

基于 DFT 插值的线性约束最小方差 宽带自适应阵列

朱维杰 孙进才 朱思宇

(西北工业大学航海工程学院 西安 710072)

2002 年 10 月 16 日收到

摘要 本文提出一种具有频率不变波束图的线性约束最小方差宽带自适应算法。首先给出了具有频率不变波束图的连续线阵的灵敏度函数与离散线阵加权系数之间的关系, 然后给出了使用 DFT 插值法求解各子带阵列权系数的方法, 最后将 DFT 插值法应用于线性约束最小方差宽带自适应阵列。理论分析及仿真结果表明, 该算法可以在实现最小方差波束形成的同时保持波束图基本不随频率变化, 且该方法可以降低宽带自适应阵列的运算量。

关键词 频率不变波束图, DFT 插值, 波束形成, 线性约束最小方差

Linearly constrained minimum variance broadband adaptive array based on DFT interpolation

ZHU Wei-Jie SUN Jin-Cai ZHU Si-Yu

(College of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract Based on the DFT interpolation method, an algorithm for linearly constrained minimum variance broadband adaptive array, whose beam pattern is frequency invariant, is presented. Firstly, relationship between weights of a discrete sensor array and the sensitivity distribution of a continuous linear array, which has a property of frequency invariant beam pattern, is presented. Then, by employing the relationship between weights at a reference frequency and weights at an other frequency, weights at the other frequency are given by using the DFT interpolation method. Lastly, the DFT interpolation method is applied to linearly constrained minimum variance broadband adaptive array. The theoretical and simulation results show that the proposed algorithm can solve the minimum variance beamforming problem and at the same time ensure the beam pattern frequency invariance.

Key words Frequency invariant beam pattern, DFT interpolation, Beamforming, LCMV

1 引言

在现代的雷达或通信系统中, 人们使用不

同的方法来抑制或抵消强的方向性干扰以提高信号的检测性能。其中波束形成技术^[1,2]提供了一种切实有效的抑制空间干扰或背景噪声的

方法, 它能在信号方向形成波束而在其它方向形成足够低的旁瓣以提高信噪比。然而通常的波束形成技术是独立于接收数据的, 即, 波束形成器的设计与阵列的工作环境无关, 因此这种波束形成技术对环境的适应能力差。自适应波束形成^[3,4]是一种与接收数据有关的阵列处理技术, 它能够根据自身的工作环境来调整权系数, 以使阵列达到某种意义下的最优性能。如线性约束最小方差波束形成器 LCMV^[5] (Linearly Constrained Minimum Variance) 可以在保持信号方向增益一定的条件下, 使阵列输出的干扰和噪声达到最小。

典型的自适应阵列只使用一组空间权系数, 因此这种自适应阵列仅适用于窄带情况。当存在宽带干扰时, 其性能将严重下降。为了使阵列能够抑制宽带干扰, 通常需要在每个通道上接一定数量的延迟单元并施以一定的时间权系数 (或将信号分解成若干个子带在频域内实现), 这样阵列便拥有更多的自由度来实现对宽带干扰的抑制。这种自适应阵列处理技术就是时空自适应处理技术 STAP (Space-Time Adaptive Processing)。STAP 技术虽能够实现宽带干扰的抑制, 但是由于自由度的成倍增加, 使得 STAP 的运算量也成倍增加, 这给信号的实时处理带来了一定的难度。此外, 虽然 STAP 技术可以在不同频率下的波束图的干扰方向形成零陷, 但波束图的主瓣会随着频率的不同而有所差异。因此, 当宽带期望信号位于波束主瓣内、而非主极大方向时, 阵列接收到的期望信号就会产生失真。

本文提出一种基于 DFT 插值的宽带自适应阵列处理方法。该方法只需要在参考频率下使用自适应算法来调整权系数, 而其它频率下的权系数是根据该频率下的权系数与参考频率下的权系数之间的关系, 用 DFT 插值的方法得到。因此本文方法可以大大降低宽带自适应阵列算法的运算量。此外, 本文方法在不同频率下形成的波束图的主瓣基本一致, 从而保证了阵列可以不失真地接收位于主瓣方向内的宽

带信号。

2 宽带波束形成器设计

2.1 连续线阵的宽带波束形成

设有一连续线阵位于 x 轴上, 线阵在 x 处对频率为 f 的信号的接收灵敏度为 $\rho(x, f)$, 若将 x 处、频率为 f 的信号表示为 $s(x, f)$, 则连续线阵的输出为

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} s(x, f) \cdot \rho(x, f) dx \quad (1)$$

若信号是位于 θ 方向的、单位幅值的远场平面波, 则 $s(x, f)$ 可以表示为

$$s(x, f) = e^{-j2\pi fx/c\sin\theta} \quad (2)$$

此时, 连续线阵的输出是方位 θ 和频率 f 的函数, 定义连续线阵的响应函数为此时的输出, 即

$$r(\theta, f) = y = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, f) \cdot e^{-j/2\pi fx/c\sin\theta} dx \quad (3)$$

式 (3) 表明, 在通常情况下, 连续线阵的响应函数不仅是方位 θ 的函数, 而且还是频率 f 的函数, 因此其波束图是随频率变化的。

文献 [6] 指出, 若连续线阵的灵敏度满足

$$\rho(x, f) = fG(xf) \quad (4)$$

则连续线阵的波束图是不依赖频率变化的恒定波束图, 并进一步说明了灵敏度中的函数 $G(\xi)$ 和基阵的响应函数 $r(\theta)$ 构成一对傅里叶变换 (除相差一正弦变换外), 即

$$\begin{aligned} r(\theta) = r(\theta, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, f) \cdot e^{-j2\pi fx/c\sin\theta} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi) \cdot e^{-j2\pi\xi/c\sin\theta} d\xi \end{aligned} \quad (5)$$

式 (4) 和 (5) 表明, $G(xf)$ 是关于 x 和 f 的对称函数, 即互换 x 和 f 不会改变函数 $G(xf)$ 的值, 也就是说, 固定 x 改变 f 和固定 f 改变 x , 函数 $G(xf)$ 呈现相同的变化。对于满足这样

基阵灵敏度特性的连续线阵，其基阵的响应函数 $r(\theta)$ 具有频率不变性。

图 1 给出了频率固定时的线阵的灵敏度函数随 x 的变化曲线，其中 (a) 是频率为 f_0 的灵敏度函数，(b) 是频率为 f_1 的灵敏度函数。从图 1 可以看出，不同频率下的宽带波束形成基阵的灵敏度函数具有相同的形状，只不过是在横轴方向上压缩或扩展了 f_1/f_0 倍，而在纵轴上扩展或压缩了相应的倍数。

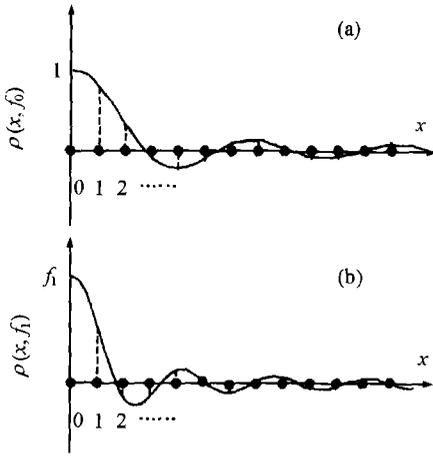


图 1 固定频率的连续线阵的基阵灵敏度

2.2 线阵灵敏度函数的 DFT 插值

通常使用的基阵不具有连续分布的灵敏度函数，而是由有限个阵元组成的离散阵列，对于这样的离散阵列，要在一定的频率范围内获得严格相同的波束图是不可能的。但是，离散阵列的输出可以看作是连续阵列输出的一种近似表示。由上节的分析可知，对于具有频率不变响应的连续线阵，其阵列的响应可以表示为

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} s(x, f) \cdot fG(xf)dx \quad (6)$$

对于一实际阵列，(6) 式的积分限应为 $(-x_l, x_h)$ 。为了获得与该连续阵列响应近似的离散阵列，设离散阵列由位于 x 轴上的等间隔的 M 个阵元组成，不失一般性，不妨设间距为 1，第 m 个阵元的坐标为 $x_m (m = 0, 1, \dots, M-1)$ ，第

m 个阵元在频率 f 处的权系数取为 $w_m^*(f) = fG(xf)|_{x=x_m}$ ，即离散阵列的权系数是连续阵列灵敏度函数的采样。用连续函数的数值积分方法，(6) 式可以近似地表示为

$$\begin{aligned} y &\approx f \cdot \sum_{m=0}^{M-1} s(x_m, f)G(x_m f) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} s(x_m, f)w_m^*(f) \end{aligned} \quad (7)$$

式 (7) 的第二行表示离散线阵的输出。若信号是位于远场的单位幅度的平面波，则其输出即为离散基阵的响应函数。离散基阵的波束图定义为其响应函数的模值，即

$$\begin{aligned} p(\theta, f) &= \left| \sum_{i=0}^{M-1} e^{-j2\pi f x_m / c \sin \theta} w_m^*(f) \right| \\ &= |\mathbf{w}^H(f) \cdot \mathbf{a}(\theta, f)| \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $\mathbf{w}(f) = [w_0(f) \ w_1(f) \ \dots \ w_{M-1}(f)]^T$ ， $\mathbf{a}(\theta, f) = [e^{j2\pi f \tau_0(\theta)} \ e^{j2\pi f \tau_1(\theta)} \ \dots \ e^{j2\pi f \tau_{M-1}(\theta)}]^T$ ， $\tau_m(\theta)$ 为 θ 方向的平面波在阵元 m 与参考点之间的传播延迟，若以坐标原点为参考点，第 m 个阵元的坐标为 (x_m, y_m) ，则传播延迟可以表示为

$$\tau_m(\theta) = (x_m \sin \theta + y_m \cos \theta) / c \quad (9)$$

其中 c 为平面波的传播速度。

通常设计宽带基阵时要求在某一频率 f_0 处的波束图满足一定的约束条件，而在其它频率处的波束图与 f_0 处的波束图近似相同。窄带波束形成器的设计已有多种方法，利用这些方法可以得到基阵在 f_0 处的权系数 $w_m^*(f_0) (m = 0, 1, \dots, M-1)$ ，而这些权系数又可以认为是某一连续线阵在 f_0 处的基阵灵敏度函数的采样，即

$$w_m^*(f_0) = \rho(x, f_0)|_{x=x_m} \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \quad (10)$$

对于其它频率处的加权系数，可以用 f_0 处的权系数 $w_m^*(f_0)$ 插值得到。考虑具有频率不

变波束图的连续线阵的灵敏度函数 $\rho(x, f) = fG(xf)$, 若在频率 f_0 处的 M 个值已知, 即

$$\begin{aligned} \rho(x_m, f_0) &= f_0 G(x_m f_0) \\ &= w_m^*(f_0) \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (11)$$

其它频率处, 如 f_k 处, 灵敏度函数在 x_m ($m = 0, 1, \dots, M-1$) 上的值可以表示为

$$\begin{aligned} \rho(x_m, f_k) &= f_k G(x_m f_k) = \frac{f_k}{f_0} f_0 G\left(\left(\frac{f_k}{f_0} x_m\right) \cdot f_0\right) \\ &= \alpha \cdot f_0 G(\alpha x_m \cdot f_0) = \alpha \cdot \rho(\alpha x_m, f_0) \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\alpha = f_k/f_0$ 。上式表明, f_k 处的灵敏度函数在 x_m 上的值等于 f_0 处的灵敏度函数在 αx_m 的值的 α 倍, 而 $\rho(x_m, f_k)$ 正是频率 f_k 处离散线阵的权系数 $w_m^*(f_k)$, 其对应关系如图 1 所示。然而 f_0 处的灵敏度函数在 αx_m 的值是未知的, 只能通过插值的方法得到。

由于 $G(\xi)$ 和基阵的响应函数 $r(\theta)$ 是一对傅里叶变换, 而使用 DFT 插值的方法可以保证插值前后的两个序列具有相同的频谱形状, 因此这里用 DFT 插值的方法。设有一函数 $y = f(x)$, 若函数在 M 个等间隔点 (设间隔为 d) 上的值已知, 即 $y_m = f(x_m)$ ($m = 0, 1, \dots, M-1$), 为了求得函数在任意一点 x 上的函数值, 使用 DFT 插值的方法如下:

(1) 根据插值精度的要求, 确定插值后的序列点数 N ($N > M$), 通常可以取 N 为 2 的整数次幂, 以便能够利用现有的 FFT 算法;

(2) 对序列 $\{y_m\}$ ($m = 0, 1, \dots, M-1$) 做点数为 M 的 DFT, 得到序列 $\{Y_m\}$ ($m = 0, 1, \dots, M-1$);

(3) 对 $\{Y_m\}$ 进行补零处理, 得到 $\{Z_n\}$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$), 其中 $\{Z_n\}$ 的取值如下:

若 M 为偶数, 则 $\{Z_n\} = \{Y_0, \dots, Y_{M/2-1}, 0, \dots, 0, Y_{M/2}, \dots, Y_{M-1}\}$,

若 M 为奇数, 则 $\{Z_n\} = \{Y_0, \dots, Y_{M/2-1}, \frac{1}{2}Y_{(M-1)/2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}Y_{(M-1)/2}, Y_{M/2}, \dots, Y_{M-1}\}$;

$Y_{(M-1)/2+1}, \dots, Y_{M-1}\}$;

(4) 对 $\{Z_n\}$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$) 做点数为 N 的 IDFT, 得到 $\{z_n\}$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$);

(5) 取序列 $\{z_n\}$ 中与 x 对应的值作为函数 $y = f(x)$ 的近似值, 即 $y = f(x) \approx z_n$, 其中 $n = \text{Round}\left(\frac{Nx}{Md}\right)$, $\text{Round}(\cdot)$ 表示取最接近的整数。

2.3 宽带波束形成器的实现

宽带波束形成器设计的任务就是寻找一组不同频率下的加权系数, 使得基阵的响应函数或波束图在一定的频率范围内保持不变, 其实现框图如图 2 所示。宽带波束形成器可以采用频域的方法实现, 也可以采用时域的方法。若使用频域的方法, 首先利用 DFT 将基阵各阵元的接收数据分成若干个子带, 然后设计参考波束形成器, 再根据参考权系数与其他频率下的权系数的关系由插值的方法得到其他频率下的权系数。若采用时域方法, 需要在每个阵元后加滤波器来逼近其频率响应, 其中频率响应由不同频率下的权系数指定。

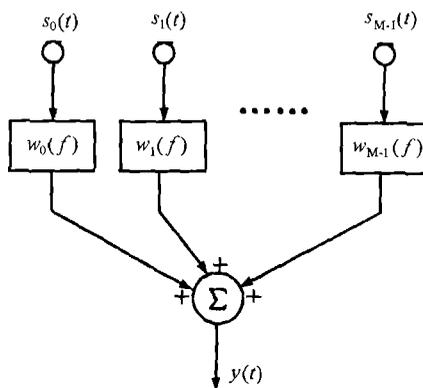


图 2 宽带波束形成原理框图

为了能够满足空间采样定理, 基阵的阵元间距 d 应小于接收信号最高频率对应波长 λ 的一半。此外, 为了能够使用插值的方法得到各子带的权系数并保证插值点位于插值区间之内, 通常选择接收信号的最低频率为参考频率。

3 线性约束最小方差宽带自适应阵列

将阵列接收到的宽带信号分解为 K 个子带, 其频域形式可以表示为

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}^T(f_0) \mathbf{s}^T(f_1) \cdots \mathbf{s}^T(f_{K-1})]^T \quad (13)$$

式中, $\mathbf{s}(f_k) = [s(x_0, f_k) s(x_1, f_k) \cdots s(x_{M-1}, f_k)]^T$ 。与此相应, 不同频率下的权矢量可以表示为

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}^T(f_0) \mathbf{w}^T(f_1) \cdots \mathbf{w}^T(f_{K-1})]^T. \quad (14)$$

式中, $\mathbf{w}(f_k) = [w_0(f_k) w_1(f_k) \cdots w_{M-1}(f_k)]^T$ 。线性约束最小方差宽带波束形成器是求解线性约束下的最小化问题, 即

$$\min_{\mathbf{W}} \mathbf{W}^H \mathbf{R}_{ss} \mathbf{W} \text{ subject to } \mathbf{C}^H \mathbf{W} = \mathbf{g} \quad (15)$$

式中 $\mathbf{R}_{ss} = E[\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^H]$, $\mathbf{g} = [g_0^* g_1^* \cdots g_{J-1}^*]^H$ 为增益矢量, $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_0 \mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}_{J-1}]$ 为约束矩阵, 它的每一列 \mathbf{c}_j ($j = 1, 2, \cdots, J-1$) 对波束图产生一个线性约束。例如要使阵列对频率为 f_k 、方位为 θ 的平面波的增益为 g_j , 则可取

$$\mathbf{c}_j^H \cdot \mathbf{W} = g_j \quad (16)$$

其中 $\mathbf{c}_j = [\mathbf{0}_{1 \times (j-1)M} \mathbf{a}^T(\theta, f_k) \mathbf{0}_{1 \times (K-j)M}]^T$ 。

为了不失真地接收期望信号, 通常在期望信号方向的不同频点同时进行约束, 以使来自于该方向的不同频率的信号具有相同的增益, 即通常取 $J = K$, $g_j = g$ ($j = 1, 2, \cdots, J-1$)。

求解 (15) 式, 即可得到自适应阵列的最优权矢量, Frost 给出了 (15) 式的解为^[5]

$$\mathbf{W}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_{ss}^{-1} \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{R}_{ss}^{-1} \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{g} \quad (17)$$

将 (17) 式写成迭代形式, 设第 i 次迭代的权矢量为 $\mathbf{W}(i)$, 则第 $i+1$ 次迭代时的权矢量为

$$\mathbf{W}(i+1) = \mathbf{P}[\mathbf{W}(i) - \mu y(i) \mathbf{S}(i)] + \mathbf{W}_q \quad (18)$$

其中 $\mathbf{W}_q = \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g}$, $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H$, μ 为收敛因子, $y(i) = \mathbf{W}^H \mathbf{S}(i)$

应用声学

为阵列第 i 次的输出。

虽然这种基于整体的自适应阵列可以对不同频率下的波束图进行约束, 但这种自适应阵列的运算量很大。如果将阵列的工作带宽分解成 K 个子带 (或对时域形式来说, 每个阵元后接 K 个延迟单元), 那么对于一个由 M 个阵元组成的阵列, 需要处理的数据就是 MK 维, 这给实时处理带来了一定困难。此外, 这种自适应阵列虽然能在期望信号方向保持恒定的增益并可以在干扰方向产生零陷, 但它形成的波束图是随频率变化而变化的, 因此, 当期望信号偏离波束主极大方向时, 接收到的期望信号就会产生失真。

若要使不同频率下的波束图相同, 那么不同频率下的权系数就存在确定性的关系。这时我们仅需要在参考频率下应用线性约束最小方差算法, 然后对其它频率下的权系数用插值的方法得到。这样, 不仅可以使需要处理的数据降低到 M 维, 而且可以保持波束的主瓣基本相同, 保证位于主瓣方向内的信号不失真地接收。

4 计算机仿真

设均匀线列阵由 16 个相同的阵元组成, 阵元间距为接收信号最高频率对应波长的一半, 信号的归一化频率范围为 0.6~1.0。期望信号位于 0° 方向, 信噪比 $\text{SNR}=0\text{dB}$; 干扰位于 10° 方向, 信干比 $\text{SIR}=0\text{dB}$ 。

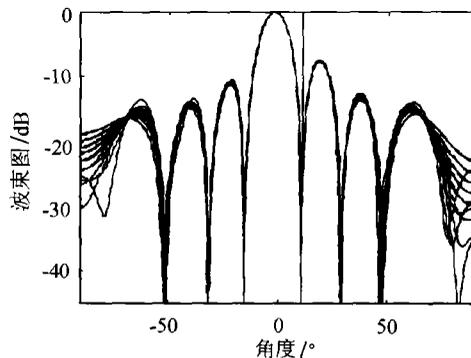


图 3 本文方法得到的不同频率下的波束

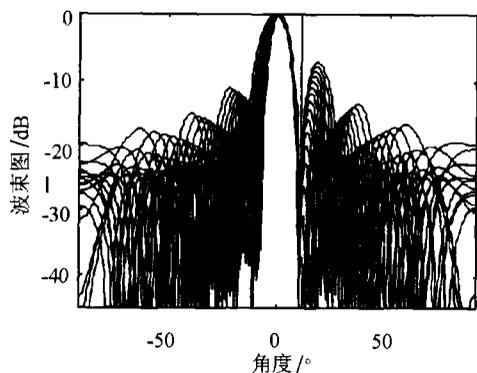


图4 Frost方法得到的不同频率下的波束

将信号带宽分解成16个子带,以信号的最低频率为参考频率。在参考频率下应用线性约束最小方差算法得到参考频率下的权系数,其中收敛因子 $\mu = 1 \times 10^{-6}$,然后用插值的方法得到其它频率下的权系数。在每个子带上形成波束,将16个不同子带的波束画在同一张图上,如图3所示,其中垂直竖线表示干扰方向。可以看出,不同频率下的波束图基本相同,并且在干扰方向形成了较深的零陷(零陷深度小于-30dB)。图4给出了Frost方法得到的不同频率下的波束图,结果表明,虽然Frost方法能

(上接第16页)

接近时,接收能量大的目标源(相当于距离近的目标)能够估计出方位角,能量小的目标被掩盖,不能估计出来。

5 结论

通过对相关矩阵最大特征值的分析,从理论和实验两方面证明将此法用于确定目标方位角的实用价值,是一种有效的测量目标方位角的方法。相关矩阵最大特征值法相较于常规的波束形成的指向性,峰值明显,计算量相当,两种方法可以同时使用,而不是相互排斥。相关矩阵最大特征法估计目标方位角比较稳定,具有很好的一致性。另外,相关矩阵最大特征法只须计算不同补偿后相关矩阵最大特征值的

在干扰方向形成零陷,但它却不能保证不同频率下波束图的主瓣相同,因此当信号从波束图非主极大方向入射时,将会产生波形失真。

5 结论

本文给出了一种具有频率不变波束图的线性约束最小方差宽带自适应算法,该方法在实现最小方差波束形成的同时能保持不同频率下的波束图基本相同,从而保证了来自主瓣内宽带信号的不失真接收。此外,该方法仅需要在参考频率下应用线性约束最小方差算法,因此该算法的运算量比传统的宽带自适应算法要低。

参 考 文 献

- 1 Van Veen B D, Buckley K M. *IEEE ASSP Magazine*, 1988, 5(2): 4~24.
- 2 Ma M T. *Theory and Applications of antenna array*. New York, Wiley, 1974.
- 3 Monzingo R, Miller T. *Introduction to adaptive arrays*. New York: Wiley and Sons, 1980. 60~64.
- 4 Gabriel W F. *Proc. IEEE*, 1992, 80: 152~162.
- 5 Frost O L. *Proc. IEEE*, 1972, 60(8): 926~935.
- 6 Ward D B, Kennedy R A, Williamson R C. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1995, 97(2): 1023~1034.

变化趋势,根据变化趋势的峰值位置来估计目标方位角,因而最大特征值法不需要计算的很精确,允许存在生有一定的容差,这也方便目标方位的估计。相关矩阵最大特征法兼具常规波束形成和基于统计特性方法的特点,是一种可行的目标方位角估计方法。

参 考 文 献

- 1 John A Stine. *Beamforming Illustrations*. *Advanced Digital Signal Processing*. 31, July, 1977.
- 2 张贤达. *现代信号处理*. 北京: 清华大学出版社, 1995.
- 3 李启虎. *声呐信号处理引论*. 第二版. 北京: 海洋出版社, 2000.
- 4 Kaveh M. *IEEE Trans, Acoustic, Speech, Signal Processing*. 1979, **ASSP-27**:286~287.
- 5 Stoica P, Nehorai A. *IEEE Trans: Acoustic, Speech, Signal Processing*. 1989, **ASSP-37**:720~741.