不可约化的．引理4提供了部分解答．即

定理A 设M为一个n维连通流形，若当$n=2$时$\operatorname{rank} H_{n-1}(M) \leq 1$，当$n \neq 2$时，$\operatorname{rank} H_{n-1}(M) = 0$．则$M$为不可约化流形，$M$上的对合为不可约化对合．

我们还可得到可约化流形的一个充要条件．

定理B 设M为一个n维连通流形．则M是可约化的当且仅当M中存在一个嵌入的双侧的$n-1$维球面S，使$M-S$连通．

证明 必要性显然．

充分性．[4]中有一个很有趣的结果引理3.8，它的结论和证明均适用于一般维数n，只要指明嵌入M中的$n-1$维球面S是双侧的．因此应用这个结论，我们就有$M = H \# K$，其中K为S^1上的S^{n-1}丛．由于K中存在两个不相交的嵌入的$n-1$维球面S_1和S_2，使得$K-(S_1 \amalg S_2)$恰有两个连通分支，从而可将K表作两个连通流形的双连通和$K = L \S M_1$．于是得$M = H \#(L \S M_1) = (H \# L) \S M_1$．令$M_2 = H \# L$，则有$M = M_1 \S M_2$．

关于对合，我们有

定理C 设(T, M)为n维流形M上的对合．设S为M中一个嵌入的$n-1$维球面，使得$S \cap T(S) = \varnothing$，$M = A \cup B$，其中$A$和$B$均为$T$的带边的连通的不变子流形，满足$\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B = \varnothing$，$\partial A = \partial B = S \cup T(S)$．则

$$(T, M)=(T_1, \check{M}_1)\S(T_2, \check{M}_2),$$

其中 $\check{M}_1=A$，$\check{M}_2=B$，$T_1|\check{M}_1=T|A$，$T_2|\check{M}_2=T|B$．这时(T,M)是可约化的．

证明 取D_1和D_2为两个标准的n维闭胞腔，$h_1: S\to\partial D_1$和$h_2: T(S)\to\partial D_2$为同胚．当M为有向时，A赋以诱导定向，D_1和D_2赋以标准定向，∂D_1和∂D_2均赋以边缘定向，S和$T(S)$的定向选取使h_1, h_2为反向．作附贴空间 $M_1=A\bigcup_{h_1\amalg h_2}(D_1\amalg D_2)$，它是一个$n$维无边流形．我们视$A, D_1$和$D_2$为嵌入于$M_1$中的，故有$M_1=A\cup D_1\cup D_2$．在$M_1$上定义变换$T_1: M_1\to M_1$为$T_1|A=T|A$，$T_1|D_1: D_1\to D_2$及$T_1|D_2: D_2\to D_1$为互逆之同胚，使得$(T_1|D_1)|\partial D_1=(T_1|A)|S=T|S$及$(T_1|D_2)|\partial D_2=(T_1|A)|T(S)=T|T(S)$．于是$(T_1, M_1)$是一个对合,将$A$换作$B$,同样可构作$M_2$和$T_2$使$(T_2, M_2)$是一个对合．不难验证

$$(T, M)=(T_1, M_1)\S(T_2, M_2)\ .$$

定理得证．

从双连通和分解角度看，不可约的连通的对合是比较简单的一种．我们的主要结果是

定理D 设M为一个连通的n维流形，T是M上的一个对合．则(T, M)可以分解为一些连通的不可约化的对合的双连通和

$$(T, M)=(T_1, M_1)\S\cdots\S(T_q, M_q),$$

并且

$$q\leq\frac{1}{2}\operatorname{rank}H_{n-1}(M)+1, \qquad 当\ n=2,$$

$$q\leq\operatorname{rank}H_{n-1}(M)+1, \qquad 当\ n\neq 2.$$

证明 若(T, M)表作连通对合$(T_1, M_1),\cdots,(T_q, M_q)$的双连通和，则从引理4可知$q$满足上面的不等式．

然后我们可以要求双连通和分解中的和项$(T_1, M_1),\cdots,(T_q, M_q)$均为不可约的．因为若不然，设$(T, M)$之任一双连通和分解式中必有一和项是可约化的，则此和项可分解为两个连通的对合的双连通和．从而使总的和项数增加1，并且这些双连通和项中必仍有可约化者．重复这个推理，可知双连通和之项数可任意大．这与已证明的不等式相矛盾．

参 考 文 献

[1] 干丹岩，数学研究与评论，流形的双连通和分解，第七卷，第二期，1987年5月．

[2] 干丹岩，数学研究与评论，对合的分解，第七卷，第二期，1987年5月．

[3] M. J. Greenberg and J. R. Harper, Algebraic Topology, The Benjamin/Cummings Publishing Company, London, 1981.

[4] J. Hempel, 3-manifolds, Princeton Univ. Priess, Princeton, 1976.

Decomposition of Involutions

Gan Danyan

(Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

Using the notion of biconnected sum we define the biconnected sum $(T_1, M_1)\S(T_2, M_2)$ of two involutions (T_1, M_1) and (T_2, M_2) which is an involution on the biconnected sum $M_1\S M_2$. A connected involution is said to be reducible if it can be expressed as a biconnected sum of two connected involutions.

Theorem Each connected involution (T, M) can be decomposed into a biconnected sum of connected irreducible involutions

$$(T, M) = (T_1, M_1)\S\cdots\S(T_q, M_q),$$

and

$$q \leq \begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{rank} H_{n-1}(M) + 1, & \text{if} \quad n = 2, \\ \operatorname{rank} H_{n-1}(M) + 1, & \text{if} \quad n \neq 2, \end{cases}$$

where the coefficients of $H_{n-1}(M)$ are in $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ if M is unoriented, in $\mathbf{Z}$ if M is oriented.