第23卷第2期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 2
2003年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2003

一类非线性不连续集值发展型方程的广义单调迭代法*

周 磊[1]， 田 岩[2]

（1. 华中科技大学数学系，湖北 武汉 430074；
2. 华中科技大学图像识别与人工智能研究所，湖北 武汉 430074）

摘 要：本文利用广义单调迭代法研究了一类非线性不连续集值发展型方程的数值解法，利用序理论给出其迭代格式，得到了迭代解的收敛性结果. 在一种较弱的条件下，给出了离散解集收敛性的若干结论.

关键词：非线性不连续问题；发展型方程；广义单调迭代法.

分类号：AMS(2000) 41A36/CLC number：O175.29

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)02-0299-05

1 问题的提出及基本假设

非线性不连续发展方程在物理、化学等领域有着广泛的应用[1]. 将不连续问题转化为集值问题是考虑此类问题的常见方式之一[2]. 一个发展型非线性不连续集值微分方程可写成：

$$Au(x)\in f(x,u(x)),\quad x\in\Omega,\tag{1.1}$$

其中 A 是发展型算子，$\Omega\subset R^n$ 为一边界充分光滑的有界域，函数 $f(x,t)$ 定义在 $\Omega\times R^1$ 上，关于 t 多值且不连续. 在(1.1)中若 A 是椭圆型算子，文[3]—[4]给出了若干解的存在性及收敛性结果. 当 A 是抛物型算子且方程为单值时，文[5]讨论了解的存在性问题.

本文旨在 Hilbert 空间上，对形如(1.1)的抛物型方程利用序理论及广义单调迭代法[6]给出了解的存在性的构造性证明，并讨论了离散解集的收敛性问题. 一些结果可视作单值情形的拓展和继续.

我们考虑以下的方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+Lu\in f(x,t,u(x,t)),(x,t)\in Q,\\ \qquad u(x,0)=0,\ x\in\Omega,\\ u(x,t)=0,\ (x,t)\in\Gamma,\end{cases}\tag{1.2}$$

这里 $\Omega\subset R^n$ 是具有 Lipschitz 边界 $\partial\Omega$ 的有界域，L 是一正定的椭圆算子，$Q=\Omega\times[0,T]$，$T>$

---

* 收稿日期：2000-11-20

作者简介：周 磊(1964-)，男，讲师.

$0, \Gamma = \partial\Omega \times [0,T]$，$H$ 和 H' 是 Hilbert 空间，且 $H \subset H'$. $\frac{\partial}{\partial t} + L: H \to H'$，对固定的 x 和 t，$f(\cdot,\cdot,u): H \to 2^{H'}$.

首先在 H' 中引入序锥 K'，而 H 中的序关系由 H' 中的序关系诱导为：$u, v \in H, u \geqslant v \Leftrightarrow u - v \in H \cap K'$. 对于 H' 中的内积要求：如果 $\psi, \varphi \in K'$，则 $(\psi,\varphi) \geqslant 0$. 对于 $f(x,t,u)$ 要求关于第三变量单调非减，即如果 $u_1 \geqslant u_2$，则 $f(\cdot,\cdot,u_1) \geqslant f(\cdot,\cdot,u_2)$. 方程(1.2)的弱形式为，求 $u(.,x) \in H$，对任意的 $v \in H$ 使得

$$\begin{cases} (u_t, v) + (Lu, v) \in (f(x,t,u), v), \\ u(x,0) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

现作如下假设：

(S1) 方程(1.3)存在上解 $\bar{u}$ 和下解 $\underline{u}$.

(S2) 如果 $\forall\, v \in H \cap K'$，均有 $\left(\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t}, v\right) + (L(u_1 - u_2), v) \geqslant 0$，则 $u_1 \geqslant u_2$.

(S3) $f(\cdot,\cdot,u)$ 关于第三变量点点满足局部上半 Lipschitz 条件，即对任意的 u_0，如果存在其邻域 $N(u_0)$ 及常数 $C > 0$，当对任意的 $u \in N(u_0)$ 时，均有 $f(\cdot,\cdot,u) \subset f(\cdot,\cdot,u_0) + Cd(u_0, u)B$ 成立，这里 B 指以 0 为心的单位球.

2 迭代格式

对于方程(1.3)，取迭代初值 u^0 为上解 $\bar{u}$ 或下解 $\underline{u}$，本文提出的迭代格式如下：

$$\begin{cases} (u_t^k, v) + (Lu^k, v) \in (f(x,t,u^{(k-1)}), v), \forall\, v \in H, \\ u^k(x,0) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

引理[7] 给定一偏序集 P 和一多值映射 $F: P \to 2^P$，假设 $\cup F[P]$ 中的每一良序链 C 有属于 P 的上界 x，且存在 $y \in F(x)$，使得 $x \leqslant y$，则 F 有极大不动点 x，且 x 是 $F(x)$ 中的极大元.

定理 1 假设存在 $v^0, \omega^0 \in H$，且存在 $p_0 \in f(x,t,v^0), q_0 \in f(x,t,\omega^0)$ 使得 $p_0 \leqslant q_0$，同时

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial v^0}{\partial t}, \varphi\right) + (Lv^0, \varphi) \leqslant (p_0, \varphi) \\ \left(\frac{\partial \omega^0}{\partial t}, \varphi\right) + (L\omega^0, \varphi) \geqslant (q_0, \varphi) \end{cases} \quad \varphi \in H \cap K',$$

则由(2.1)可得一非减序列 $\{v^k\}$ 和一非增序列 $\{\omega^k\}$ 分别收敛于(1.3)的极小解和极大解.

证明 由于 $p_0 \leqslant q_0$，当 $\psi, \varphi \in K'$ 时，有 $(\psi,\varphi) \geqslant 0$，可得

$$\left(\frac{\partial v^0}{\partial t}, \varphi\right) + (Lv^0, \varphi) \leqslant \left(\frac{\partial \omega^0}{\partial t}, \varphi\right) + (L\omega^0, \varphi),\ \varphi \in H \cap K',$$

由(S2)知，$v^0 \leqslant \omega^0$. 取 v^1 为方程 $\left(\frac{\partial v}{\partial t}, \varphi\right) + (Lv, \varphi) = (p_0, \varphi)$ 的解，即

$$\left(\frac{\partial v^1}{\partial t}, \varphi\right) + (Lv^1, \varphi) = (p_0, \varphi), \tag{2.2}$$

故 $\left(\frac{\partial v^0}{\partial t}, \varphi\right) + (Lv^0, \varphi) \leqslant \left(\frac{\partial v^1}{\partial t}, \varphi\right) + (Lv^1, \varphi)$，由(S2)得 $v^0 \leqslant v^1$.

再取 ω^1 为方程 $\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}, \varphi\right) + (L\omega, \varphi) = (q_0, \varphi)$ 的解，类似可证 $\omega^1 \leqslant \omega^0$. 联立(2.2)与上式知 $v^1 \leqslant$

ω^1.

现假设 $v^{k-1}\leqslant v^k\leqslant \omega^k\leqslant \omega^{k-1}$. 由迭代格式(2.1)

$$\left(\frac{\partial v^{k+1}}{\partial t},\varphi\right)+(Lv^{k+1},\varphi)\in (f(x,t,v^k),\varphi),$$

$$\left(\frac{\partial v^{k}}{\partial t},\varphi\right)+(Lv^{k},\varphi)\in (f(x,t,v^{k-1}),\varphi).$$

又 $f(x,t,u)$关于 u 非减,故当 $\varphi\in H\cap K'$时,有$\left(\frac{\partial v^{k}}{\partial t},\varphi\right)+(Lv^k,\varphi)\leqslant\left(\frac{\partial v^{k+1}}{\partial t},\varphi\right)+(Lv^{k+1},\varphi)$. 由假设可知 $v^k\leqslant v^{k+1}$类似可证 $\omega^{k+1}\leqslant \omega^k$,同理亦可得 $v^{k+1}\leqslant \omega^{k+1}$.

记 T 为$(Lu,v)=(K(x,t),v)(v\in H)$的解算子,即 $u=Tk$ 满足$(L(Tk),v)=(k,v)(v\in H)$. 因此可将下面的抛物型方程

$$\begin{cases}u_t+Lu=k(x,t),(x,t)\in Q,\\ u(x,t)=0,(x,t)\in \Gamma,\\ u(x,0)=0,x\in\Omega,\end{cases}$$

利用算子 T 改写为

$$\begin{cases}Tu_t+u=Tk,\\ \quad u(0)=0.\end{cases}\tag{2.3}$$

仿照上述思路,前文中给出的迭代格式等价于(2.3)的形式,即

$$\begin{cases}Tu_t^k+u^k\in Tf(x,t,u^{k-1}),\\ \quad u^k(0)=0,\end{cases}$$

而上述方程是可解的,即存在 $\tilde{T}$ 使得 $u^k\in\tilde{T}Tf(x,t,u^{k-1})$,记 $F=\tilde{T}Tf$,于是定理得证.

3 近似方程及其近似解集的收敛性

取 H_n 为 H 的有限维子空间,且 $H_n\subset H_{n+1}$,$\overline{\bigcup H_n}=H$. (2.1)相应的椭圆问题为

$$(Lu^k,v)=(P(u^{k-1}),v)\ \forall\ P(u^{k-1})\in f(x,t,u^{k-1}).$$

定义近似椭圆算子 T_n 为

$$(LT_nP(u_n^k),v_n)=(P(u_n^k),v_n),\forall\ P(u_n^k)\in f(x,t,u_n^k),v_n\in H_n,$$

则迭代格式(2.1)的近似方程为

$$\left(\frac{\partial u_n^k}{\partial t},v_n\right)+(Lu_n^k,v_n)=(P(u_n^{k-1}),v_n),\forall\ P(u_n^{k-1})\in f(x,t,u_n^{k-1}),v_n\in H_n,\tag{3.1}$$

而原问题的近似方程为

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial t},v_n\right)+(Lu_n,v_n)=(P(u_n),v_n),\forall\ P(u_n)\in f(x,t,u_n),v_n\in H_n.\tag{3.2}$$

对于问题(3.2)仿照1中的讨论,也有平行于定理1的结果.

为了给出收敛性的证明,现取 H 为 $H_0^1(\Omega)$,H'为 $L^2(\Omega)$. 易于验证前文中的一切假设均自动满足,还可证得[7]:

(a) $(P(u_n),T_nP(u_n))\geqslant 0,\forall\ P(u_n)\in f(x,t,u_n)$,且$(v_n,T_nv_n)>0,0\neq v_n\in H_n$;

(b) 存在正整数 $r\geqslant 2$,使得

$$\|(T_n - T)P(u)\| \leqslant C\left(\frac{1}{n}\right)^s \|P(u)\|_{s-2}, 2 \leqslant s \leqslant r, \forall\ P(u) \in f(x,t,u).$$

引入下述记号

$C^k=\{u^k: u^k$ 为$(u_t^k,v)+(Lu^k,v)=(P(u^{k-1}),v)$的解,$\forall\ P(u^{k-1})\in f(x,t,u^{k-1}),v\in H\}$;

$C_n^k=\{u_n^k: u_n^k$ 为(3.1)的解$\}$ $C^0=\{u^0\},C_n^0=\{u_n^0\}$;

$C^*=\{u^*\in H,u^*$ 是$(u_t,v)+(Lu,v)=(P(u),v)$的解,$\forall\ P(u)\in f(x,t,u),v\in H\}$;

$C_n^*=\{u_n^*\in H_n,u_n^*$ 是$(u_{nt},v_n)+(Lu_n,v_n)=(P(u_n),v_n)$的解,$\forall\ P(u_n)\in f(x,t,u_n),v_n\in H_n\}$.

定理 2 若 $C_n^0\to C^0(n\to\infty)$,则 $C_n^k\to C^k(n\to\infty),(k=1,2,\cdots)$.

证明 用归纳法证之.

假设 $C_n^0\to C^0$,即对序列$\{u_n^0\},u_n^0\in C_n^0$,必存在 $u^0\in C^0$,使得 $u_n^0\to u^0(n\to\infty)$,由于 $f(x,t,u_n^0)\subset f(x,t,u^0)+C\|u^0-u_n^0\|B$,故对任一序列$\{q_n\},q_n\in f(x,t,u_n^0)$必收敛于 $f(x,t,u^0)$中的某一元 q,取 $P_1(u_n^0)=q_n,P_2(u)=q$.

考察方程(3.1)和(2.1)当 $k=1$ 时由已有的结果[7]易知 $u_n^1\to u^1(n\to\infty)$,即 $C_n^1\to C^1(n\to\infty)$.

现假设 $C_n^{k-1}\to C^{k-1}(n\to\infty)$,下证 $C_n^k\to C^k(n\to\infty)$,即证对 C_n^{k-1} 中的任意元 u_n^{k-1} 存在 $u_n^{k-1}\in C^{k-1}$,使得 $u_n^{k-1}\to u^{k-1}(n\to\infty)$.

现将(2.1)改写为

$$Tu_t^k + u^k \in TP(u^{k-1}), \forall\ P(x,t,u^{k-1}) \in f(x,t,u^{k-1}), u^k(0) = 0, \tag{3.3}$$

相应的半离散问题的迭代格式为

$$T_n u_{nt}^k + u_n^k \in T_n P(u_n^{k-1}), \forall\ P(u_n^{k-1}) \in f(x,t,u_n^{k-1}), u_n^k(0) = 0, \tag{3.4}$$

由 $f(x,t,u)$关于 u 的局部上半 Lipschitz 连续性,(3.3)-(3.4)为

$$T_n(u_{nt}^k - u_t^k) + u_n^k - u^k = (T - T_n)(u_t^k - P(u^{k-1})) + T_n(c\|u_n^{k-1} - u^{k-1}\|B).$$

令 $u_n^k-u^k=e_n^k$,上式的右端项为 $\rho(t)$,由 Gronwall 不等式知

$$\begin{aligned}\|e_n^k(t)\| &\leqslant \|e_n^k(0)\| + c\left\{\|\rho(0)\| + \int_0^t \|\rho_t(s)\|\,\mathrm{d}s\right\} \\ &= c\left\{\|\rho(0)\| + \int_0^t \|\rho_t(s)\|\,\mathrm{d}s\right\}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

而有条件(b)可得

$$\|\rho(0)\| = \|(T - T_n)Lu^k(0)\| + c\|u_n^{k-1} - u^{k-1}\| = c\|u_n^{k-1} - u^{k-1}\|, \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\|\rho_t(s)\| &= \|(T - T_n)Lu_t(s)\| + \frac{\partial\|u_n^{k-1} - u^{k-1}\|}{\partial t} \\ &\leqslant c\left(\frac{1}{n}\right)^r \|u_t^k(s)\|_r + \frac{\partial\|u_n^{k-1} - u^{k-1}\|}{\partial t}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

将(3.6),(3.7)代入到(3.5),整理可得

$$\|e_n^k(t)\| \leqslant c\left(\frac{1}{n}\right)^r \int_0^t \|u_t^k(s)\|_r\,\mathrm{d}s + \|u_n^{k-1} - u^{k-1}\|.$$

由上式及假设条件知 $u_n^k\to u^k(n\to\infty)$,即 $C_n^k\to C^k(n\to\infty)$.

参考文献：

[1] HENRY D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations* [M]. Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[2] ZHANG Gong-qing. *Free boundary problems and the set-valued mappings* [J]. J. Differential Equations, 1983, **49**: 1—28.

[3] LEI Jing-an. *On the convergence of discretizations for set-valued operator equations* [J]. Z. Angew. Math. Mech., 1997, **77**(11): 861—866.

[4] SUN Le-lin, LEI Jing-an. *Monotone iterative method for nonlinear discontinuous differential equations* [J]. Wuhan Univ. (J. Nat. Sci.), 1998, **3**(1): 1—4.

[5] ZOU Qing-song, TIAN Yan, LEI Jing-an. *Monotone iterative method for nonlinear discontinuous parabolic differential equations* [J]. Wuhan Univ. (J. Nat. Sci.), 1998, **3**(4): 389—393.

[6] HEIKKLA S, LAKSCHMIKANTHAM V. *Monotone Iterative Techniques for Discontinuous Nonlinear Differential Equations* [M]. New York: Mercel Dekker, INC, 1994.

[7] 黄明游. 发展方程的有限元方法[M]. 上海：上海科学技术出版社，1988.
HUANG Ming-you. *Finite Element Method on Evolution Equation* [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1988. (in Chinese)

On the General Monotone Iterative Method for a Class of Nonlinear Discontinuous Set-valued Evolution Equations

ZHOU Lei[1], TIAN Yan[2]

(1. Dept. of Math., Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China

2. Institute of Pattern Recognittion & AI, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: Using the general monotone iterative method and ordering theory, a class of nonlinear discontinuous set-valued evolution equations is discussed in this paper. some results on the convergence of the iterative solution is obtained. Moreover, we also get some results about the convergence of the solution set under a very general condition.

Key words: nonlinear discontinuous problem; evolution equation; general monotone iterative method.