第23卷第2期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 2
2003年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2003

完全正矩阵的整数分解*

徐 常 青
(安徽大学数学系，安徽 合肥 230039)

摘 要：n 阶矩阵 A 称为完全正的，如果 A 有分解：$A=BB^{\mathrm{T}}$，其中 B 为元素非负矩阵，B 的最小可能列数称为 A 的分解指数．本文考察低阶双非负矩阵在整数环上的完全正分解及其分解指数．

关键词：矩阵；完全正；整数分解．
分类号：AMS(2000) 15A18/CLC number：O151.21
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)02-0349-06

1 引 言

一个 n 阶矩阵 A 称为完全正的，如果 A 能分解成 $A=BB^{\mathrm{T}}$，这里 B 为 $n\times m$ 的非负矩阵（m 为某一自然数）．B 的最小可能列数 m 称为 A 的分解指数，记作 $\varphi(A)$．一个实 n 阶矩阵称为双非负的，如果它是元素非负的半正定矩阵．记全体 n 阶完全正矩阵构成的集合为 CP_n；全体 n 阶非负矩阵构成的集合为 DP_n，易知 $CP_n\subset DP_n$．对于 $n\leqslant 4$，有 $CP_n=DP_n$[3,5]．对 $n\geqslant 5$，CP_n 为 DP_n 的一个真子集[2,4]．完全正问题研究源于1961年，其应用涉及不等式理论[1]、统计学[5]、组合设计[2]、线性经济模型[5]等．考虑整数环上矩阵 $A=(a_{ij})$，记 $\mathbf{Z}(\mathbf{Z}_+)$ 为整数环（非负整数集合）．若 A 有分解 $A=BB^{\mathrm{T}}$，其中 B 为 $n\times m$ 的非负整数矩阵，则称 A 为 $\mathbf{Z}$ 上的完全正矩阵．记 $\mathbf{Z}$ 上的全体 n 阶完全正矩阵集合为 $CP_n(\mathbf{Z})$，相应地，$DP_n(\mathbf{Z})$ 为 $\mathbf{Z}$ 上的全体 n 阶双非负矩阵构成的集合．二十世纪三十年代包括柯召在内的数论专家曾对此问题进行过研究[8,9]．本文讨论完全正矩阵在整数环上的分解，(0,1)-分解，及其分解指数．

2 主要结论及其证明

设 $A=BB^{\mathrm{T}}$，B 为 $n\times m$ 的非负整数矩阵．B 所含可能的最小的列数 m 称为 A 在 $\mathbf{Z}$ 上的分解指数，或称 A 的整 CP-秩，记为 $\varphi_{\mathbf{Z}}(A)$．类似定义 A 的(0,1)-分解指数，并记为 $\varphi_{(0,1)}(A)$．显然有

* 收稿日期：2000-05-15
基金项目：安徽省自然科学基金资助项目(010460101)
作者简介：徐常青(1966-)，男，博士，副教授．

$$\varphi(A)\leqslant\varphi_Z(A)\leqslant\varphi_{(0,1)}(A),$$

且等号一般不成立. 事实上,对 $n=1, A=(a)$,当 a 为平方数时,有 $\varphi(A)=1$. 而当 a 为非平方数时,显然有 $\varphi_Z(A)>1$. 由数论中的 Lagrange 定理[14]知,存在 $a_1,\cdots,a_4\in Z_+$,使得

$$a=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2. \tag{2.1}$$

令 $B=[a_1,a_2,a_3,a_4]$,则 $A=BB^T$. 因此有 $1=\varphi(A)<\varphi_Z(A)\leqslant 4$.

现设 $A=(a_{ij})\in DP_2(Z)$. 若 $a_{11}=0$,则

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\sqrt{a_{22}}\end{bmatrix}[0,\sqrt{a_{22}}]=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\b_{11}&b_{12}&b_{13}&b_{14}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&b_{11}\\0&b_{12}\\0&b_{13}\\0&b_{14}\end{bmatrix},$$

这里 a_{22} 与 $b_{11},\cdots,b_{14}$满足(2.1)式,$b_{1j}\in Z_+(j=1,2,3,4)$. 若 a_{22}为平方数,则 $\varphi_Z(A)=1$;否则 $2\leqslant\varphi_Z(A)\leqslant 4$. 对 $a_{22}=0$,有类似结论. 现设 $a_{11}a_{22}\neq 0$,于是

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{22}\\a_{12}&a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{a_{11}}&0\\\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}&\sqrt{\frac{\det A}{a_{11}}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{a}_{11}&\frac{a_{12}}{\sqrt{a}_{11}}\\0&\sqrt{\frac{\det A}{a_{11}}}\end{bmatrix}.$$

定理 2.1 设 $A\in DP_2(Z)$,记 $d:=\gcd(a_{11},a_{12},a_{22})$. 若 A 为奇异,则$\frac{1}{d}A$ 在 Z_+上有完全正分解当且仅当 $a_{11}=d$.

证明 不妨设 $d=1$. 若 $a_{11}=1$,由 $\det(A)=0$,可取

$$B=\begin{bmatrix}1\\a_{12}\end{bmatrix},$$

易知,$A=BB^T$. 故 A 在 Z_+上可分解,且 $\varphi_Z(A)=1$.

反之,设 A 在 Z_+上有完全正分解. 不妨设它的一个分解为 $A=BB^T$,其中 $B=(b_{ij})$为 $2\times m$ 的非负矩阵,$m\equiv\varphi_Z(A)$. 于是有

$$a_{11}=b_{11}^2+\cdots+b_{1m}^2, \tag{2.2}$$

$$a_{22}=b_{21}^2+\cdots+b_{2m}^2. \tag{2.3}$$

由于

$$a_{11}a_{22}=(\sum_{j=1}^m b_{1j}^2)(\sum_{j=1}^m b_{2j}^2)\geqslant(\sum_{j=1}^m b_{1j}b_{2j})^2=a_{12}^2, \tag{2.4}$$

并注意到 $\det A=0$,故 $a_{11}a_{22}=a_{12}^2$. 从而(2.4)式中的不等式等号成立. 于是向量 b_1,b_2 线性相关,这里 $b_i=(b_{i1},\cdots,b_{im})(i=1,2)$. 即有 $\lambda\in R$ 使得 $b_2=\lambda b_1$. 易知 $\lambda=\frac{a_{12}}{a_{11}}$,故

$$b_2=\frac{a_{12}}{a_{11}}b_1. \tag{2.5}$$

另一方面,由等式 $a_{11}a_{22}=a_{12}^2$ 知,

$$(a_{11},a_{12})=\gcd(a_{11},a_{12},a_{22})=1.$$

于是由(2.5)知,$a_{11}\mid b_{1j}, j\in[m]$. 结合(2.2)式,有 $a_{11}=1$. □

由以上知,当 A 为奇异,$a_{11}=1$ 时,$\varphi_Z(A)=1$. 进一步可得

推论 2.2 设 $A=(a_{ij})\in DP_2(Z)$，若 $a\equiv\min(a_{11},a_{22})\,|\,a_{12}$，则有 $A=aA_1+A_2$，其中 A_1，$A_2\in CP_2(Z)$，且 $\varphi_Z(A_1)=1$，$1\leqslant\varphi_Z(A_2)\leqslant 4$.

证明 不妨设 $a_{11}=\min(a_{11},a_{22})$. 若 $a_{11}=0$，取 $A_2=A$，知结论成立. 现设 $a_{11}>0$. 若 $\det(A)=0$，由定理 2.1 知结论成立. 因此，下设 $\det(A)>0$. 注意到 $a_{11}\,|\,a_{12}$，知有 $a_{11}\,|\det(A)$. 记

$$c=\frac{\det(A)}{a_{11}},\quad a_{22}'=a_{22}-c(\geqslant 0),$$

同时记

$$A_1=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}'\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&c\end{bmatrix},$$

可知结论成立. □

下面从集合论的角度考察 $A\in DP_2(Z)$ 的 (0,1)- 完全正分解.

定理 2.3 设 A 为 $\mathbf{Z}_+$ 上的 2 阶对称矩阵，则 A 有 (0,1)- 分解当且仅当 $a_{12}\leqslant\min(a_{11},a_{22})$.

证明 设 A 有 (0,1) 分解 $A=XX^{\mathrm{T}}$，其中矩阵 $X=(x_{ij})$ 为 $2\times m$ 的 (0,1) 矩阵. 作集合系 $(S;S_1,S_2)$ 满足

$$x_j\in S_i\leftrightarrow x_{ij}=1\quad(i=1,2;j=1,2,\cdots,m),\tag{2.6}$$

显然有 $|S_i|=a_{ii}(i=1,2)$，$|S_1\cap S_2|=a_{12}$，因此 $a_{12}\leqslant\min(a_{11},a_{22})$.

反之，若有 $a_{12}\leqslant\min(a_{11},a_{22})$，令

$$S_1=\{x_1,\cdots,x_{a_{12}},x_{a_{12}+1},\cdots,x_{a_{11}}\},\quad S_2=\{x_1,\cdots,x_{a_{12}},y_1,\cdots,y_{(a_{22}-a_{12})}\},$$

则 $|S_i|=a_{ii}$，且有 $|S_1\cap S_2|=a_{12}$. 于是集合系 $(S;S_1,S_2)$ 的邻接矩阵 $X=(x_{ij})$ 满足 (2.6) 式，从而 $A=XX^{\mathrm{T}}$. □

注 由以上证明知，A 的 (0,1) 分解指数 $\varphi_{(0,1)}(A)\leqslant a_{11}+a_{22}-a_{12}$.

现考虑 $A=(a_{ij})$ 为 $\mathbf{Z}_+$ 上的 3 阶对称矩阵. 对 A 进行适当的相似置换，可使得

$$a_{12}\leqslant a_{23}\leqslant a_{31}\leqslant\min(a_{11},a_{33}),$$

且

$$a_{12}\leqslant a_{23}\leqslant\min(a_{22},a_{33}),\ a_{12}\leqslant\min(a_{11},a_{22}).$$

从而有

定理 2.4 设 $A=(a_{ij})$ 为 3 阶非负对称正整数矩阵，且 $a_{12}\leqslant a_{23}\leqslant a_{31}$. 则 A 有 (0,1) 完全正分解当且仅当 A 的每个二阶主子阵有 (0,1) 分解，且 A 的元素满足

$$a_{23}+a_{13}\leqslant a_{33}+a_{12}.\tag{2.7}$$

证明 设 A 有 (0,1) 分解，记 $A=XX^{\mathrm{T}}$ 为它的一个这样的分解. 这里 $X=(x_{ij})$ 为一个 $3\times m$ 的 (0,1) 矩阵，$m\equiv\varphi_{(0,1)}A$，则 X 对应一个集合系. 显然 A 的每个二阶主子式均有 (0,1) 分解，下证 (2.7) 式成立.

记 X 对应的集合系为 $(S;S_1,S_2,S_3)$，则有

$$|S_1\cap S_3|+|S_2\cap S_3|\leqslant|(S_1\cup S_2)\cap S_3|+|(S_1\cap S_2)\cup S_3|\leqslant|S_3|+|S_1\cap S_2|,$$

即 $a_{23}+a_{13}\leqslant a_{33}+a_{12}$.

反之，设 (2.7) 式成立，且 A 的每个主子式有 (0,1)- 分解. 由关系式

$$a_{12}\leqslant a_{23}\leqslant a_{13}\leqslant\min(a_{11},a_{33}),$$

构造集合系$(S;S_1,S_2,S_3)$如下：

$$S_1=\{x_1,\cdots,x_{a_{12}},x_{a_{12}+1},\cdots,x_{a_{13}},\cdots,x_{a_{11}}\},$$
$$S_2=\{x_1,\cdots,x_{a_{12}},y_{a_{12}+1},\cdots,y_{a_{23}},\cdots,y_{a_{22}}\},$$
$$S_3=\{\underbrace{y_{a_{12}+1},\cdots,y_{a_{23}},x_{a_{12}+1},\cdots,x_{a_{13}}}_{q},z_1,\cdots,z_r\},$$

这里$r=a_{33}-q$，$q=a_{23}+a_{13}-a_{12}$(由题设知$r\geqslant 0$)．集合系$(S;S_1,S_2,S_3)$决定了一个$(0,1)$-矩阵X，从而有$A=XX^{\mathrm{T}}$．且

$$\begin{aligned}\varphi_{(0,1)}(A)&\leqslant |S|=|S_1\cup S_2\cup S_3|\leqslant a_{11}-a_{13}+a_{22}-a_{23}+a_{33}-a_{12}\\&=a_{11}+a_{22}+a_{33}-(a_{12}+a_{23}+a_{31}).\end{aligned}$$

□

下面给出完全正矩阵在不同的数域范围内分解指数不等的一个例子．

例　考虑5×5的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3&1&2&2&2\\1&3&2&2&2\\2&2&3&2&2\\2&2&2&3&2\\2&2&2&2&3\end{bmatrix},$$

现令

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&1&1\\0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\end{bmatrix}.\tag{2.8}$$

直接验证，不难得$A=BB^{\mathrm{T}}$，因此$A\in CP_5$且$\varphi_{\mathbb{Z}}(A)\leqslant 5$．下面证明$A$在非负整数环$Z_+$上的分解矩阵$B$的最小列数不能小于5，从而由(2.8)式知$A$在$Z_+$上的分解指数等于5．

反设存在一个5×4的非负矩阵$B=(b_{ij})$，使得$A=BB^{\mathrm{T}}$．则有$b_{ij}\leqslant 1$，即有$b_{ij}=0$或1．若不然，则有$b_{ij}\geqslant 2$，于是有

$$a_{ii}=\sum_{k=1}^{m}b_{ik}^2\geqslant b_{ij}^2=4.$$

与A的表达式矛盾．故$b_{ij}=0$或1．从而有集合$I=\{1,2,3,4\}$上的5个子集$S_1,S_2,\cdots,S_5$，使得$|S_i\cap S_j|=a_{ij},i,j\in I$．特别，$|S_1|=\cdots=|S_5|=3$，$|S_1\cap S_2|=1$．于是可不妨设$S_1=\{1,2,3\}$，但由$|S_1\cap S_2|=1$知$S_2$至多含有元1,2,3中的某一个以及元4，与$|S_2|=3$矛盾．故$A$在$Z_+$上不能有列数小于5的非负矩阵$B$，使得$A=BB^{\mathrm{T}}$．

下证对某个$i\in\{1,\cdots,5\}$，存在一个4×4的元素非负的实矩阵B_i，使得$B_iB_i^{\mathrm{T}}=A_i\equiv A(i|i)$，且$B_ix=\alpha^i$满足$x^{\mathrm{T}}x=a_{ii}$的非负解$x\in R^4$．现取$i=1$，考虑$A_1$，直接计算不难发现$A_1$有非负分解$A_1=B_1B_1^{\mathrm{T}}$，其中$B_1$如下式：

$$B_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{7}} & \sqrt{\frac{2}{35}} & \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{75} & \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

$$x_0 = B_1^{-1}a^{\mathrm{T}} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{7}, \frac{4}{\sqrt{35}}, \frac{4}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{2.10}$$

且 $x_0^{\mathrm{T}}x_0=3=a_{11}$，于是 $\varphi(A)\leqslant 4$. 同时注意到

$$\varphi(A)\geqslant \operatorname{rank}(A)\geqslant \operatorname{rank}(A_1)=\operatorname{rank}(B_1)=4,$$

因此有 $\varphi(A)=4$. 进一步，由(2.9)式与(2.10)式所决定的分解矩阵 $\tilde{B}$ 为

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix} B_1 \\ x_0^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

$A=\tilde{B}\tilde{B}^{\mathrm{T}}$.

最后指出，对于一般情形下的在实数域内可分解的完全正矩阵，其在整数环上可能不存在完全正分解. 很自然地一个问题是(这个问题应该属于数论范围内的)：

问题　一个在实数域上完全正的 n 阶整矩阵何时有非负整分解?

参考文献:

[1] DIANANDA P H. *On non—negative forms in real variables some or all of which are nonnegative* [J]. Proc. Cambridge. Philos. Soc., 1962, **58**: 17—25.

[2] HALL M Jr. *Combinatorial Theory* [M]. Wiley, New York, 1986.

[3] HALL M Jr, NEWMAN M. *Copositive and completely positive quadratic forms* [J]. Proc. Cambridge Philo. Soc., 1963, **59**: 329—339.

[4] BERMAN A, HERSHKOWITZ D. *Combinatorial results on completely positive matrices* [J]. Lin. Algebra, Appl., 1987, **95**: 111—125.

[5] GRAY L J, WILSON D G. *Nonnegative factorization of positive semidefinite nonnegative matrices* [J]. Lin. Algebra, Appl., 1980, **31**: 119—127.

[6] KOGAN N, BERMAN A. *Characterization of completely positive graphs* [J]. Discret. Math., 1993, **114**: 297—304.

[7] DEZA M. *On harmonic geometry of unitary cubes* [J]. Dokl. Akad. Nauk., SSSR, 1960, **134**(5): 1037—1040. (in Russian)

[8] DEZA M. *Realization of matrices of distances in unitary cubes* [J]. Problemy Kibernet, 1960, **145**(7): 31—42.

[9] KO C. *On the representation of a quadratic form as a sum of squares of linear forms* [J]. Quart J. Math., Oxford, 1937, **30**(8): 81—98.

[10] MORDELL L J. *The representation of quadratic form as a sum of two others* [J]. Ann. Math., 1937,

38: 751—757.

[11] DEZA M, ROSENBERG I G. *Intersection and Distance Patterns* [M]. Graph Theory and Related Topics, New York, 1995.

[12] PLESKEN W. *Additively indecomposable integral quardratic forms* [J]. J. of Number Theory, 1994, **47**: 273—283.

[13] PLESKEN W. *Solving $XX^{tr}=A$ ove the integers* [J]. Linear Algebra, Appl., 1995, 226—228, 389—392.

[14] 华罗庚. 数论导引 [M]. 北京: 科学出版社, 1979.
HUA Lou-geng. *Introduction to Number Theory* [M]. Beijing: Science Press, 1979.

Factorizations of Completely Positive Matrices over Integers

XU Chang-qing

(Dept. of Math., Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: An $n \times n$ matrix A is said to be completely positive if A can be factored as $A = BB^{\mathrm{T}}$, where B is an $n \times m$ nonnegative matrix. The smallest such number m is called the factorization index of A; A is called doubly nonnegative if it is entrywise nonnegative and positive semidefinite as well. The paper concerns completely positive factorizations of matrices (with integeral entries) in CP_n over integers and the related factorization index.

Key words: matrix; completely positive; factorization over integers; factorization index.